martes, 19 de febrero de 2013
02:10 p.m.

$$S_{\text{partícula}} = -\,\text{masa} \times \begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{propia}\end{pmatrix},$$

energía en reposo

así que la generalización obvia para una cuerda relativista es

$$S_{\text{cuerda}} = -\,\text{tensión} \times \begin{pmatrix}\text{Área}\\ \text{propia}\end{pmatrix},$$

$\equiv$ energía por unidad de longitud para cuerda en reposo

es decir, la acción de (Dirac-) Nambu-Goto

$$\boxed{S_{NG}[X] = -T\int d\tau\, d\sigma\, \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)}}$$

$a,b=0,1$; $\sigma^0 \equiv \tau$, $\sigma^1 \equiv \sigma$

métrica en el espaciotiempo

$$\underbrace{\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)}_{\equiv h_{ab}(\tau,\sigma)}$$

Métrica inducida en la hoja de mundo (retracción de la del espaciotiempo)

$$T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

"pendiente de Regge"

define (con $\hbar = c = 1$)

$\ell_c \equiv \sqrt{\alpha'}$ longitud de cuerdas

$m_c \equiv \ell_c^{-1}$ escala de cuerdas

Notar que

$$-\det h_{ab} = -\det \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}\cdot X' \\ X'\cdot\dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} = (\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2 ,$$

donde $\dot{} \equiv \partial_\tau \equiv \partial_0$, $' \equiv \partial_\sigma \equiv \partial_1$ y el producto punto involucra a la métrica en el espaciotiempo,

p.ej., $X'\cdot\dot{X} = X'^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu}(X)$.

Elegiremos trabajar con coordenadas adimensionales en la hoja de mundo: $[\tau]=[\sigma]=M^0$ (en lugar de M^{-1}).

La acción de Nambu-Goto es invariante bajo:

i) Reparametrizaciones en el espaciotiempo

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu(x) \quad , \quad g_{\mu\nu}(x) \to \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\lambda\rho}(x)$$

(lo cual implica

$$X^\mu(\tau,\sigma) \to \bar{X}^\mu(\tau,\sigma) = \bar{x}^\mu(X(\tau,\sigma)) ,$$

$$\partial_a X^\mu(\tau,\sigma) \longrightarrow \partial_a \bar{X}^\mu(\tau,\sigma) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\partial_a X^\nu(\tau,\sigma)).$$

En particular, en un espaciotiempo plano,

martes, 19 de febrero de 2013
02:21 p.m.

$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, S_{NG} es invariante bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + translaciones)

$$X^{\mu}(\sigma) \to \bar{X}^{\mu}(\sigma) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}(\sigma) + C^{\mu}$$

quiero decir $\sigma^a \equiv (\tau, \sigma)$

(bajo las cuales $\eta_{\mu\nu}$ no cambia).

ii) Reparametrizaciones en la hoja de mundo

$$\sigma^a \to \bar{\sigma}^a(\sigma) \ , \quad X^{\mu}(\sigma) \to \bar{X}^{\mu}(\bar{\sigma}) = X^{\mu}(\sigma)$$

τ, σ

X^{μ} son campos escalares

Estas últimas son 2 simetrías "locales" o "de norma" en la hoja de mundo, que se manifiestan a través de 2 constricciones ("de primera clase")

$$\Pi_{\mu} \Pi^{\mu} + T^2 X'_{\mu} X'^{\mu} = 0 \ , \quad \Pi_{\mu} X'^{\mu} = 0 \ ,$$

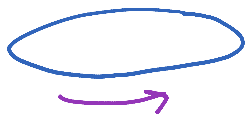
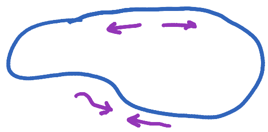
donde $\Pi_{\mu}(\sigma) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^{\mu}(\sigma)} = T \dfrac{X'^2 \dot{X}_{\mu} - \dot{X} \cdot X' X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$

es el momento canónico conjugado a $X^{\mu}(\sigma)$.

