martes, 12 de marzo de 2013
10:27 a.m.

para otras teorías), en las coordenadas $z, \bar{z}$ (pero no, p.ej., en $w, \bar{w}$).

Podemos regresar ahora a la pregunta de la p.188: ¿cómo calcular las relaciones de conmutación en el formalismo de la integral de camino?

Usando la conexión con el orden temporal/radial (p. 186) y la definición $\alpha^\mu_m = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z)$ (p. 188), tenemos

$$[\hat{\alpha}^\mu_m, \hat{\alpha}^\nu_n] = \langle 0 | [\hat{\alpha}^\mu_m, \hat{\alpha}^\nu_n] | 0 \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}X\, e^{-S[X]} \Big(\underbrace{\alpha^\mu_m}_{\text{calcular en } |z|} \underbrace{\alpha^\nu_n}_{\text{en } |z'|} - \underbrace{\alpha^\mu_m}_{\text{en } |z|} \underbrace{\alpha^\nu_n}_{\text{en } |z'|} \Big) \Big/ \langle 1 \rangle$$

con $|z| > |z'|$ con $|z| < |z'|$

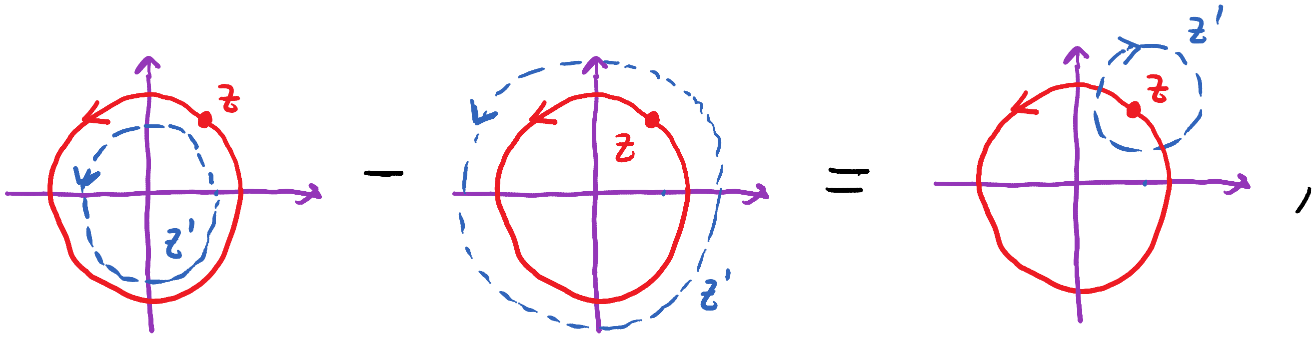
$$= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \Big\{ \oint_{|z'| = |z| - \epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'| = |z| + \epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \Big\} z'^n \underbrace{\langle \partial X^\mu(z) \partial' X^\nu(z') \rangle}_{= \partial\partial' \langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') \rangle}$$

$$\partial\partial' \underbrace{\langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') \rangle}_{-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2}$$

$$\underbrace{\partial\partial'\left(-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2\right)}_{-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \frac{1}{(z-z')^2}}$$

martes, 12 de marzo de 2013
10:48 a.m.

Dado que



lo anterior equivale a

$$[\hat{\alpha}^{\mu}_{m}, \hat{\alpha}^{\nu}_{n}] = -\frac{2}{\alpha'}\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m} \left\{ -\oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i}\, \underbrace{z'^{n}}_{= z^{n} + n z^{n-1}(z'-z) + \dots} \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{(z-z')^{2}} \right) \right\}$$

$$\underbrace{\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \underbrace{\oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \left(\frac{z^{n}}{(z-z')^{2}} + \frac{n z^{n-1}}{z-z'} + \dots \right)}_{n z^{n-1}}}$$

$$= -n\,\eta^{\mu\nu} \underbrace{\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{m+n-1}}_{\delta_{m,-n}} ,$$

es decir,

$$\boxed{[\hat{\alpha}^{\mu}_{m}, \hat{\alpha}^{\nu}_{n}] = m\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{m,-n}} \quad ,$$

tal como afirmamos en la p. 183. ✓

Este resultado se puede resumir en términos más generales: si $Q_i \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} J_i(z)$ $i=1,2,\ldots$ son cargas conservadas (como lo eran las α's – ver p. 188), al repetir el argumento anterior se encuentra que

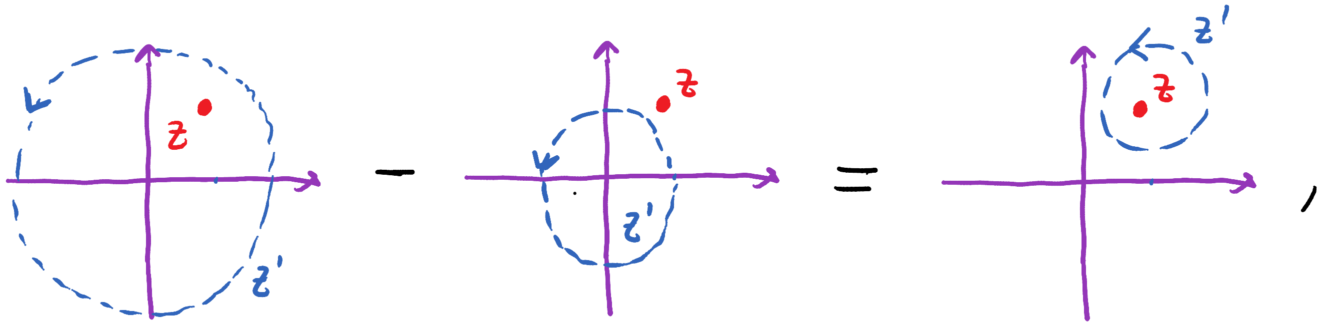
$$\boxed{[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \underbrace{\operatorname*{Res}_{z_i \to z_j} J_i(z_i)\, J_j(z_j)}_{\equiv \text{ coeficiente del término } \frac{1}{z_i - z_j} \text{ en la EPO}}} \quad .$$

Lo que vimos para las α's es un caso particular de esta fórmula, con $\alpha^{\mu}_{m} \leftrightarrow J^{\mu}_{m} = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, z^m \partial X^{\mu}(z)$.

Podemos por cierto deducir la simetría que generan estas cargas conservadas (cargas de Noether): se trata de $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$, con

$$\delta X^\mu(z,\bar z) = i\underset{\text{parámetro}}{\epsilon_\nu}\,[\underbrace{\alpha^\mu_m\,,\,X^\nu(z,\bar z)}_{\text{forma de variación}}]\,,$$

que usando nuevamente



se reescribe como

$$\delta X^\mu(z,\bar z) = i\epsilon_\nu \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i}\, \underbrace{J^\mu_m(z')\, X^\nu(z,\bar z)}_{i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, z'^m\, \partial' X^\mu(z')}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\epsilon_\nu \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i}\, z'^m\, \underbrace{\partial' X^\mu(z')\, X^\nu(z,\bar z)}_{\underbrace{\partial'\left(-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z'-z|^2\right)}_{-\frac{\alpha'}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z'-z}}+\dots}$$

$= z^m + \dots$

martes, 12 de marzo de 2013
11:58 a.m.

$$= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\, \epsilon^{\mu} z^{m} \quad ,$$

que efectivamente es una simetría (conocíamos ya el caso particular $m=0$, generado por $\alpha_0^\mu \leftrightarrow p^\mu$).

Podemos ahora regresar a examinar en más detalle el espacio de Hilbert de nuestra teoría. Definimos el estado base $|0,k\rangle$ tal que

$$\alpha_n^\mu |0,k\rangle = 0 \quad \forall \; n>0 \; \text{y} \; \forall \mu$$

(junto con la condición $\tilde{\alpha}_n^\mu |0,k\rangle = 0$, si estamos hablando de una cuerda cerrada), y

$$p^\mu |0,k\rangle = k^\mu |0,k\rangle \; .$$

Para estos estados, tomamos el producto interno usual

$$\langle 0,k|0,k'\rangle \equiv (2\pi)^D \delta^{(D)}(k-k') \; .$$

El espacio de Hilbert (espacio de Fock) completo se genera actuando repetidamente con los operadores de

martes, 12 de marzo de 2013
12:57 p.m.

creación α^{μ}_{-n} (y $\tilde{\alpha}^{\mu}_{-n}$) con $n>0$.

Recordando que $(\alpha^{\mu}_{n})^{\dagger}=\alpha^{\mu}_{-n}$ (p. 155), podemos notar de inmediato que existen estados con norma negativa, como p.ej. $\alpha^{0}_{-n}|0,k\rangle$ $(n>0)$:

$$\left|\alpha^{0}_{-n}|0,k\rangle\right|^{2}=\langle 0,k|\underbrace{\alpha^{0}_{n}\alpha^{0}_{-n}}_{[\alpha^{0}_{n},\,\alpha^{0}_{-n}]=n\eta^{00}}|0,k\rangle=-n(2\pi)^{D}\delta^{(D)}(0).$$

Los estados de este tipo se conocen como fantasmas (en una de las 2 acepciones de este término dentro de la física teórica), y claramente son patológicos: ¡están asociados a probabilidades negativas!

El problema claramente se origina de tener $X^{0}(z,\bar{z})$ en la descripción, lo cual fue necesario para preservar la covariancia bajo Lorentz. Sabemos que el precio que pagamos es tener una descripción redundante, donde la mayoría de los estados NO son físicos.

Para identificar a los estados que sí son físicos, nos falta promover a nivel cuántico a las constricciones clásicas $T_{ab}=0$. Dado que $T^a{}_a=0$ por invariancia de Weyl (p.139), éstas son sólo 2 (x σ) constricciones, que en la norma plana $g_{ab}=\delta_{ab}$ toman la forma (p.138)

$$T_{11}\propto \dot X^2 + X'^2 = 0 \quad y \quad T_{01}\propto \dot X\cdot X'=0 \quad \forall\,\sigma,\tau.$$

Dado que T_{ab} es la corriente de Noether asociada a la invariancia bajo translaciones en la hoja de mundo, sabemos que se conserva, $\partial^a T_{ab}=0$. (Más en general, con una métrica arbitraria g_{ab}, la invariancia bajo difeos implica que T_{ab} se conserva covariantemente, $\nabla^a T_{ab}=0$.)

En coordenadas complejas $z,\bar z$ (tales que $g_{z\bar z}=1/2$), la nulidad de la traza equivale a $T_{z\bar z}=0$, y la conservación de T_{ab} se traduce entonces en

$$\bar\partial T_{zz} + \partial \cancel{T_{\bar z z}}^{\,0} = 0 \quad y \quad \partial T_{\bar z\bar z} + \bar\partial \cancel{T_{z\bar z}}^{\,0} = 0 .$$

Es decir,

$T(z)\equiv T_{zz}(z)$ es analítica, y $\tilde T(\bar z)\equiv T_{\bar z\bar z}(\bar z)$ antianalítica.

Podemos entonces desarrollar estas funciones en series de Laurent (tal como hicimos antes para ∂X y $\bar{\partial} X$):

$$\boxed{\begin{aligned} T(z) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad \longleftrightarrow \quad L_n \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1}\, T(z) \\ \tilde{T}(\bar{z}) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{L}_n \equiv -\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i}\, \bar{z}^{n+1}\, \tilde{T}(\bar{z}) \end{aligned}}\ .$$

Hemos adoptado aquí una convención con $+2$ en el denominador, para cancelar el factor de z^2 ($\bar{z}^2$) que aparece al transformar $T_{zz} \to T_{ww}$ ($T_{\bar{z}\bar{z}} \to T_{\bar{w}\bar{w}}$). En las coordenadas originales, estas son simplemente expansiones de Fourier, tomando en cuenta que T_{++} (T_{--}) contiene solo modos izquierdos (derechos).

Los coeficientes/operadores L_n se conocen como modos de Virasoro, y nos dan una manera conveniente de listar nuestras constricciones: pedir que $T(z)=0\ \forall z$ equivale a pedir que $L_n=0\ \forall n$ (y similarmente para $\tilde{T}(\bar{z})$, $\tilde{L}_n$).

En el caso concreto de la teoría definida por S_p en la norma plana, se tiene (p. 138)

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} :\partial X \cdot \partial X(z): \quad , \quad \tilde{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} :\bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X(\bar{z}):$$

orden normal utilizado para definir el producto de 2 operadores en un mismo punto.

Justo como las α's y $\tilde{\alpha}$'s, las L_n y $\tilde{L}_n$ constituyen un número infinito de cargas conservadas (por Cauchy). Resultan de integrar las corrientes de Noether

$$J_n(z) \equiv z^{n+1} T(z) \qquad y \qquad \tilde{J}_n(\bar{z}) \equiv \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})$$

(que evidentemente se conservan por separado, $\bar{\partial} J_n = 0$, $\partial \tilde{J}_n = 0$, tanto como T y $\tilde{T}$ $(n=-1)$ lo hacen).

Las transformaciones que generan son

$$X^\mu(z,\bar{z}) \to X^\mu(z,\bar{z}) + \delta X^\mu(z,\bar{z}) \quad ,$$

con

$$\frac{1}{\epsilon} \delta X^\mu(z,\bar{z}) = \left[L_n , X^\mu(z,\bar{z}) \right]$$

martes, 12 de marzo de 2013

01:58 p.m.

$$\frac{1}{\epsilon}\delta X^\mu(z,\bar z) = \underbrace{\left\{ \oint_{|z'|>|z|}\frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'|<|z|}\frac{dz'}{2\pi i}\right\}}_{\oint_{|z'-z|=\delta}\frac{dz'}{2\pi i}} \left(z'^{\,n+1}\overbrace{T(z')}^{-\frac{1}{\alpha'}:\partial' X\cdot\partial' X(z'):} X^\mu(z,\bar z)\right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha'}\oint_{|z'-z|=\delta}\frac{dz'}{2\pi i}\,\overset{z^{n+1}+\dots}{z'^{\,n+1}}\,\underbrace{:\partial' X\cdot\partial' X(z'):X^\mu(z,\bar z)}_{\underbrace{2\partial'\left(-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2\right):\partial' X_\nu(z'):+\dots}_{-\alpha'\frac{1}{z'-z}\partial X^\mu(z)+\dots}}$$

es decir,

$$\delta X^\mu(z,\bar z) = \epsilon\, z^{n+1}\partial X^\mu(z),$$

que (junto con $\delta X^\mu = \bar\epsilon\,\bar z^{n+1}\bar\partial X^\mu = \bar\epsilon\,[\tilde L_n, X^\mu]$) es el cambio derivado de la transformación conforme

$$z \to z' = z + \epsilon z^{n+1}.$$

(Más en general, $j_f(z) = f(z)T(z)$ es la corriente de

Noether asociada a la transformación conforme

$z \to z' = z + \epsilon f(z)$.)

Vemos en particular que:

L_{-1} genera translaciones $z' = z + b$ (lo cual concuerda con el hecho de que $J_{-1} = T(z)$),

L_0 genera dilataciones/rotaciones $z' = az$,

o, para ser más precisos,

$L_0 + \tilde{L}_0$ genera dilataciones $z' = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) (translaciones en σ^2),

$L_0 - \tilde{L}_0$ genera rotaciones $z' = e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) (translaciones en σ^1),

y L_1 genera las llamadas transformaciones conformes especiales $z' = \dfrac{z}{cz+1}$.

La composición de estas 3 transformaciones da lugar a la transformación más general

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C},$$

que es invertible solo si $ad-bc \neq 0$, y podemos por tanto ajustar $ad-bc=1$. La regla de composición de estas transformaciones corresponde justamente a la multiplicación de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, así que L_{-1}, L_0 y L_1 (junto con $\tilde{L}_{-1}, \tilde{L}_0$ y $\tilde{L}_1$) generan un grupo isomorfo a $SL(2,\mathbb{C})$.

Este es de hecho el único subgrupo propio del grupo conforme en 2 dimensiones (la única colección de L_n's cuyos conmutadores cierran entre sí).

Dado que los L_n (y $\tilde{L}_n$) son los generadores de las transformaciones conformes, tiene mucho sentido que las constricciones $T_{ab}=0$ equivalgan a pedir que los modos de Virasoro aniquilen a los estados físicos ($L_n|fís\rangle = 0 = \tilde{L}_n|fís\rangle$), puesto que ello tiene como consecuencia que la física NO dependerá de nuestra elección del marco conforme (dado que $z \to z'(z)$

$$\Longrightarrow |fís\rangle' \equiv \exp\left(\sum_n \epsilon_n L_n\right)|fís\rangle = |fís\rangle \text{)}.$$

Pero en este procedimiento, encontraremos una pequeña obstrucción: $[L_m, L_n]$ incluye un término constante, así que no sería consistente pedir que $L_n|\text{fís}\rangle = 0 \ \forall n$.

Para entender mejor la interpretación de esta constante, nos conviene desarrollar un poco más de tecnología.

Notemos primero que, de forma similar a lo que vimos arriba para $X^\mu(z,\bar{z})$, la manera como se comporta un operador ($\equiv$ "campo") arbitrario $\mathcal{O}(z,\bar{z})$ bajo transformaciones conformes está determinada por su EPO con $T(z)$ y $\tilde{T}(\bar{z})$, a través de

$$\delta\mathcal{O}(z,\bar{z}) = -\epsilon\,[L_n, \mathcal{O}(z,\bar{z})] - \bar{\epsilon}\,[\tilde{L}_n, \mathcal{O}(z,\bar{z})]$$

$$= -\epsilon \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{\,n+1} T(z')\mathcal{O}(z,\bar{z}) - \bar{\epsilon} \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{d\bar{z}'}{2\pi i} \bar{z}'^{\,n+1} \tilde{T}(\bar{z}')\mathcal{O}(z,\bar{z})$$

$$= -\epsilon \operatorname*{Res}_{z'\to z} z'^{\,n+1} \underbrace{T(z')\mathcal{O}(z,\bar{z})}_{\text{usar EPO}} - \bar{\epsilon} \operatorname*{Res}_{\bar{z}'\to \bar{z}} \bar{z}'^{\,n+1} \underbrace{\tilde{T}(\bar{z}')\mathcal{O}(z,\bar{z})}_{\text{usar EPO}} .$$

Nos convendrá tomar una base de operadores tales que

$$T(z')\mathcal{O}(0,0) = \ldots + \frac{h}{z'^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{z'}\partial\mathcal{O}(0,0) + \ldots$$

$$\tilde{T}(\bar{z}')\mathcal{O}(0,0) = \ldots + \frac{\tilde{h}}{\bar{z}'^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{\bar{z}'}\bar{\partial}\mathcal{O}(0,0) + \ldots$$

El término de orden $1/z'$ $(1/\bar{z}')$ implica que

$$[L_{-1},\mathcal{O}(0,0)] = \partial\mathcal{O}(0,0) \;,\quad [\tilde{L}_{-1},\mathcal{O}(0,0)] = \bar{\partial}\mathcal{O}(0,0) \;,$$

lo cual expresa que bajo una traslación $z \to z' = z + b$ tenemos el resultado esperado $\mathcal{O}(0,0) \to \mathcal{O}'(b,\bar{b}) = \mathcal{O}(0,0)$,

y más en general,

$$\mathcal{O}(z,\bar{z}) \to \mathcal{O}'(z',\bar{z}') = \mathcal{O}(z,\bar{z}) \;.$$

El término de orden $1/z'^2$ $(1/\bar{z}'^2)$ implica que

$$\boxed{[L_0,\mathcal{O}(0,0)] = h\,\mathcal{O}(0,0) \;,\quad [\tilde{L}_0,\mathcal{O}(0,0)] = \tilde{h}\,\mathcal{O}(0,0)}$$

así que bajo dilatación/rotación $z \to z' = \lambda z$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ tenemos

$$\mathcal{O}(0,0) \to \mathcal{O}'(0,0) = \lambda^{-h}\bar{\lambda}^{-\tilde{h}}\mathcal{O}(0,0) \;,$$

y más en general,

$$\boxed{\mathcal{O}(z,\bar{z}) \to \mathcal{O}'(z',\bar{z}') = \lambda^{-h}\bar{\lambda}^{-\tilde{h}}\mathcal{O}(z,\bar{z})}.$$

Llamamos a $(h,\tilde{h})$ las dimensiones (o pesos) conformes de $\mathcal{O}$. Más específicamente,

$h+\tilde{h}$ es la dimensión de $\mathcal{O}$ (controla el comportamiento bajo reescalamientos),

$h-\tilde{h}$ es el espín de $\mathcal{O}$ (controla el comportamiento bajo rotaciones).

P.ej., es fácil comprobar que los pesos conformes de

X^μ son $(h=0,\ \tilde{h}=0)$,

∂X^μ $(1,0)$, $\quad\bar{\partial}X^\mu$ $(0,1)$,

$\partial^n X^\mu$ $(n,0)$, $\quad\bar{\partial}^n X^\mu$ $(0,n)$,

$:e^{ik\cdot X}:$ $\left(\frac{\alpha' k^2}{4},\frac{\alpha' k^2}{4}\right)$!! (ver Tarea 2).

En cualquier teoría de campos conforme (TCC $\equiv$ CFT), juegan un papel especial los llamados operadores primarios (o tensoriales), que bajo una transformación conforme arbitraria $z \to z'(z)$ transforman de acuerdo con

$$\boxed{\mathcal{O}(z,\bar{z}) \to \mathcal{O}'(z',\bar{z}') = (\partial_z z')^{-h} (\partial_{\bar{z}} \bar{z}')^{-\tilde{h}} \mathcal{O}(z,\bar{z})} \,.$$

Es decir, $\mathcal{O}$ transforma como si fuera un tensor de rango $h+\tilde{h}$, con h subíndices z y $\tilde{h}$ subíndices $\bar{z}$. La versión infinitesimal de esta regla de transformación es que bajo $z \to z' = z + \epsilon f(z)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{O}(z,\bar{z}) &\equiv \mathcal{O}'(z,\bar{z}) - \mathcal{O}(z,\bar{z}) \\
&= -\epsilon\,(h\partial f + f\partial)\,\mathcal{O}(z,\bar{z}) - \bar{\epsilon}\,(\tilde{h}\bar{\partial}\bar{f} + \bar{f}\bar{\partial})\,\mathcal{O}(z,\bar{z}) \,.
\end{aligned}$$

Tomando $f(z) = z^{n+1}$, esto implica que

$$[L_n, \mathcal{O}(z,\bar{z})] = (h(n+1)z^n + z^{n+1}\partial)\,\mathcal{O}(z,\bar{z}) \,,$$

$$[\tilde{L}_n, \mathcal{O}(z,\bar{z})] = (\tilde{h}(n+1)\bar{z}^n + \bar{z}^{n+1}\bar{\partial})\,\mathcal{O}(z,\bar{z}) \,,$$

y en particular,

lunes, 18 de marzo de 2013
12:57 p.m.

$$\boxed{[L_n, \mathcal{O}(0,0)] = 0 = [\tilde{L}_n, \mathcal{O}(0,0)] \quad \forall\, n>0}\,.$$

Esto es equivalente a la EPO

$$T(z)\mathcal{O}(0,0) = \underset{\uparrow}{0} + \frac{h}{z^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{z}\partial\mathcal{O}(0,0) + \ldots$$

No hay términos más singulares que z^{-2}

(y análogamente con $\tilde{T}(\bar{z})$).

Es fácil verificar, p.ej., que ∂X^μ y $:e^{ik\cdot X}:$ son primarios, pero $\partial^2 X^\mu$ no lo es.

Más en general, las derivadas $\partial^n \bar{\partial}^m \mathcal{O}$ de un operador primario $\mathcal{O}$ nunca son operadores primarios, y se conocen como descendientes de $\mathcal{O}$. Todos los operadores en una TCC se pueden expresar como combinaciones de los operadores primarios y sus descendientes.

Curiosamente, el propio tensor de energía-momento en la hoja de mundo, $T(z) = -\frac{1}{\alpha'}:\partial X\cdot\partial X:$, NO es un operador primario:

$$T(z)T(0) = \frac{1}{\alpha'^2}\Big(\underbrace{2:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial X(0)\cdot\partial X(0):}_{\left(-\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{z^2}\right)^2 \underbrace{\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}}_{\delta^\mu_\mu = D}} + \underbrace{4:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial X\cdot\partial X(0):}_{-\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{z^2}\underbrace{:\partial X(z)\cdot\partial X(0):}_{:\partial X\cdot\partial X(0): + z:\partial^2 X\cdot\partial X(0):+\dots}} + \dots\Big)$$

$$= \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2}\left(-\frac{1}{\alpha'}\right):\partial X\cdot\partial X(0): + \frac{2}{z}\left(-\frac{1}{\alpha'}\right):\partial^2 X\cdot\partial X(0): + \dots$$

es decir,

tensor bajo dilataciones, con $h=2$
(resultado esperado para $T\equiv T_{zz}$)

$$T(z)T(0) = \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \dots$$

$[L_2, T(0)] \neq 0$ $\qquad$ tensor bajo traslaciones

$\Rightarrow T$ <u>no</u> es primario

En una teoría conforme arbitraria, se tiene

$$\boxed{T(z')T(z) = \frac{c}{2(z'-z)^4} + \frac{2}{(z'-z)^2}T(z) + \frac{1}{(z'-z)}\partial T(z) + \dots}$$

$\left(\text{y } \tilde{T}(\bar{z}')\tilde{T}(\bar{z}) = \frac{\tilde{c}}{2(\bar{z}'-\bar{z})^4} + \dots \right)$, con c (y $\tilde{c}$) un

lunes, 18 de marzo de 2013
01:33 p.m.

número conocido como la carga central de la teoría.

Hemos aprendido entonces que en la teoría que nos ocupa,
$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z\, \partial X \cdot \bar{\partial} X$, la carga central es

$$\boxed{c = D = \tilde{c}} \, .$$

En general, el valor de c nos da una indicación del número de campos ($\sim$ grados de libertad) en la teoría.

La EPO de T con T implica que bajo $z \to z + \epsilon f(z)$ (que corresponde a la corriente de Noether $j(z') = i f(z') T(z')$) se tiene

$$\delta T(z) = -\epsilon \left(\frac{c}{12} \partial^3 f(z) + 2 \partial f(z) T(z) + f(z) \partial T(z) \right)$$

(que es la transformación más general que es lineal en f y con 2 subíndices z). La versión finita de esta transformación resulta ser

factor esperado para tensor con peso $h=2$

$$T'(z') = (\partial_z z')^{-2} \left[T(z) - \frac{c}{12} \mathcal{D}_z z' \right],$$

donde

lunes, 18 de marzo de 2013
01:55 p.m.

$$\mathcal{D}_z z' \equiv \frac{\partial_z^3 z'}{\partial_z z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_z^2 z'}{\partial_z z'}\right)^2$$

se conoce como la **derivada Schwarziana**

(y satisface $\mathcal{D}_z z'' = \mathcal{D}_z z' + (\partial_z z')^2 \mathcal{D}_{z'} z''$, lo cual es necesario para tener la regla de composición correcta al transformar $z \to z' \to z''$).

Así que (si $c \neq 0$) $T(z)$ NO transforma como tensor bajo transformaciones conformes arbitrarias, sino sólo bajo aquellas que satisfacen $\mathcal{D}_z z' = 0$. Éstas resultan ser precisamente las transformaciones $SL(2,\mathbb{C})$ que mencionamos en la p. 212,

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad ad-bc=1.$$

Por esta razón, T es lo que se conoce como un **operador cuasi-primario**.

(Por supuesto, T_{ab} SÍ es un tensor bajo reparametrizaciones —conformes o no—, porque ahí la métrica sí cambia.)

En particular, bajo $w \to z = e^w$, tenemos $\mathcal{D}_w z = -1/2$, así que

$$z^2 T_{zz}(z) = T_{ww}(w) + \frac{c}{24}.$$