

$$g_{+-} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau} = -1} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-}}_{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma} = +1} = -\frac{1}{2},$$

es decir, $ds^2 \equiv g_{ab} d\sigma^a d\sigma^b = -d\tau^2 + d\sigma^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$.

$(-\tau^2 + \sigma^2 = -\sigma^+ \sigma^-)$

Definiendo a los reparametrizaciones conformes

$$\begin{cases} \sigma^+ \\ \sigma^- \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma}^+(\sigma^+) \\ \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{en lugar de} \\ \underline{\sigma}^\pm(\sigma^+, \sigma^-) \end{matrix},$$

veremos que su efecto sobre la métrica es

$$\underline{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{g}_{ab} = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \underline{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \underline{\sigma}^b} g_{cd} = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b \\ \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^b} \left(-\frac{1}{2}\right) & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

es decir, $\underline{g}_{ab} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^a} & \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^a} \\ \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^b} & \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^b} \end{pmatrix} g_{ab}$,

efecto que podemos eliminar con una transformación de Weyl con $\Omega^{-1} = (\partial\sigma^+ / \partial\bar{\sigma}^+) (\partial\sigma^- / \partial\bar{\sigma}^-)$.

Llamamos transformación conforme a la combinación

$$\left(\begin{array}{c} \text{Weyl con} \\ \Omega^{-1} = \frac{\partial\sigma^+}{\partial\bar{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\bar{\sigma}^-} \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} \text{reparametrización} \\ \text{conforme} \\ \bar{\sigma}^+(\sigma^+), \bar{\sigma}^-(\sigma^-) \end{array} \right)$$

(un subgrupo de medida cero en $\text{Dif} \times \text{Weyl}$),
y vemos entonces que las transformaciones conformes preservan la norma plana $g_{ab} = \delta_{ab}$, y son por tanto las simetrías restantes aún después de fijar esta norma.

[5:26/02/13]

Para seguir adelante, tenemos entonces 2 opciones:
i) Eliminar la redundancia por completo antes de cuantizar. La elección obvia $X^0 = \tau$ (que habría que complementar con una condición adicional) no

es muy manejable para la cuerda. El método más conveniente y tradicional es definir las coordenadas del cono de luz en el espaciotiempo

$$x^{\pm} \equiv \pm x^0 + x^{D-1} \quad \Rightarrow \quad X^{\pm}(\sigma) \equiv \pm X^0(\sigma) + X^{D-1}(\sigma),$$

y fijar la norma del cono de luz

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + p^+ \tau.$$

A partir de las constricciones se puede entonces despejar X^- en términos de X^+ y las coordenadas transversales X^i $i=1, \dots, D-2$, de tal modo que quedamos solo con las $D-2$ $X^i(\tau, \sigma)$ como grados de libertad físicos (ya sin constricciones), que uno procede a cuantizar.

Este método constituye un atajo útil para deducir el espectro de la cuerda y el valor requerido para D (la llamada dimensión crítica); pero no tiene invariancia de Poincaré manifiesta.

[Ver p.ej. Green-Schwarz-Witten cap. 2, Polchinski cap. 1, Brink-Henneaux cap. 12, Becker-Becker-Schwarz cap. 2.]

ii) Cuantizar los D campos X^M , y eliminar la redundancia después, imponiendo las constricciones a nivel cuántico, como condiciones para identificar a los estados físicos, análogamente a lo que hicimos para la partícula. Este es el método que usaremos en el resto del curso, y se le conoce como cuantización covariante "antigua" (para contrastar con la cuantización covariante "moderna", o BRST, que mencionaremos brevemente más adelante).

Por ahora nos olvidemos entonces de las 2 constricciones, y el sistema que debemos cuantizar es simplemente

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^M \partial_a X_N, \quad \leftarrow a=1,2$$

que como ya dijimos no es otra cosa que D

campos escalares libres (Klein-Gordon) reales y no masivos. La ecuación de movimiento para cada campo es la ec. de Klein-Gordon sin masa,

$$\partial^2 \chi^N = 0$$

↪ Laplaciano / D'Alembertiano $\partial_1^2 + \partial_2^2 = \partial_1^2 - \partial_0^2$

mejor conocida como la ecuación de ondas.

De la p. 14, esperamos entonces poder desarrollar a los χ^N en modo de Fourier, en analogía directa con la expresión clásica

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{-i p \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

↕

$$\chi^N(\tau, \sigma) = \int \frac{d p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p^N e^{i p \cdot \sigma} + a_p^{N*} e^{-i p \cdot \sigma} \right) \Big|_{p^0 = E_p \equiv |p|}$$

↪ $p \equiv p^i$ momento espacial en la hoja de mundo

donde, al cuantizar, los coeficientes a_p^μ y $a_p^{\mu*}$ se convertirán en operadores de aniquilación y creación \hat{a}_p^μ y $\hat{a}_p^{\mu\dagger}$.

Esto es esencialmente correcto; pero habrá diferencias en 2 aspectos: las condiciones de frontera para X^μ , y la notación que es tradicional en cuerdas.

Las condiciones de frontera se deducen, justo como la ecuación de movimiento, a partir del principio variacional: comenzando con

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu, \quad M \leftarrow \text{hoja de mundo}$$

al variar $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ obtenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a (\delta X_\mu)$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma (-\partial^2 X^\mu) \delta X_\mu + \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a (\partial_a X^\mu \delta X_\mu)}$$

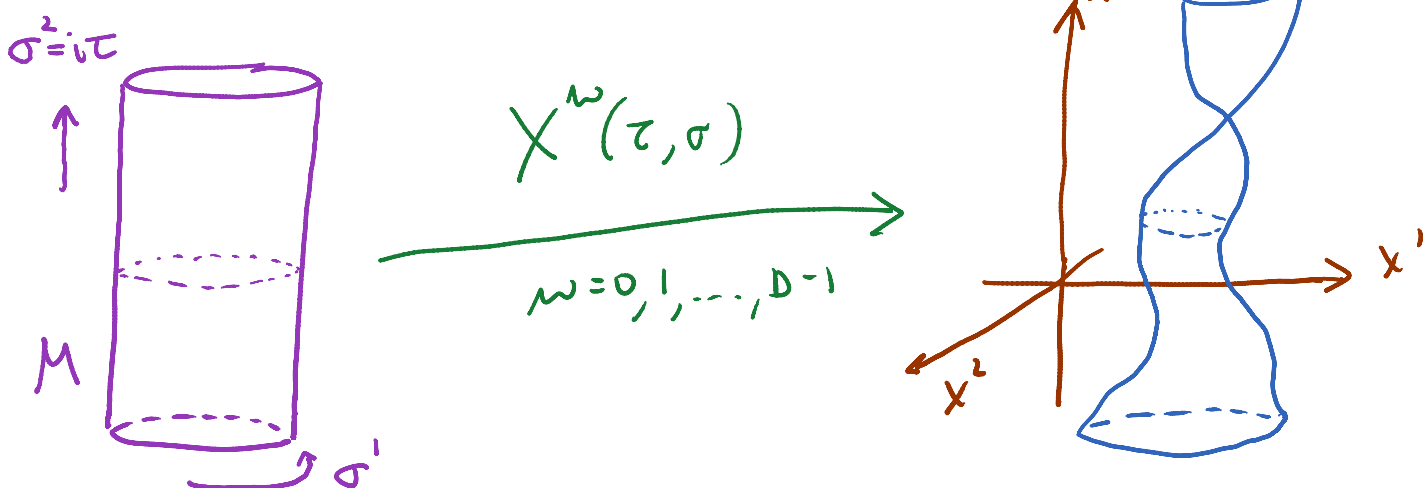
(posible) frontera
de hoja de mundo $\rightarrow \partial M$

$$\int ds \partial_n X^\mu \delta X_\mu$$

\uparrow
 $\equiv n^a \partial_a$
 \uparrow
vector normal
a ∂M

Llegados a este punto, el análisis es distinto dependiendo de si estamos hablando de una cuerda cerrada o abierta.

Analizemos primero la propagación libre de una cuerda cerrada. En este caso, la hoja de mundo M es un cilindro,



que elegiremos parametrizar con $-\infty < \sigma^2 < \infty$,
 $0 \leq \sigma^1 \leq 2\pi$, $\sigma^1 \simeq \sigma^1 + 2\pi$. Nuestra hoja de

mundo no tiene entonces frontera, $\partial M = \emptyset$. (Si
 acaso pensáramos en algún momento en trabajar
 en un intervalo finito de la coordenada "temporal"
 $\sigma^2 \in [\sigma_i^2, \sigma_f^2]$, de cualquier manera no habría
 contribución de los bordes $\sigma^2 = \sigma_{i,f}^2$, porque en
 el principio variacional fijamos las condiciones
 inicial y final para $X^\mu(\sigma^1, \sigma^2)$, de modo que
 $\delta X^\mu \Big|_{\sigma^2 = \sigma_{i,f}^2} = 0$.)

No tenemos entonces condiciones de frontera en
 sentido estricto, pero sí debemos tomar en cuenta
 que nuestros campos X^μ están definidos sobre un
círculo S^1 ($\sigma^1 \approx \sigma^1 + 2\pi$), y obedecen condiciones de
periodicidad

$$X^\mu(\sigma^1, \sigma^2) = X^\mu(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2) \quad (\text{cuerda cerrada}).$$

Así que, en lugar de desarrollar nuestros campos con una transformada de Fourier,

$$X^{\omega}(\tau, \sigma) \sim \int \frac{d^D p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_p^{\omega} e^{i p \cdot \sigma} + a_p^{\omega *} e^{-i p \cdot \sigma} \right) e^{-i p^0 \tau + i p^0 \sigma},$$

\uparrow $p \equiv p'$ momento espacial en la hoja de mundo $p^0 = \varepsilon_p \equiv |p'|$

tenemos una serie de Fourier: el momento p' se discretiza a la Kaluza-Klein (p. 36),

$$p' = \frac{n}{R} = n \in \mathbb{Z}, \quad \text{de tal modo que}$$

\leftarrow radio del círculo = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp' \rightarrow \frac{1}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (\text{y } \delta(p-p') \rightarrow \delta_{n,n'}),$$

y quedamos entonces con

$$X^{\omega}(\tau, \sigma) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{2|n|}} \left(a_n^{\omega} e^{-i|n|\tau + i n \sigma} + a_n^{\omega *} e^{i|n|\tau - i n \sigma} \right),$$

\uparrow $p^0 = \varepsilon_p = |p'|$

que claramente respeta la condición de periodicidad.

Como siempre, el modo con $p' = n = 0$ representa una excitación constante del campo. Pero podemos notar

que la expresión anterior no es de hecho la solución más general a la ecuación de movimiento

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu = 0 : \text{ es posible agregar además}$$

un término lineal en σ o τ . (Esto no sería posible si estuviéramos tratando con la ecuación

de Klein-Gordon con masa. El caso sin masa lo usamos p.ej. para el campo electromagnético A_μ .

En ese contexto, términos lineales en x^0 o x^i representan una intensidad de campo constante $F_{0i} = E_i$ ó $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$, posibilidad que normalmente descartamos por condiciones de frontera en $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.)

La condición de periodicidad prohíbe un término lineal en σ , pero no en τ .

Tomando en cuenta además que X^μ tiene unidades de longitud, mientras que un campo escalar φ en $1+1$ dimensiones ($\frac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_a \varphi \partial^a \varphi$) tendrá dimensión 0,

reescribamos nuestra expresión anterior por $\sqrt{2\pi\alpha'}$
 $(\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X \cdot \partial^a X)$, quedando entonces con

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu + \alpha' p^\mu \tau + \sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left(a_n^\mu e^{-in(\tau + i\sigma)} + a_n^{\mu*} e^{in(\tau - i\sigma)} \right)$$

El coeficiente del término lineal en τ merece ese nombre porque es la carga conservada asociada a la invariancia bajo traslaciones $X^\mu \rightarrow X^\mu + c^\mu$, es decir, el momento espaciotemporal. Para ver esto, recordemos que para deducir la corriente de Noether asociada a una simetría podemos razonar como sigue.

Al considerar

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma) + \underbrace{\delta X^\mu(\tau, \sigma)}_{\equiv \epsilon^\nu(\tau, \sigma) \delta_\nu^\mu},$$

tenemos $\delta S_p = 0$ si ϵ^ν es constante, porque en ese caso δX^μ es una traslación, que constituye una simetría de S_p . Cuando ϵ^ν no es constante,

$$\delta S_p = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \ 2 \partial_a X^\mu \partial^a \underbrace{\delta X_\mu}_{\epsilon_\mu(\tau, \sigma)} \neq 0$$

en general. Pero si ahora pedimos que X^M satisfaga su ecuación de movimiento, entonces tendremos $\delta S_p = 0$ bajo variaciones δX^M arbitrarias. Denotando

$$J_a^M \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_a X^M, \text{ tenemos entonces}$$

$$\delta S_p = - \int d^2\sigma J_a^M \partial^a \epsilon_M$$

$$\stackrel{\text{por ser}}{=} \int d^2\sigma \partial^a J_a^M \epsilon_M = 0 \quad \forall \epsilon_M(\tau, \sigma).$$

Devolvimos de aquí que $\partial^a J_a^M = 0$, es decir, J_a^M es la corriente de Noether asociada a translaciones a lo largo de X^M . En este caso, es de hecho obvio que $\partial^a J_a^M \propto \partial^a \partial_a X^M = 0$ como consecuencia de la ec. de movimiento, pero el mismo procedimiento es útil también en otros casos.