(Análogamente, para la partícula tenemos

1 simetría local, $\tau \to \tau'(\tau)$, asociada a
1 constricción $p^2+m^2=0$.)

Esto expresa la redundancia existente en nuestra descripción covariante: tenemos D variables $X^\mu(\sigma)$, pero solo $\boxed{D-2 \text{ grados de libertad físicos}}$. Tal como en el caso de la partícula, $X^0(\sigma)$ NO es un grado de libertad verdadero, pero aquí tampoco lo es la dirección longitudinal sobre la cuerda, $\frac{X'_\mu(\sigma)}{\sqrt{X'^2(\sigma)}} X^\mu(\sigma)$, es decir, aquella a lo largo del cuerpo de la cuerda.

P.ej., la rotación rígida , o la compresión/expansión con forma constante  NO son movimientos físicos, puesto que nuestra cuerda pretende ser fundamental/elemental: a diferencia de un mecate, NO está hecha de partículas a las cuales les pudiéramos seguir la pista individualmente.

Cada pequeño trozo de la cuerda es igual a todos los demás, y está caracterizado únicamente por su tensión = energía/longitud. (Notar que, mientras que para una cuerda no relativista la tensión = fuerza y la densidad de masa μ = masa/longitud son 2 conceptos independientes, y la velocidad de propagación de las ondas es $v=\sqrt{T/\mu}$, en el caso de una cuerda relativista $\mu = T$, y por tanto, $v=1$.)

Otra manifestación de la invariancia bajo difeos en la hoja de mundo es el hecho de que la densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} \equiv \Pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}$$

$$= -T\frac{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}} - \left(-T\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}\right) = 0,$$

y más en general, el tensor de energía-momento en la hoja de mundo ($\equiv$ corriente de Noether asociada a la invariancia bajo translaciones $\sigma^a \to \sigma^a + \delta\sigma^a$; recordar que a estas alturas no hay métrica g_{ab}) se anula:

lunes, 25 de febrero de 2013
07:13 p.m.

$$T^a{}_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a X)} \cdot \partial_b X - \mathcal{L}\,\delta^a_b$$

$$T^0{}_0 = \Pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{H} = 0 \,,$$

$$T^0{}_1 = \Pi_\mu X'^\mu = 0 \,,$$

$$T^1{}_0 = -T\,\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}\,\dot{X}^\mu = 0 \,,$$

$$T^1{}_1 = -T\,\frac{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} - \left(-T\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}\right) = 0 \,.$$

$S_{NG}[X]$ es no polinomial; pero podemos quitarle la raíz de manera análoga al caso de la partícula: nos inventamos como variable auxiliar a la métrica intrínseca en la hoja de mundo $g_{ab}(\tau,\sigma)$, y reescribimos la acción en la forma

$\uparrow$ 2x2, simétrica

lunes, 25 de febrero de 2013
07:23 p.m.

$$\boxed{S_p[X, g_{ab}] = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)}$$

Acción de Polyakov (Brink-Di Vecchia-Howe – Deser-Zumino)

Bajo $g^{ab} \to g^{ab} + \delta g^{ab}$ se tiene $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab}\delta g^{ab}$, de modo que la ecuación de movimiento de la métrica g^{ab} es

no confundir con g_{ab}

$$-\frac{2}{T}\frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}} = \sqrt{-g}\, \underbrace{\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}}_{h_{ab} \text{ métrica inducida}}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab}\, g^{cd}\underbrace{\partial_c X^\lambda \partial_d X^\rho g_{\lambda\rho}}_{h_{cd}}$$

$$= \sqrt{-g}\left(h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}\, g^{cd} h_{cd}\right) = 0 .$$

Esto no determina g_{ab} por completo; pero sí implica que

$$\equiv \sigma^a = (\tau,\sigma)$$

función arbitraria

$$g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma)\, h_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma)\, \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) :$$

$$h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}\, g^{cd} h_{cd} = h_{ab} - \frac{1}{2}\cancel{\lambda} h_{ab} \cancel{\lambda^{-1}} \underbrace{h^{cd} h_{cd}}_{\delta^c_c = 2} = 0 .$$

es decir, la métrica intrínseca y la inducida están relacionadas por un reescalamiento local ($\equiv$ transformación 'de Weyl' o 'conforme' – ver más adelante).

Y podemos verificar que

$$S_P[X, g_{ab} = \lambda h_{ab}] =$$

$$-\frac{T}{2}\int d^2\sigma \underbrace{\sqrt{\underbrace{-\det(\lambda h_{ab})}_{\lambda^2 \det h_{ab}}}}_{\lambda\sqrt{-\det h_{ab}}} \underbrace{(\lambda^{-1} h^{ab})\, h_{ab}}_{\delta^a_a = 2}$$

$$= -T\int d^2\sigma \sqrt{-h} = S_{NG}[X] .$$ ✓

Ahora que ya tenemos una métrica intrínseca en la hoja de mundo, la definición estándar del tensor de energía-momento correspondiente (con una convención útil para la constante de normalización) es

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}}$$

contracción con $g_{\mu\nu}$

$$= -\frac{1}{\underset{\ell_c^2 \rightarrow}{\alpha'}}\left(\partial_a X\cdot\partial_b X - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X\cdot\partial_d X\right)$$

(lo cual coincide con la definición como corriente de Noether asociada a translaciones $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \delta\sigma^a$), así que la ecuación de movimiento para g_{ab}, que debemos imponer para garantizar que $S_p = S_{NG}$, dice simplemente que

$$T_{ab} = 0 \quad ,$$

lo cual justo coincide con lo que encontramos (como <u>identidad</u>) a partir de la acción de Nambu-Goto.

lunes, 25 de febrero de 2013
08:16 p.m.

S_p tiene las mismas simetrías que S_{NG}, y una adicional:

1) Reparametrizaciones en el espaciotiempo (y en particular, el grupo de Poincaré cuando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$).

2) Reparametrizaciones en la hoja de mundo (con $\bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial\sigma^c}{\partial\bar{\sigma}^a}\frac{\partial\sigma^d}{\partial\bar{\sigma}^b} g_{cd}(\sigma)$).

3) Transformaciones de Weyl (= conformes, para relativistas)

$$\sigma^a \longrightarrow \bar{\sigma}^a = \sigma^a, \quad X^\mu(\sigma) \to \bar{X}^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma),$$

$$g_{ab}(\sigma) \longrightarrow \bar{g}_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma)\, g_{ab}(\sigma)$$

↑ función arbitraria

$$\left(\Rightarrow \bar{g}^{ab} = \Omega^{-1} g^{ab}, \quad \det \bar{g}_{ab} = \Omega^2 \det g_{ab},\right.$$

$$\left.\sqrt{-g}\, g^{ab} \longrightarrow \sqrt{-\bar{g}}\, \bar{g}^{ab} = \cancel{\Omega}\sqrt{-g}\, \cancel{\Omega^{-1}} g^{ab} = \sqrt{-g}\, g^{ab}\right).$$

Esta nueva simetría local es una propiedad especial de S_p en 2 dimensiones, y su existencia explica

lunes, 25 de febrero de 2013
08:27 p.m.

por qué la ecuación de movimiento de g_{ab} solo determinó a g_{ab} módulo un factor arbitrario $\lambda(\sigma)$.

Las simetrías locales nuevamente están asociadas a sendas constricciones hamiltonianas ("de primera clase" = conmutan bajo paréntesis de Poisson).

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^\mu} = -T\sqrt{-g}\, g^{0a}\partial_a X_\mu$$

implica, a través de la ecuación de movimiento $T_{ab}=0$, las constricciones que teníamos (como identidades) a partir de S_{NG}:

$$\Pi^2 + T^2 X'^2$$

$$= T^2\Big(\underbrace{\underbrace{-g}_{-\lambda^2 h}\,\underbrace{g^{0a}\underbrace{\partial_a X\cdot\partial_b X}_{h_{ab}}}_{\lambda^{-1}\delta^0_b}\,\underbrace{g^{0b}}_{\lambda^{-1}h^{0b}}}_{-h\,h^{00} = -h_{11}} + \underbrace{\partial_1 X\cdot\partial_1 X}_{h_{11}}\Big)$$

$$\leftarrow h^{ab} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{01} \\ -h_{10} & h_{00}\end{pmatrix}$$

$$= 0,$$

martes, 26 de febrero de 2013
05:00 a.m.

$$\Pi_\mu X'^\mu = \underbrace{\sqrt{-g}}_{\lambda\sqrt{-h}}\,\underbrace{g^{0a}}_{\lambda^{-1}h^{0a}}\,\underbrace{\partial_a X\cdot\partial_1 X}_{h_{a1}} = \sqrt{-h}\,\delta^0_1 = 0\,,$$

es decir,

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi^2 + T^2 X'^2 &= 0\\ \Pi_\mu X'^\mu &= 0\end{aligned}}\,.$$

Y adicionalmente, para los momentos conjugados a las 3 nuevas variables g_{ab} tenemos directamente

$$\Pi_{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{g}^{ab}} = 0\,.$$

Podemos notar que esto da el conteo correcto de grados de libertad físicos:

$$\underset{\text{variables}}{(D+3)} - \underset{\text{constricciones}}{(2+3)} = \underset{\text{grados de libertad}}{D-2}\ ✓\,.$$

en espacio configuración

cada constricción "de primera clase" cuenta doble en el espacio fase

Podemos notar que, desde el punto de vista de la hoja de mundo,

$$S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab}\, \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

es una teoría de normas con D campos escalares (con término cinético no trivial si $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$) en 1+1 dimensiones, acoplados a una métrica no dinámica. $g_{ab}(\sigma)$ es un campo no dinámico porque aparece sin derivadas en S_p, y entendemos que esto se debe a que cumple exclusivamente la función de campo auxiliar.

Pensaríamos entonces que el contacto deseado con la acción natural de la cuerda relativista, S_{NG}, se perdería si agregamos un término cinético para g_{ab}, es decir, la acción de Einstein-Hilbert

$$S_E[g_{ab}] = C\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, R$$

cte. de normalización

escalar de curvatura en 1+1 dim

martes, 26 de febrero de 2013
05:14 a.m.

(que, por otra parte, respeta correctamente la invariancia bajo difeomorfismos y Weyl).

Dado que

$$\frac{\delta S_E}{\delta g^{ab}} = c\sqrt{-g}\,\underbrace{\left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R\right)}_{\text{tensor de Einstein}} ,$$

si tomamos como acción a $S_p + S_E$ la ecuación de movimiento para g_{ab} será la ec. de Einstein,

$$\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R}_{\text{de } \delta S_E} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{T_{ab}}_{\text{de } \delta S_p} ,$$

lo cual luce muy distinto a $T_{ab} = 0$ $(\Rightarrow g_{ab} = \lambda h_{ab})$, que nos permitía recuperar S_{NG}.

Pero, curiosamente, en 1+1 dimensiones se tiene

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0 \quad \text{idénticamente},$$

porque las simetrías del tensor de Riemann determinan de manera única

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}\left(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}\right)R\,.$$

En este caso se tiene entonces $\delta S_E/\delta g^{ab} = 0$ para cualquier g_{ab}, es decir, la acción

$S_E = c\int d^2\sigma \sqrt{-g}\,R$ es de hecho independiente de la métrica, y depende solo de la topología de la hoja de mundo. (Como veremos más adelante, este es el contenido del teorema de Gauss-Bonnet.)

En resumen, podemos agregar S_E sin poner en riesgo el contacto entre S_P y S_{NG}. Más adelante en el curso entenderemos la utilidad de S_E.

De ahora en adelante (hasta nuevo aviso), tomaremos por simplicidad $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Para cuantizar a la cuerda, de una manera u otra conviene fijar una norma. