o lo que es lo mismo,

$$\boxed{\partial_\tau X^\mu\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad \forall\,\tau \qquad \left(\partial_t X^\mu\Big|_{\partial M} = 0\right),}$$

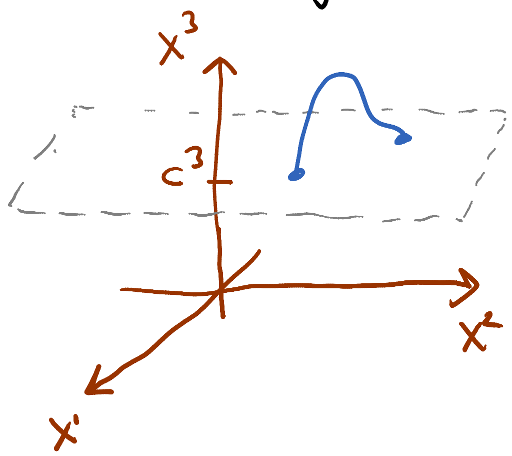
$\leftarrow \partial_t \equiv t^a \partial_a$ con $t^a \parallel \partial M$

para al menos algunos valores de μ. Estos son condiciones de Dirichlet, o de extremo fijo, y tienen como consecuencia $\delta X^\mu\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0$, con lo cual también se logra $\delta S_p = 0$. Esta condición de frontera nos resulta muy familiar, pues es la que satisfacen las cuerdas de guitarra, violín, etc. Pero en el contexto de la cuerda relativista, tienen la peculiaridad de que violan la invariancia bajo Lorentz si no todos los X^μ son Dirichlet, y además, violan la invariancia bajo translaciones.

Efectivamente, si pedimos que

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\alpha\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 & \text{para } \alpha = 0, 1, \ldots, p \\ X^i\Big|_{\sigma=0,\pi} = c^i & \text{para } i = p+1, \ldots, D-1 \end{cases} \qquad (\text{con } p = -1, \ldots, D-2),$$

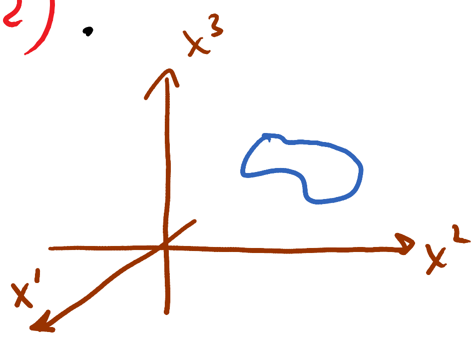
estamos estipulando que $x^i = c^i$ es un lugar especial, y las cuerdas abiertas deben tener sus extremos justo ahí. P.ej., el caso $p=2$ sería como en la figura de la derecha: los extremos de la cuerda sólo podrían deslizarse libremente a lo largo de x^1 y x^2,



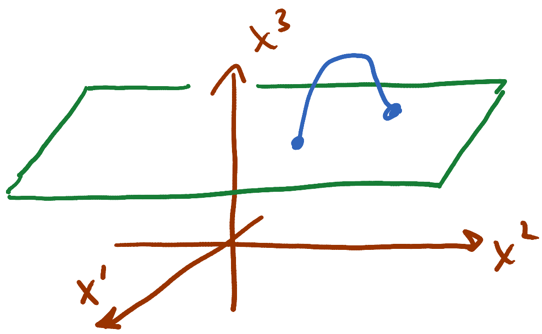
pero en las direcciones restantes están restringidos a no salirse nunca del plano 2-dimensional definido por $x^3 = c^3, \ldots, x^{D-1} = c^{D-1}$. (El caso $p=-1$, donde todos los X^μ serían Dirichlet, es todavía más peculiar, pues ambos extremos estarían atorados en un solo evento $x^\mu = c^\mu$ en el espaciotiempo.) Vale la pena enfatizar que esta restricción aplica sólo para los extremos: los puntos en el cuerpo de la cuerda abierta son indistinguibles de los puntos en una cuerda cerrada, y pueden por tanto moverse en todo el espacio. Aunque, por supuesto, incurrirán en un costo energético grande si se alejan mucho de

$x^i = c^i$, porque la cuerda tendrá que estirarse/crecer.

Durante muchos años, esto pareció demasiado extraño como para tomarse en cuenta. Pero en 1989, Dai, Leigh y Polchinski, y por separado Hořava, entendieron la verdadera naturaleza de estas condiciones: mostraron (utilizando la llamada "dualidad T") que el plano p-dimensional en $x^i = c^i$ es un objeto físico que debe considerarse parte del espectro no perturbativo, un solitón, de la teoría de cuerdas. Dai, Leigh y Polchinski lo bautizaron D-brana (Dirichlet) (o más específicamente, Dp-brana, si se quiere indicar su dimensionalidad).

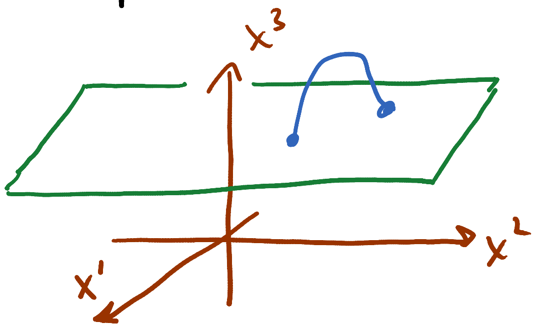


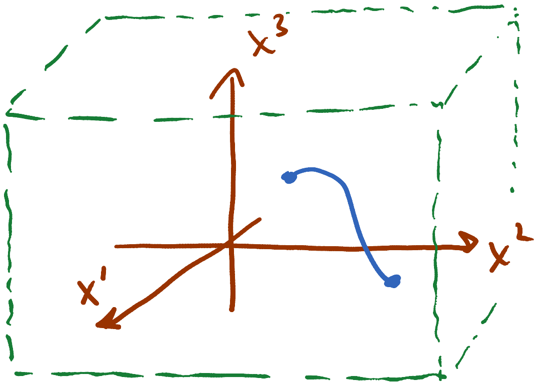
La idea es entonces que, así como una cuerda cerrada es una pequeña excitación de (la generalización cuerdera de) el propio espaciotiempo, una cuerda abierta es una pequeña excitación de un objeto físico extendido en p dimensiones espaciales $(-1 \leq p \leq D-1)$, que llamamos una D-brana. Esto explica por qué los extremos de la cuerda abierta solo pueden deslizarse libremente a lo largo



de algunas direcciones x^α $(\alpha=0,\ldots,p)$: la D-brana está localizada en $x^i=c^i$ $(i=p+1,\ldots,D-1)$, y la cuerda abierta es una excitación de ella —podemos pensarla como un hilito (filamento) de la propia D-brana. Dicho a la inversa, así como el espaciotiempo es un objeto cuyas pequeñas excitaciones son cuerdas cerradas (que pueden, naturalmente, moverse por todo el espacio), y siempre que hablamos de cuerdas cerradas estamos en última instancia hablando del espaciotiempo cuerdero, una D-brana es un objeto cuyas pequeñas excitaciones son cuerdas abiertas (que, naturalmente, solo pueden moverse sobre la D-brana), y siempre que hablamos de cuerdas abiertas estamos en última instancia hablando de una (o varias) D-brana(s).

Queda claro entonces que el hecho de que las condiciones de Dirichlet violen la invariancia bajo Poincaré no es un crimen, sino una consecuencia natural de la presencia de la D-brana. Y entendemos también que incluso en el caso $p=D-1$, donde todas las X^μ son Neumann y sí se tiene invariancia de Poincaré, las cuerdas abiertas deben interpretarse de cualquier manera como excitaciones de una D-brana que llena todo el espacio, una D(D-1)-brana.





letra: Dirichlet ↗ ↖ número: dimensión del espaciotiempo (eventualmente 26)

En ausencia de D-branas, NO puede haber cuerdas abiertas, solo cerradas.

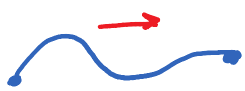
El grueso de la comunidad cuerdera no aceptó a las D-branas como objetos intrínsecos de la teoría de cuerdas sino hasta 1995, cuando Polchinski publicó un trabajo clave [hep-th/9510017] donde demostró contundentemente su relevancia. Desde entonces, las D-branas han sido pieza crucial en muchos avances dentro de la teoría.

Procedamos ahora a implementar explícitamente las condiciones de frontera de Dp-brana,

$$\boxed{\partial_\sigma X^\alpha\Big|_{\sigma=0,\pi}=0\quad(\alpha=0,\dots,p),\qquad X^i\Big|_{\sigma=0,\pi}=c^i\quad(i=p+1,\dots)}\,.$$

Ahora nuestros campos viven no sobre un círculo, sino sobre un intervalo; pero de cualquier manera, el hecho de que σ tenga un rango finito vuelve a hacer que el momento en la hoja de mundo sea discreto, $p'=n$.

La diferencia importante con respecto a la cuerda cerrada es que ahora los modos izquierdos y derechos <u>NO</u> son independientes, porque las



condiciones de borde hacen que las ondas derechas se conviertan en izquierdas (y viceversa) al rebotar en los extremos de la cuerda ($\Rightarrow$ ondas <u>estacionarias</u>).

Concretamente, para satisfacer las condiciones de

Neumann y Dirichlet necesitamos tener, respectivamente,

no confundir

$$\tilde{\alpha}_n^{\alpha} = \alpha_n^{\alpha} \quad \forall\, n \,, \qquad \tilde{\alpha}_n^{i} = -\alpha_n^{i} \quad \forall\, n \,,$$

así que la expansión toma la forma

$$X^{\alpha}(\tau,\sigma) = x^{\alpha} + 2\alpha' p^{\alpha}\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\alpha}e^{-in\tau}\cos(n\sigma)$$

porque ahora $p_{\mu} = \int_0^{\pi} d\sigma\, \Pi_{\mu} = \int_0^{\pi} d\sigma\, \frac{\dot{X}_{\mu}}{2\pi\alpha'}$,

no confundir

$$X^{i}(\tau,\sigma) = c^{i} + 0 + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{i}e^{-in\tau}\operatorname{sen}(n\sigma) .$$

no se permite término lineal en τ

$(\alpha_0^i + \tilde{\alpha}_0^i = 0)$, así que $p^i = 0$:

la cuerda NO puede portar un momento neto en las direcciones transversales a la Dp-brana.

Es claro entonces que, al cuantizar, el espacio de Hilbert resultante para la cuerda abierta será más pequeño que el de la cuerda cerrada (y en particular, veremos que NO incluye a un gravitón).

Hemos entendido ya las condiciones de frontera para la cuerda cerrada y abierta, así como el cambio de notación de as y $a^\dagger$s a αs y $\tilde{\alpha}$s.

Vimos en las pp. 141-2 que, incluso después de fijar la norma plana $g_{ab} = \eta_{ab}$ ó δ_{ab}, S_p tiene todavía a las transformaciones conformes como simetría local remanente. En efecto,

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma^1 d\sigma^2\, \partial_a X\cdot\partial_a X$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma^+ d\sigma^-\, \partial_{\sigma^+} X\cdot\partial_{\sigma^-} X \,,$$

con $\sigma^+ \equiv \tau+\sigma \equiv -i\sigma^2+\sigma^1$, $\sigma^- \equiv \tau-\sigma \equiv -i\sigma^2-\sigma^1$, es invariante bajo

$$\sigma^+ \to \underline{\sigma}^+(\sigma^+)\,, \quad \sigma^- \to \underline{\sigma}^-(\sigma^-)\,:$$

$$\underline{S}_p = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\underline{\sigma}^+ d\underline{\sigma}^- \partial_{\underline{\sigma}^+}X\cdot\partial_{\underline{\sigma}^-}X$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma^+ d\sigma^- \underbrace{\left|\frac{\partial(\underline{\sigma}^+,\underline{\sigma}^-)}{\partial(\sigma^+,\sigma^-)}\right|}_{\cancel{\frac{\partial\underline{\sigma}^+}{\partial\sigma^+}}\,\cancel{\frac{\partial\underline{\sigma}^-}{\partial\sigma^-}}} \cancel{\frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+}}\partial_{\sigma^+}X\cdot\partial_{\sigma^-}X\cancel{\frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}}$$

$$= S_p .$$

Esta NO es una reparametrización : la métrica no cambia (sigue siendo $g_{11} = 1 = g_{22}$, $g_{12} = 0$, o lo que es lo mismo, $g_{++} = 0 = g_{--}$, $g_{+-} = -1/2$), así que las distancias propias sí cambian. Como vimos,

$$\begin{pmatrix}\text{Transformación}\\ \text{Conforme}\end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Transformación}\\ \text{de Weyl}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\text{Reparametrización}\\ \text{conforme}\end{pmatrix}}_{\substack{g_{ab}\to\Omega\, g_{ab} \qquad g_{ab}\to \underbrace{\frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+}\frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}}_{\equiv\,\Omega^{-1}} g_{ab}}}$$

Reescala localmente distancias propias, pero preserva ángulos.

A pesar de que las reparametrizaciones conformes son un subconjunto de medida cero del grupo de difeor, en 2 dimensiones las transformaciones conformes (definidas a nivel local) forman un grupo de dimensión infinita: infinitesimalmente, $\underline{\sigma}^+(\sigma^+) = \sigma^+ + \sum_r \varepsilon_r (\sigma^+)^r$.

S_p es un ejemplo de lo que llamamos una teoría de campos conforme (TCC ≡ CFT) en 2 dimensiones.

Las teorías conformes son también importantes en $d>2$ dimensiones (p.ej., las teorías de campos bien definidas se reducen a una TCC a ultra-altas energías, y frecuentemente se reducen a TCC a ultra-bajas energías). Pero en $d>2$, la dimensión del grupo conforme es solo $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. 16:05/03/13

El caso $d=2$ es especial, y la simetría conforme se vuelve entonces una herramienta muy poderosa.

Para hacerla manifiesta y aprovecharla más fácilmente, conviene hacer un nuevo cambio de notación, para pasar a coordenadas complejas en la hoja de mundo:

convenciones difieren de Polchinski

$$w \equiv \sigma^2 + i\sigma^1 \quad (= i(\tau+\sigma) = i\sigma^+)$$
$$\bar{w} \equiv \sigma^2 - i\sigma^1 \quad (= i(\tau-\sigma) = i\sigma^-)$$

$\equiv w^*$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} \sigma^2 = \frac{1}{2}(w+\bar{w}) \\ \sigma^1 = \frac{i}{2}(\bar{w}-w) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_w = \frac{1}{2}(\partial_2 - i\partial_1) \,, \quad \partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_1) \,,$$

$$g_{w\bar{w}} = \frac{\partial\sigma^1}{\partial w}\frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{w}}(1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\bar{w}}(1) = \frac{1}{2} \,,$$

$$g_{ww} = \frac{\partial\sigma^1}{\partial w}\frac{\partial\sigma^1}{\partial w}(1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w}\frac{\partial\sigma^2}{\partial w}(1) = 0 \,,$$

$$g_{\bar{w}\bar{w}} = \frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{w}}(1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\bar{w}}(1) = 0 \,,$$

fuera de la diagonal, justo como g_{+-}

$$d^2w \equiv dw\,d\bar{w} = \left|\frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(\sigma^1,\sigma^2)}\right| d\sigma^1 d\sigma^2 = 2\,\underbrace{d\sigma^1 d\sigma^2}_{d^2\sigma} \,.$$

La acción de Polyakov se reescribe entonces como

contracción con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2w\, \partial_w X \cdot \partial_{\bar{w}} X \,.$$

Adoptaremos la notación $f(w,\bar{w})$ para una función genérica, $f(w)$ para una función analítica/holomorfa y $f(\bar{w})$ para una función antianalítica/antiholomorfa.

Por ejemplo, la separación que teníamos antes en modos izquierdos y derechos adopta la forma

$$X^\mu(w,\bar{w}) = X^\mu(w) + \tilde{X}^\mu(\bar{w}) \,.$$

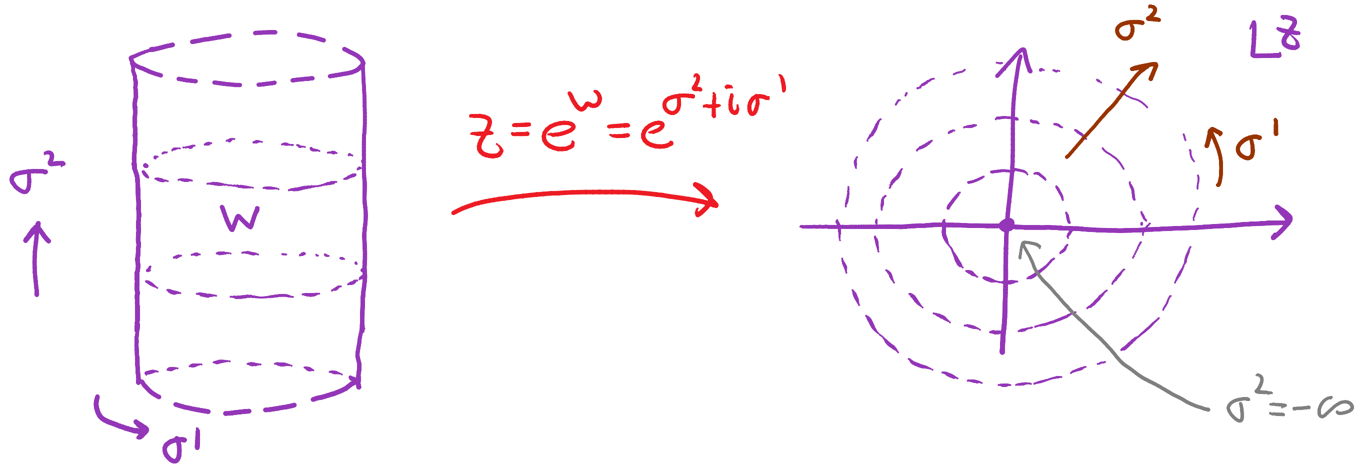
En este lenguaje, una transformación conforme corresponde a un mapeo analítico/holomorfo

$$w \to w' = w'(w) \,, \quad \bar{w} \to \bar{w}'(\bar{w}) \,,$$

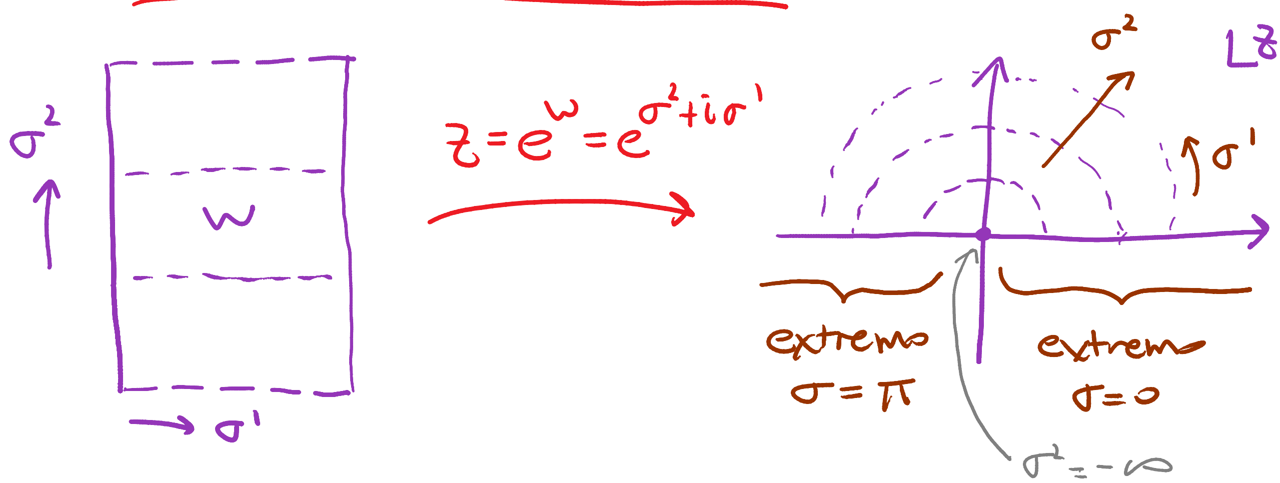
con $X^\mu(w,\bar{w}) \to X'^\mu(w',\bar{w}') = X^\mu(w,\bar{w})$ (escalar)

(y $S_p' = S_p$, por el mismo argumento de antes).

Nos convendrá, de hecho, cambiar de hoja de mundo por medio de una transformación conforme específica $z = e^w$, que para la cuerda cerrada tiene el efecto de mapear el cilindro (infinito) al plano complejo $\mathbb{C}$,



y para la cuerda abierta, mapea la tira (infinita) a la mitad superior del plano complejo,



Notar que las translaciones en el tiempo σ^2 en la hoja de mundo original se convierten en reescalamientos en el plano complejo, así que lo que desde el punto de vista de w es el Hamiltoniano H, el generador de la evolución temporal, se reinterpreta en

martes, 05 de marzo de 2013
12:01 p.m.

z como el generador D de dilataciones ($z \to \lambda z$). $\lambda \in \mathbb{R}$

Por esta razón, al cuantizar la teoría en el plano complejo coordinatizado con z, elegiremos imponer las relaciones de conmutación a $|z|$ constante (es decir, a σ^2 constante). Este procedimiento se conoce como cuantización radial.

La acción tiene por supuesto la misma forma que antes, que abreviaremos en lo sucesivo como

$$\boxed{S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z\, \partial X \cdot \bar{\partial} X} ,$$

donde $\partial \equiv \partial_z$, $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$.

Al extremizarla, $\delta S_p / \delta X_\mu = 0$, obtenemos la ecuación de movimiento

$$\partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \qquad \text{Laplace/ondas},$$

que nos informa de inmediato que $\partial X^\mu(z)$ es analítica, y $\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$ antianalítica.

Esto nos permite desarrollar a estas funciones en una expansión de Laurent (no puramente de Taylor, por el carácter singular que tiene el origen $z=0$):

$$\partial X^{\mu}(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^{\mu}}{z^{n+1}} ,$$

$$\bar\partial X^{\mu}(\bar z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde\alpha_n^{\mu}}{\bar z^{n+1}} .$$

Integrando, obtenemos entonces

$$X^{\mu}(z,\bar z) = X^{\mu}(z) + \tilde X^{\mu}(\bar z) , \quad \text{con}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X^{\mu}(z) &= \tfrac{1}{2}x^{\mu} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\alpha_0^{\mu}\ln z + \sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^{\mu}}{n z^{n}}\right), \\ \tilde X^{\mu}(\bar z) &= \tfrac{1}{2}x^{\mu} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\tilde\alpha_0^{\mu}\ln \bar z + \sum_{n\neq 0}\frac{\tilde\alpha_n^{\mu}}{n \bar z^{n}}\right). \end{aligned}}$$

Es fácil verificar que esta expansión de Laurent coincide perfectamente con la expansión de Fourier que dedujimos para la cuerda cerrada en la p. 155.

Igual que antes, para la cuerda <u>cerrada</u> la condición de periodicidad

$$\boxed{X^\mu(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^\mu(z, \bar{z})}$$

nos obliga a tener $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu$.

Para agarrar algo de práctica con estas variables complejas, repetiremos ahora la deducción de la carga de Noether asociada a translaciones espaciotemporales.

Bajo $X^\mu(z,\bar{z}) \longrightarrow X^\mu(z,\bar{z}) + \epsilon^\mu(z,\bar{z})$ tenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \left(\partial X^\mu \bar{\partial} \epsilon_\mu + \partial \epsilon_\mu \bar{\partial} X^\mu \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int d^2z \Big[\underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'} \partial X^\mu\right)}_{\equiv J_z^\mu} \bar{\partial} \epsilon_\mu + \partial \epsilon_\mu \underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu\right)}_{\equiv J_{\bar{z}}^\mu} \Big]$$

dejando fuera, por <u>convención</u>

$$\overset{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int d^2z \left(\bar{\partial} J_z^\mu + \partial J_{\bar{z}}^\mu \right) \epsilon_\mu(z,\bar{z}) = 0$$

si usamos la ec. de movimiento para $X^\mu(z,\bar{z})$

martes, 05 de marzo de 2013
01:23 p.m.

$\Longrightarrow$ $(J_z^\mu, J_{\bar z}^\mu)$ son D corrientes conservadas en la hoja de mundo,

$$\underbrace{\bar\partial J_z^\mu}_{\propto \partial X^\mu} + \underbrace{\partial J_{\bar z}^\mu}_{\propto \bar\partial X^\mu} = 0 \,. \leftarrow$$

Así se ve el enunciado $\partial_a J^{\mu a} = g^{ab}\partial_a J_b^\mu = 0$ en estas coordenadas

Podemos notar que, en este caso, es posible de hecho definir 2(×D) corrientes respectivamente analítica/antianalítica que se conservan por separado:

$$j^\mu \equiv (J_z^\mu, 0) = \frac{i}{\alpha'}\partial X^\mu \,, \quad \tilde{j}^\mu \equiv (0, J_{\bar z}^\mu) = \frac{i}{\alpha'}\bar\partial X^\mu$$

satisfacen

$$\bar\partial j^\mu = 0 \,, \qquad \partial \tilde{j}^\mu = 0 \,.$$

Sabemos que la carga conservada es el momento espaciotemporal. Usando

$$J_\tau^\mu = i J_{\sigma^2}^\mu = i(J_w^\mu + J_{\bar w}^\mu)$$

$$= i(z J_z^\mu + \bar z J_{\bar z}^\mu) \,,$$ esto es

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \, \frac{J_\tau^\mu}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma^1}{2\pi} \left(z J_z^\mu + \bar{z} J_{\bar{z}}^\mu \right) ,$$

por normalización elegida (p.176)

y dado que $z = e^{\sigma^2 + i\sigma^1} \Rightarrow dz = iz\, d\sigma^1$,

$\bar{z} = e^{\sigma^2 - i\sigma^1} \Rightarrow d\bar{z} = -i\bar{z}\, d\sigma^1$,

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(dz\, J_z^\mu - d\bar{z}\, J_{\bar{z}}^\mu \right)$$

indica sentido de z (opuesto a $\bar{z}$)

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(dz\, j^\mu - d\bar{z}\, \tilde{j}^\mu \right) .$$

Recordando ahora que

$$j^\mu \equiv J_z^\mu = \frac{i}{\alpha'} \partial X^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} ,$$

$$\tilde{j}^\mu \equiv J^\mu \equiv \frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}} ,$$

tenemos entonces

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} - \oint \frac{d\bar z}{2\pi i} \frac{\tilde\alpha_n^\mu}{\bar z^{n+1}} \right)$$

y usando el teorema de Cauchy, nos quedamos por último con el residuo de los polos simples $(n=0)$,

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \left(\alpha_0^\mu + \tilde\alpha_0^\mu \right) = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \tilde\alpha_0^\mu \,,$$

en acuerdo con el resultado de la p.152 y 155.

Para una cuerda abierta asociada a una Dp-brana extendida a lo largo de $x^1, \dots, x^p$, las condiciones de borde son

$\leftarrow \alpha = 0, \dots, p$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\sigma X^\alpha \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \iff \partial X^\alpha(z)\Big|_{z=\bar z} = \bar\partial X^\alpha(\bar z)\Big|_{z=\bar z} \\ \quad \hookleftarrow i(\partial_w - \partial_{\bar w}) = i(z\partial - \bar z\bar\partial) \\ \partial_\tau X^i \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \iff \partial X^i(z)\Big|_{z=\bar z} = -\bar\partial X^i(\bar z)\Big|_{z=\bar z} \end{array} \right.$$

$\leftarrow i = p+1, \dots, D-1$

$\hookleftarrow i(\partial_w + \partial_{\bar w}) = i(z\partial + \bar z\bar\partial)$

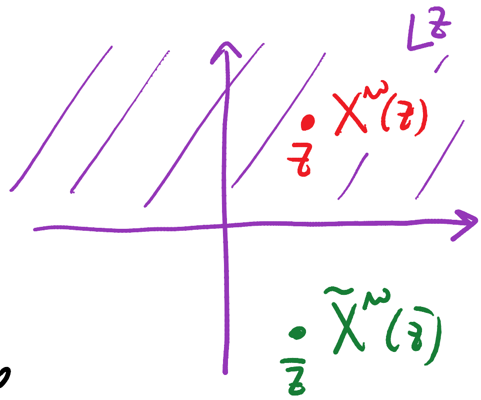
lunes, 11 de marzo de 2013
04:46 p.m.

Usando las expansiones de Laurent de la p.175, esto implica igual que antes

$$\alpha^\alpha_n = \tilde{\alpha}^\alpha_n \,, \quad \alpha^i_n = -\tilde{\alpha}^i_n \quad \forall\, n \,,$$

de modo que en lugar de ondas viajeras tenemos ondas estacionarias.

Una manera conveniente de reexpresar esta conexión es implementar las condiciones de frontera a través de lo que en electro llamamos el <u>método de imágenes</u>, y en cuerdas se llama usualmente el <u>truco de duplicación</u> ("doubling trick"). Comenzando con $X^\mu(z)$ definida en la mitad superior del plano, y $\tilde{X}^\mu(\bar{z})$ en la mitad inferior, <u>extendemos</u> $X^\mu(z)$ al plano <u>entero</u> definiendo



$$X^\alpha(\bar{z}) \equiv +\tilde{X}^\alpha(\bar{z}) \,, \quad X^i(\bar{z}) \equiv -\tilde{X}^i(\bar{z}) \,.$$

Las condiciones de borde $\partial X^\alpha(z)\big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial}\tilde{X}^\alpha(\bar{z})\big|_{z=\bar{z}}$,