lunes, 11 de marzo de 2013
05:02 p.m.

$\partial X^i(z)\big|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial}\tilde{X}^i(\bar{z})\big|_{z=\bar{z}}$ se traducen entonces simplemente en el enunciado de que $\partial X^\mu(z)$ sea una función continua ($X^\mu(z)$ diferenciable) al cruzar el eje real $z=\bar{z}$.

Podemos notar que en este caso

$$p^\alpha = \int_0^\pi d\sigma \, \frac{J_\tau^\alpha}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint dz \, \underbrace{J_z^\alpha}_{\frac{i}{\alpha'}\partial X^\alpha(z)} - \oint d\bar{z} \, \underbrace{J_{\bar{z}}^\alpha}_{\frac{i}{\alpha'}\bar{\partial}\tilde{X}^\alpha(\bar{z})} \right)$$

y dado que

$$\bar{z} = e^{\sigma^2 - i\sigma^1}$$

$$-\oint d\bar{z} \, \underbrace{\bar{\partial}\tilde{X}^\alpha(\bar{z})}_{\partial X^\alpha(\bar{z}) \text{ por truco de duplicación}} = +i\int_0^\pi d\sigma^1 \, e^{\sigma^2 - i\sigma^1} \partial X^\alpha(e^{\sigma^2 - i\sigma^1})$$

$$\sigma'^1 \equiv 2\pi - \sigma^1$$

$$= \underbrace{i\int_\pi^{2\pi} d\sigma'^1 e^{\sigma^2 + i\sigma'^1}}_{\oint dz'} \underbrace{\partial X^\alpha(e^{\sigma^2 + i\sigma'^1})}_{\partial X^\alpha(z')},$$

podemos reescribir

lunes, 11 de marzo de 2013
05:19 p.m.

$$p^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, \frac{i}{\alpha'}\underbrace{\partial X^\alpha(z)}_{\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_n \frac{\alpha_n^\alpha}{z^{n+1}}} = \frac{\alpha_0^\alpha}{\sqrt{2\alpha'}}.$$

Concluimos entonces que para la cuerda abierta

$$X^\alpha(z,\bar z) = x^\alpha - i\alpha' p^\alpha \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\alpha}{n}\left(z^{-n}+\bar z^{-n}\right)$$

$$X^i(z,\bar z) = c^i + 0 \qquad + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^i}{n}\left(z^{-n}-\bar z^{-n}\right),$$

expansión que naturalmente coincide con la que teníamos en la p. 167.

Avanzamos ahora hacia la cuantización de la cuerda.

Para cuantizar canónicamente, promovemos

$$X^\mu(\tau,\sigma),\ \Pi_\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_\tau X_\mu(\tau,\sigma) \longrightarrow \hat X^\mu(\tau,\sigma),\ \hat\Pi_\mu(\tau,\sigma),$$

e imponemos las relaciones de conmutación a τ constante

$$\left[\hat X^\mu(\tau,\sigma),\hat\Pi_\nu(\tau,\sigma')\right] = i\,\delta^\mu_\nu\,\delta(\sigma-\sigma'),$$

o lo que es lo mismo,

183

lunes, 11 de marzo de 2013
06:47 p.m.

$$[\hat{X}^\mu(\tau,\sigma), \partial_\tau \hat{X}^\nu(\tau,\sigma')] = i\, 2\pi\alpha' \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma-\sigma').$$

Como es de esperarse, esto implica que los coeficientes

$$x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu, \hat{p}^\mu, \hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$$

satisfacen las relaciones de conmutación

$$\boxed{\begin{aligned} &[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \\ &[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m\,\delta_{m,-n}\,\eta^{\mu\nu} \\ &[\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m\,\delta_{m,-n}\,\eta^{\mu\nu} \end{aligned}}$$

← grados de libertad de partícula

$$[\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^{\dagger\nu}] = 2\pi\,\delta_{m,n}\,\eta^{\mu\nu}$$

(ver p. 155)

Verificaremos esto explícitamente en la Tarea 2.

Como ya habíamos mencionado, en las coordenadas $z, \bar{z}$ lo anterior equivale a hacer cuantización radial, donde las relaciones de conmutación se imponen a $|z|$ constante.

Con estos operadores podemos construir el espacio de Hilbert completo, comenzando con

lunes, 11 de marzo de 2013
07:04 p.m.

$|0, p\rangle$ ← eigenestado de $\hat{p}^\mu$ (para tener energía definida)

↖ estado base de los infinitos osciladores $\hat{\alpha}^\mu_n, \hat{\tilde{\alpha}}^\mu_n \ \forall \mu, n$
(aniquilado por $\hat{\alpha}^\mu_{n>0}, \hat{\tilde{\alpha}}^\mu_{n>0}$)

y actuando con los operadores de creación $\hat{\alpha}^\mu_{-n}, \hat{\tilde{\alpha}}^\mu_{-n}$.
$n>0$

Recordamos por supuesto que, entre todos estos estados, solo serán físicos aquellos que satisfagan las constricciones a nivel cuántico, que básicamente tomarán la forma

$$\sim \quad \hat{T}_{ab}(\tau,\sigma)\,|\text{físico}\rangle = 0 \quad \forall\, \tau,\sigma .$$

(pero, ver más adelante.)

2 componentes independientes ↑ ↖ número infinito de condiciones

Podemos además calcular correladores

$p^\mu = 0$

$$\langle 0|\, T\{\hat{X}^{\mu_1}(\tau_1,\sigma_1)\cdots \hat{X}^{\mu_N}(\tau_N,\sigma_N)\}\,|0\rangle ,$$

↖ orden temporal

que, en virtud de que la teoría en la hoja de mundo es libre, quedan determinados por completo una vez que obtengamos el propagador (≡ función de correlación de 2 puntos)

$$\langle 0| T\{ \hat{X}^{\mu}(\tau,\sigma)\, \hat{X}^{\nu}(\tau',\sigma')\} |0\rangle ,$$

o, en coordenadas complejas,

$$\langle 0| R\{ \hat{X}^{\mu}(z,\bar{z})\, \hat{X}^{\nu}(z',\bar{z}')\} |0) \quad .$$

orden radial (campos valuados en puntos más lejanos del origen aparecen más a la izquierda)

Pero nosotros, en el resto del curso, preferiremos aprender a llevar a cabo este tipo de cálculos en cuantización por integral de trayectoria.

En ese contexto, las $X^{\mu}(z,\bar{z})$ son funciones ordinarias, no operadores, y sumamos sobre todas ellas en la integral $\int \mathcal{D}X^{\mu}(z,\bar{z})$, SIN restringirnos a aquéllas que satisfacen la ecuación de movimiento. Esto pone en riesgo la definición de los coeficientes x^{μ}, p^{μ}, α^{μ}_{n}, $\tilde{\alpha}^{\mu}_{n}$, que en la descripción canónica figuraban en la expansión de la solución más general a la ecuación de movimiento.

Pero una propiedad importante es que, dentro de

lunes, 11 de marzo de 2013
08:44 p.m.

la integral funcional, la ecuación de movimiento sí se satisface "en promedio", lo cual es de hecho indispensable para que exista el contacto que ya conocemos con el formalismo canónico (p. 84):

|z| aumenta hacia la izquierda

$$\langle 0| R\{\underbrace{\hat{O}_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\hat{O}_N(z_N,\bar{z}_N)}_{\text{ec. de mov. es relevante aquí}}\}|0\rangle$$

funciones locales construidas con X^μ y/o sus derivadas

$$= \frac{\int DX\; O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_N(z_N,\bar{z}_N)\, e^{-S[X]}}{\int DX\; e^{-S[X]}}$$

$$\equiv \underbrace{\frac{\langle O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle}{\langle 1\rangle}}_{\text{ec. de mov. \underline{debe} ser relevante aquí también}} .$$

Concretamente, tenemos

$$0 = \int DX \frac{\delta}{\delta X^\mu(z,\bar{z})}\left(e^{-S[X]} O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_N(z_N,\bar{z}_N)\right)$$

$$0 = \int \mathcal{D}X \Bigg(\underbrace{-\frac{\delta S}{\delta X^\mu(z,\bar z)}}_{\frac{1}{2\pi\alpha'}\partial\bar\partial X_\mu(z,\bar z)} \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N + \underbrace{\frac{\delta \mathcal{O}_1(z_1,\bar z_1)}{\delta X^\mu(z,\bar z)}}_{\propto\, \delta^{(2)}(z-z_1)} \mathcal{O}_2 \cdots \mathcal{O}_N + \ldots \Bigg) e^{-S[X]},$$

p.ej. $\frac{\delta X^\nu(z_1,\bar z_1)}{\delta X^\mu(z,\bar z)} = \delta^\nu_\mu \delta^{(2)}(z-z_1)$

es decir, se cumplen las ecuaciones de Schwinger–Dyson

$$\partial\bar\partial \langle X^\mu(z,\bar z)\, \mathcal{O}_1(z_1,\bar z_1) \cdots \mathcal{O}_N(z_N,\bar z_N) \rangle = \underbrace{\sum_{r=1}^{N} \langle \mathcal{O}_1 \cdots \underbrace{\frac{\delta \mathcal{O}_r}{\delta X_\mu} \cdots \mathcal{O}_N \rangle}_{\propto\, \delta^{(2)}(z-z_r)}}_{\text{"términos de contacto"}}$$

de modo que

$$\partial\bar\partial \langle X^\mu(z,\bar z)\, \mathcal{O}_1(z_1,\bar z_1) \cdots \mathcal{O}_N(z_N,\bar z_N) \rangle = 0 \quad \text{si } z \neq z_r \ \forall r.$$

Este es el sentido en el cual la ecuación de movimiento se cumple dentro de la integral de trayectoria.

Usando esta propiedad, podemos desarrollar

$$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^\mu_n}{z^{n+1}}, \quad \bar\partial X^\mu(\bar z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde\alpha^\mu_n}{\bar z^{n+1}},$$

dentro de $\langle \ \rangle$. Equivalentemente, podemos definir

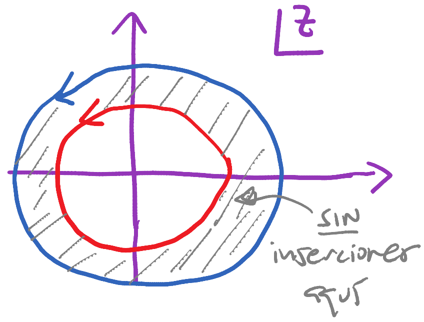
martes, 12 de marzo de 2013
04:42 a.m.

$$\alpha_n^\mu \equiv i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^n\, \partial X^\mu(z) \quad ,$$

$$\tilde{\alpha}_n^\mu \equiv -i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i}\, \bar{z}^n\, \bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$$

dentro de la integral funcional sobre todas las X^ν.

Por Cauchy, estas integrales dan el mismo resultado para cualquier contorno que incluya al origen, y en particular, para 2 círculos $|z|=e^{\sigma^2}$ y $|z'|=e^{\sigma'^2}$ con $\sigma^2 \neq \sigma'^2$.



Es decir, α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$ son independientes del tiempo $\sigma^2 = i\tau$, o lo que es lo mismo, son cargas conservadas.

Esto en realidad es obvio: las α's y $\tilde{\alpha}$'s son los coeficientes de Laurent/Fourier de los campos X^μ, y son independientes del tiempo $\tau \leftrightarrow |z|$ como consecuencia de la ecuación de movimiento. (Lo mismo aplica para los coeficientes a, a^* en la expansión del campo de KG.)

Ahora, ¿cómo determinaríamos aquí las relaciones de conmutación entre las α's, $\tilde{\alpha}$'s, que son simples números?

Nos conviene primero calcular el propagador

$$\langle X^\mu(z_1,\bar{z}_1)\, X^\nu(z_2,\bar{z}_2)\rangle \equiv \int DX \;\; X^\mu(1) X^\nu(2)\, e^{\underbrace{-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\, \partial X\cdot\bar{\partial}X}}$$

$$\overset{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Big(\underbrace{-\frac{1}{\pi\alpha'}\partial\bar{\partial}}_{\equiv \Delta_z}\Big)X$$

Esta integral es análoga (idéntica) a la integral múltiple

$$\int dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \;\; x_n\, x_{n'} \;\; \exp\Big[-\sum_{m,m'} x_m\, \Delta_{mm'}\, x_{m'}\Big]$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_n}\frac{\partial}{\partial J_{n'}}\Big[\underbrace{\int dx_1 \cdots dx_N \;\; e^{-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'} + \sum_m x_m J_m}}_{\text{Integral gaussiana (que sabemos hacer completando el cuadrado)}}\Big]_{J_m = 0\ \forall m}$$

De igual forma, podemos agregar aquí un término fuente

$\int d^2z\; J_\mu(z,\bar{z})\, X^\mu(z,\bar{z})$, para reescribir

↑ una fuente lineal para cada campo

martes, 12 de marzo de 2013
05:12 a.m.

$$\langle X^\mu(1) X^\nu(2) \rangle = \int \mathcal{D}X \; X^\mu(1) X^\nu(2)\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Delta_z X}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)} \frac{\delta}{\delta J_\nu(2)} \Bigg[\underbrace{\int \mathcal{D}X\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Delta_z X + \int d^2z\, J\cdot X}}_{\equiv Z[J]} \Bigg]_{J=0}$$

$z_1, \bar{z}_1$ $\quad$ $z_2, \bar{z}_2$

funcional generatriz

Para completar el cuadrado, definimos

$$X^\mu(z,\bar{z}) = Y^\mu(z,\bar{z}) + \int d^2z'\, \Delta^{-1}(z,\bar{z};z',\bar{z}')\, J^\mu(z',\bar{z}'),$$

con Δ^{-1} la función de Green que satisface

$$\Delta_z \Delta^{-1}(z,\bar{z};z',\bar{z}') = \delta^{(2)}(z-z').$$

Tenemos entonces

$$-\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Delta_z X = -\frac{1}{2}\int d^2z\, Y\cdot\Delta_z Y$$

$$-\frac{1}{2}\int d^2z\, Y\cdot\Delta_z \underbrace{\int d^2z'\, \Delta^{-1}_{z'} J_{z'}}_{J(z,\bar{z})} \;-\; \frac{1}{2}\int d^2z\, \underbrace{\int d^2z'\, \Delta^{-1}_{z'} J_{z'}\cdot\Delta_z Y}_{J(z,\bar{z})}$$

partes

$$-\frac{1}{2}\int d^2z\, \int d^2z'\, \Delta^{-1}_{z'} J_{z'} \cdot \underbrace{\Delta_z \int d^2z''\, \Delta^{-1}_{z''} J_{z''}}_{J(z,\bar{z})}$$

es decir,

$$-\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Delta_z X = -\frac{1}{2}\int d^2z\, Y\cdot\Delta_z Y - \int d^2z\, Y\cdot J - \frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J_z\cdot\Delta^{-1} J_{z'}$$

se cancelan

se suman

y además

$$\int d^2z\, J\cdot X = \int d^2z\, J\cdot Y + \int d^2z\, J\cdot\int d^2z'\, \Delta^{-1} J_{z'} \quad ,$$

de modo que

$$\int d^2z\left(-\frac{1}{2} X\cdot\Delta_z X + J\cdot X\right) = -\frac{1}{2}\int d^2z\, Y\cdot\Delta_z Y$$

← No hay ya término lineal en Y

$$+\frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J(z,\bar{z})\cdot\Delta^{-1}(z,\bar{z};z',\bar{z}')\,J(z',\bar{z}') .$$

Con esto concluimos que

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}X\, e^{-\frac{1}{2}\int X\cdot\Delta_z X + \int J\cdot X}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\iint J\cdot\Delta^{-1} J}\, \underbrace{\int \mathcal{D}Y\, e^{-\frac{1}{2}\int Y\cdot\Delta_z Y}}_{\equiv\langle 1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,\Delta_z}}\right)^D \ (p.108)}$$

hemos usado $\mathcal{D}X^\mu = \mathcal{D}Y^\mu$

y por tanto

martes, 12 de marzo de 2013
07:52 a.m.

$$\langle X^\mu(1) X^\nu(2)\rangle = \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)}\frac{\delta}{\delta J_\nu(2)} Z[J]\Big|_{J=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)}\frac{\delta}{\delta J_\nu(2)}\Big[\underbrace{\exp\Big(\frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J(z)\cdot\Delta^{-1}(z;z')J(z')\Big)}_{1+\frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J(z)\cdot\Delta^{-1}(z;z')J(z')+\dots}\Big]_{J=0}\langle 1\rangle$$

$$\frac{\delta J_\lambda(z)}{\delta J_\nu(z_2)} = \delta^\nu_\lambda\,\delta^{(2)}(z-z_2) \quad \Big(\text{análogo a } \frac{\partial J_n}{\partial J_m} = \delta_{n,m}\Big)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\Delta^{-1}(z_1,\bar z_1;z_2,\bar z_2)\,\langle 1\rangle \;.$$

ignorar por ahora (constante)

Este es un resultado muy conocido en teoría cuántica de campos: el propagador <u>libre</u> es la función de Green asociada al operador diferencial en la parte <u>cuadrática</u> de la acción.

Podríamos haber llegado a la misma conclusión mucho más rápido observando que

$$0 = \int DX\, \frac{\delta}{\delta X_\mu(z_1,\bar z_1)}\Big[e^{-S[X]} X^\nu(z_2,\bar z_2)\cdots\Big]$$

posibles inserciones en $z_r \neq z_1$

martes, 12 de marzo de 2013
08:17 a.m.

$$0 = \int \mathcal{D}X \left(\frac{1}{\pi\alpha'} \partial\bar{\partial} X^{\mu}(z_1,\bar{z}_1)\, X^{\nu}(z_2,\bar{z}_2) + \eta^{\mu\nu}\delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right) e^{-S} \cdots ,$$

es decir, podemos sacar las derivadas de $\int \mathcal{D}X$

$$\underbrace{-\frac{1}{\pi\alpha'}\partial_1\bar{\partial}_1}_{\equiv \Delta_{z_1}} \langle X^{\mu}(1)\, X^{\nu}(2) \cdots \rangle = \eta^{\mu\nu}\delta^{(2)}(z_1 - z_2) \langle \cdots \rangle .$$

En el caso sin inserciones, $\cdots = 1$, esto coincide con lo que obtuvimos arriba: el propagador es la función de Green.

De la discusión usual del campo de Klein-Gordon, conocemos explícitamente al propagador en espacio de momentos (p. 16):

$$\underbrace{-\left(\partial_{\sigma^1}^2 + \partial_{\sigma^2}^2\right)}_{4|z|^2\partial\bar{\partial}} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip\cdot(\sigma-\sigma')}}{p^2 - i\epsilon} = \underbrace{\delta^{(2)}(\sigma-\sigma')}_{2|z|^2\delta^{(2)}(z-z')} .$$

$p\cdot(\sigma-\sigma') = p^1(\sigma^1-\sigma'^1) + p^2(\sigma^2-\sigma'^2)$, $\quad p^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2$

A nosotros nos será directamente útil la expresión en espacio de posiciones,

$$\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip\cdot(\sigma-\sigma')}}{p^2} \sim \ln|\sigma-\sigma'|^2 .$$

por análisis dimensional

Podemos mostrar directamente que

$$\boxed{\partial\bar{\partial}\ln|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \underbrace{\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi\,\delta^{(2)}(z)}_{=0 \text{ para } z\neq 0}}$$

usando el teorema de Gauss/Stokes/Green

$$\int_R dx\,dy\,(\partial_x v^x + \partial_y v^y) = \oint_{\partial R} (v^x dy - v^y dx),$$

que en coordenadas complejas $z \equiv x+iy$, $\bar{z} \equiv x-iy$ dice que

$$\int_R d^2z\,(\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) = i\oint_{\partial R} (v^z d\bar{z} - v^{\bar{z}} dz).$$

Tenemos entonces

$$\underbrace{\int d^2z\,\partial\underbrace{\bar{\partial}\ln|z|^2}_{\frac{1}{\bar{z}} \equiv v^z \quad (v^{\bar{z}}=0)}}_{\overset{?}{=} 2\pi\,\delta^{(2)}(z)\ \checkmark} \overset{\text{Gauss}}{=} i\oint d\bar{z}\,\frac{1}{\bar{z}} = i(-2\pi i) = 2\pi,$$

lo cual confirma el resultado prometido.

Sabemos pues que $\Delta^{-1}(z;z') = -\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2$,

y por tanto

L7:12/03/13

$$\boxed{\langle X^{\mu}(z,\bar{z})\,X^{\nu}(z',\bar{z}')\rangle = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2\langle 1\rangle} .$$

Para todo lo sucesivo, nos será muy conveniente definir el orden normal conforme

en orden temporal/radial, dentro de $\int \mathcal{D}X$

$$:X^{\mu}(z,\bar{z})\,X^{\nu}(z',\bar{z}'): \equiv X^{\mu}(z,\bar{z})\,X^{\nu}(z',\bar{z}') + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2$$

restamos el propagador

(que como veremos después, está relacionado con el orden normal usual — de operadores de creación/aniquilación — en el formalismo canónico).

Con esta definición tenemos en automático

$$\langle :X^{\mu}(z,\bar{z})\,X^{\nu}(z',\bar{z}'):\rangle = 0 .$$

Por otro lado,

$$\langle :X^{\mu}(z,\bar{z})\,X^{\nu}(z',\bar{z}'):\cdots\rangle \neq 0$$ en general, pero

martes, 12 de marzo de 2013
08:51 a.m.

$$\partial\bar\partial \langle :X^\mu(z,\bar z) X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle$$

$\uparrow$ inserciones en $z_r \neq z$

$$\equiv \underbrace{\partial\bar\partial\langle X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z')\cdots\rangle}_{\overset{\text{p. 193}}{=} -\pi\alpha'\eta^{\mu\nu}\delta^{(2)}(z-z')\langle\cdots\rangle} + \underbrace{\partial\bar\partial\langle \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|\cdots\rangle}_{\pi\alpha'\eta^{\mu\nu}\delta^{(2)}(z-z')\langle\cdots\rangle}$$

$$= 0 .$$

El hecho de que $\langle :X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle$ es una función que satisface la ecuación de Laplace con respecto a z (y también z') implica que (a diferencia de la función $\langle X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z')\cdots\rangle$) es la suma de una parte analítica y una antianalítica, y podemos desarrollarla alrededor de $z=z'$:

$$\langle :X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle = \langle :\underbrace{X^\mu(z',\bar z')X^\nu(z',\bar z')}_{\equiv X^\mu X^\nu(z',\bar z')}:\cdots\rangle$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z')^n}{n!}\langle :\partial^n X^\mu X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\bar z-\bar z')^n}{n!}\langle :\bar\partial^n X^\mu X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle .$$

Nótese que esta es una expansión de Taylor, no de Laurent, pues de otro modo no sería solución a Laplace en $z=z'$.

Con esto vemos en particular que

$$\lim_{z\to z'} \langle :X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle = \langle :X^\mu X^\nu(z',\bar z'):\cdots\rangle$$

es NO singular, a diferencia de $\lim_{z\to z'}\langle X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z')\cdots\rangle$.

En conjunto, tenemos entonces la expansión (válida dentro de funciones de correlación)

$$X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z') = -\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'| + :X^\mu(z,\bar z)X^\nu(z',\bar z'):$$

$$= -\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'| + :X^\mu X^\nu(z',\bar z'):$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{(z-z')^n :\partial^n X^\mu X^\nu(z',\bar z'): + (\bar z-\bar z')^n :\bar\partial^n X^\mu X^\nu(z',\bar z'):\right\}.$$

Este es un ejemplo particular de un concepto más general en teorías de campo: la expansión del producto de operadores (EPO $\equiv$ OPE),

$$\mathcal{O}_i(z,\bar z)\,\mathcal{O}_j(z',\bar z') \xrightarrow[z\to z']{} \sum_k f_{ij}^{\ k}(z-z',\bar z-\bar z')\,\mathcal{O}_k(z',\bar z').$$

En el caso general, se trata solo de una expansión asintótica (se vuelve mejor y mejor conforme $|z-z'|\to 0$, aunque no converge cuando $z\neq z'$); pero en teorías de campos conformes de hecho converge (con un radio de convergencia dado por la distancia a la inserción más cercana).