La carga total asociada a esta simetría es entonces

$$\int_0^{2\pi} d\sigma J_\tau^M = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^M}_{\propto p^M + \text{términos periódicos en } \sigma} = p^M. \quad \checkmark$$

Otra manera de decir lo mismo es notar que

$$\Pi_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{X}^{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu} \quad \leftarrow \partial_{\tau}$$

es la densidad de momento canónico conjugado al campo X^{μ} . Para un campo arbitrario φ , el Π correspondiente no guardaría relación con el momento espaciotemporal; pero en este caso X^{μ} es la posición en el espaciotiempo, así que Π_{μ} es directamente la densidad de momento espaciotemporal sobre la cuerda. Y el momento total que porta la cuerda es entonces, efectivamente,

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \Pi_{\mu} = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_{\tau} X_{\mu}}_{J_{\tau\mu}} = P_{\mu} \quad \checkmark$$

La expansión en modos de Fourier de la p. 151,

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left(a_n^{\mu} e^{-in\tau + in\sigma} + a_n^{\mu*} e^{in\tau - in\sigma} \right),$$

que como hemos visto es exactamente la esperada

para campos escalares no masivos en $1+1$ dim, nos servirá de punto de partida al cuantizar los campos X^μ (si cuantizamos canónicamente, tendremos entonces a \hat{X}^μ , \hat{p}^μ , \hat{a}_n^μ y $\hat{a}_n^{\mu\dagger}$ como operadores). Pero, por razones históricas y prácticas, es habitual reescribirlos en otra notación.

Recordando que la solución general a la ecuación de ondas debe poderse expresar como una suma de términos independientes que describen ondas viajeras hacia la izquierda y hacia la derecha, separaremos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \underbrace{\frac{X^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu(\tau - \sigma) + \sum_{n>0} \sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi n}} \left(a_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} + \text{c.c.} \right)}_{\text{Modo Derecho}}$$

$$\equiv X_D^\mu(\tau - \sigma) \equiv \tilde{X}^\mu(\sigma^-)$$

$$+ \underbrace{\frac{X^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + \sum_{n<0} \sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi(-n)}} \left(a_n^\mu e^{in(\tau + \sigma)} + \text{c.c.} \right)}_{\text{Modo Izquierdo}}$$

$$\equiv X_I^\mu(\tau + \sigma) \equiv X^\mu(\sigma^+)$$

Y a continuación definiremos

$$\alpha_0^{\mu} \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\mu}, \quad \tilde{\alpha}_0^{\mu} \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\mu},$$

y, para todo $n > 0$,

$$\alpha_n^{\mu} \equiv -i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_{-n}^{\mu}, \quad \alpha_{-n}^{\mu} \equiv i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_n^{\mu*},$$

operadores de aniquilación \uparrow

operadores de creación \uparrow

$$\tilde{\alpha}_n^{\mu} \equiv -i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_n^{\mu}, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^{\mu} \equiv i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_{-n}^{\mu*}.$$

Notar que esto implica que $(\alpha_n^{\mu})^* = \alpha_{-n}^{\mu}$ y
 $(\tilde{\alpha}_n^{\mu})^* = \tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}$.

Con esto, nuestros campos pueden ser escritos como

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = \underbrace{\frac{X^{\mu}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \tilde{\alpha}_0^{\mu} \sigma^{-} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^{\mu} e^{-in\sigma^{-}}}_{X_D^{\mu}(\sigma^{-}) = \tilde{X}^{\mu}(\sigma^{-})}$$

$$+ \underbrace{\frac{X^{\mu}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^{\mu} \sigma^{+} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{\mu} e^{-in\sigma^{+}}}_{X_I^{\mu}(\sigma^{+}) = X^{\mu}(\sigma^{+})}.$$

Podemos ver que la notación para α_0^ω y $\tilde{\alpha}_0^\omega$ se ha elegido de forma tal que

$$\partial_{\sigma^-} X^\omega(\tau, \sigma) = \partial_{\sigma^-} \tilde{X}^\omega(\sigma^-) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \tilde{\alpha}_n^\omega e^{-in\sigma^-},$$

↙ incluye n=0

$$\partial_{\sigma^+} X^\omega(\tau, \sigma) = \partial_{\sigma^+} X^\omega(\sigma^+) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\omega e^{-in\sigma^+}.$$

La interpretación física de los coeficientes en esta expansión es clara (y era clara ya antes del cambio de notación):

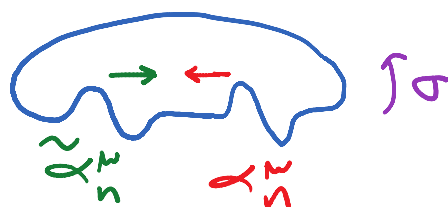
$$X^\omega(\tau, \sigma) = \underbrace{X^\omega + \alpha' p^\omega \tau}_{\substack{\text{posición del} \\ \text{centro de masa} \\ \text{(en } \tau=0)}} + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\underbrace{\alpha_n^\omega e^{-in(\tau+\sigma)}}_{\substack{\text{ondas hacia} \\ \text{la "izquierda"}}} + \underbrace{\tilde{\alpha}_n^\omega e^{-in(\tau-\sigma)}}_{\substack{\text{ondas hacia} \\ \text{la "derecha"}}} \right)$$

Grados de libertad de partícula

$$(X^\omega(\tau), \dot{X}^\omega(\tau) = 0)$$




Osciladores: ondas sobre la cuerda



Al cuantizar canónicamente, tendremos operadores $\hat{X}^\mu, \hat{p}^\mu, \hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$, asociados a un espacio de estados que pueda construirse actuando sobre

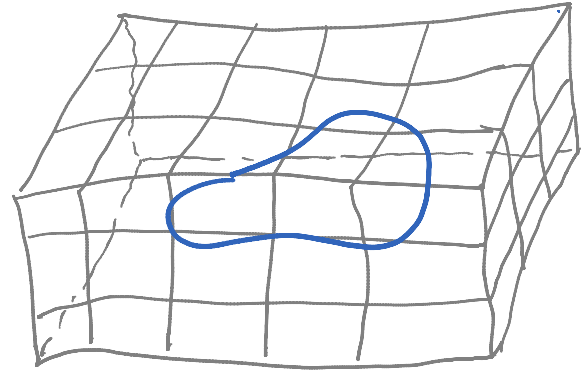
estado base $|0, 0; p\rangle$ en los operadores de creación
 estado base \uparrow estado base
 para α 's para $\tilde{\alpha}$'s
 $\hat{\alpha}_{-n}^\mu (\propto \hat{a}_{-n}^{\mu\dagger})$ y $\hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu (\propto \hat{a}_n^{\mu\dagger})$.
 $\leftarrow n > 0 \rightarrow$ $\leftarrow n > 0 \rightarrow$

Desde la perspectiva de la hoja de mundo (donde estamos haciendo 2da. cuantización de los campos X^μ), esto nos daría estados con distinto número de partículas; pero desde el punto de vista del espaciotiempo (donde estamos haciendo 1a. cuantización de la trayectoria X^μ de la cuerda), todos los estados representan a una sola cuerda cerrada, con mayor o menor grado de excitación. 

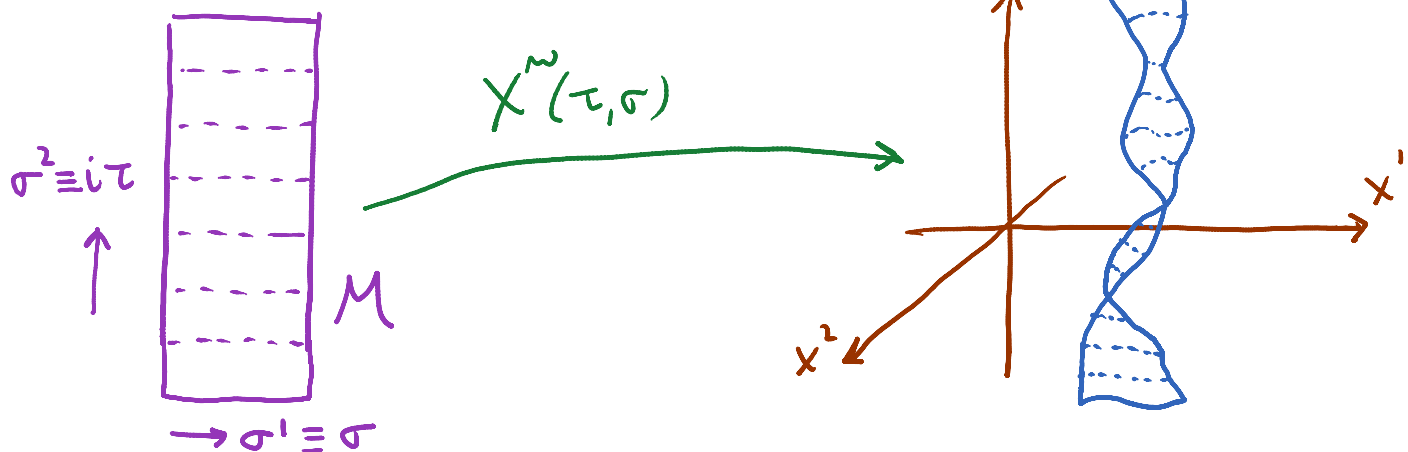
Como hemos dicho, esta cuerda representa a su vez la excitación más pequeña posible del campo de cuerdas cerrado. Para obtener el espectro físico de estados de

vibración de la cuerda (y por tanto, del campo de cuerdas), tendríamos todavía que imponer a nivel cuántico las restricciones $\dot{X} \cdot X' = 0$, $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$.

Veremos eventualmente que en el caso de la cuerda cerrada, uno de los estados físicos es un gravitón, con lo cual quedará claro que el campo de cuerdas cerradas es la generalización cuerdara del propio espaciotiempo.



Analizemos ahora el caso de la cuerda abierta. En este caso, la hoja de mundo M para propagación libre es una tira (un rectángulo),



de modo que ahora sí tiene una frontera ($\partial M \neq \emptyset$), que está dada por las líneas de mundo de los 2 extremos de la cuerda.

Elegiremos trabajar en $0 \leq \sigma' \leq \pi$, $-\infty < \sigma^2 < \infty$, de tal modo que la frontera esté en $\sigma' = 0, \pi$. El término de frontera en δS_p que obtuvimos en la p. 147,

$$\int_M d^2\sigma \partial^{\hat{a}} (\partial_{\hat{a}} X^{\mu} \delta X_{\mu}) = \int_{\partial M} ds \partial_n X^{\mu} \delta X_{\mu}$$

$\uparrow \equiv n^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}}, \text{ con } n^{\hat{a}} \perp \partial M,$

usa $ds \equiv d\tau$ y $\partial_n \equiv \partial_{\sigma}$, y se reescribe entonces como

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} (\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}.$$

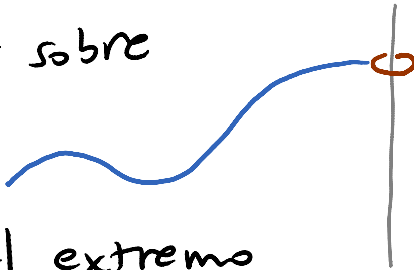
Para que esta contribución de borde a δS_p se anule, debemos imponer entonces condiciones de frontera tales que

$$\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi.$$

La única opción covariante bajo Poincaré es pedir

$$\left. \partial_\sigma X^\mu \right|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \forall \tau \quad \left(\left. \partial_n X^\mu \right|_{\sigma=M} = 0 \right) \quad \forall \mu,$$

es decir, condiciones de Neumann, o de extremo libre. Físicamente, estas condiciones significan que no hay momento espaciotemporal p^μ fluyendo por los extremos de la cuerda, de modo que p^μ se conserva, lo cual va de la mano de la invariancia bajo traslaciones. (Al estudiar en la licenciatura las ondas sobre una cuerda, la condición de Neumann se nos presenta como asociada a que el extremo de la cuerda está atado a un anillo que se desliza sin fricción sobre una varilla.)



The diagram shows a blue wavy line representing a string. At its right end, there is a small blue ring. This ring is positioned on a vertical grey line representing a rod. The string is attached to the ring, and the ring is shown to be able to slide along the rod without friction.

Otra segunda posibilidad es pedir que

$$\left. X^\mu \right|_{\sigma=0, \pi} = c^\mu \quad \forall \tau \quad \left(\left. X^\mu \right|_{\sigma=M} = c^\mu \right),$$

↪ cte.