Para tener estas mismas propiedades en el producto de 3 o más operadores (funciones) locales, el orden normal se debe definir por analogía con el teorema de Wick, que relaciona los productos en orden temporal (el cual es en automático implementado por la integral funcional) y normal (en el sentido usual, de $\hat{a}$'s y $\hat{a}^\dagger$'s):

$$X^{\mu_1}(1)\cdots X^{\mu_n}(n) = \,:X^{\mu_1}(1)\cdots X^{\mu_n}(n):$$

$$+ :X^{\mu_1}(1)X^{\mu_2}(2)X^{\mu_3}(3)\cdots X^{\mu_n}(n): + \text{ otros términos con 1 contracción}$$

Contracción $\equiv -\dfrac{\alpha'}{2}\eta^{\mu_1\mu_2}\ln|z_1-z_2|^2$ (propagador)

$$+ :X^{\mu_1}(1)X^{\mu_2}(2)X^{\mu_3}(3)X^{\mu_4}(4)X^{\mu_5}(5)\cdots: + \text{ términos con 2 contracciones}$$

$+$ términos con ≥ 3 contracciones.

(Más formalmente, para cualquier funcional $F[X]$, podemos escribir

$$F[X] \quad \exp\left(-\frac{\alpha'}{4}\int d^2z\, d^2z' \ln|z-z'|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z,\bar z)}\frac{\delta}{\delta X_\mu(z',\bar z')}\right) :F[X]: .)$$

Con esto podemos calcular cualquier Epo. P.ej.,

$$:\partial X\cdot\partial X(z):\partial' X^\mu(z') = \;:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):$$

$$+ \underbrace{:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):}_{\partial\partial'\left(-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\ln|z-z'|^2\right):\partial X_\nu(z):} + \underbrace{:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):}_{\text{ídem}}$$

$$\underbrace{\partial\partial'\left(-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\ln|z-z'|^2\right)}_{-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\partial\left(-\underbrace{\frac{1}{z-z'}}_{\frac{1}{(z-z')^2}}\right)}$$

Notar que el término $:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):$ No se agrega, porque ya está incluido en $:\partial X\cdot\partial X:$

$$= -\alpha'\frac{1}{(z-z')^2}\underbrace{:\partial X^\mu(z):}_{} + \underbrace{:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):}_{}$$

desarrollar en Taylor alrededor de $z=z'$

$$= -\frac{\alpha'}{(z-z')^2}\,\partial X^\mu(z') - \frac{\alpha'}{(z-z')}\,\partial^2 X^\mu(z') + \text{términos finitos cuando } z \to z' .$$

Como veremos en la Tarea 2, se puede mostrar similarmente que

$$:e^{ik\cdot X(z,\bar{z})}::e^{ik'\cdot X(z',\bar{z}')}:$$

$$= :e^{ik\cdot X(z,\bar{z})}e^{ik'\cdot X(z',\bar{z}')}:\underbrace{\exp\left[i^2 k\cdot k'\left(-\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2\right)\right]}_{|z-z'|^{\alpha' k\cdot k'}} .$$

En la formulación canónica podemos definir de la manera usual el orden normal de creación/aniquilación, que en este curso denotaremos

$\circ\!\!\circ \quad \circ\!\!\circ$ $\equiv$ colocar los operadores de creación $\hat{\alpha}^\mu_{-m}$ a la izquierda de los de aniquilación $\hat{\alpha}^\nu_n$ $(\forall\, m,n>0)$ y $\hat{x}^\mu$ a la izquierda de $\hat{p}^\mu$.

En la Tarea 2 confirmaremos también que las 2 definiciones de orden normal coinciden (es decir, $: \; : = \circ\!\!\circ \; \circ\!\!\circ$) para nuestra teoría $S_P = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\, \partial X\cdot\bar{\partial}X$ (no necesariamente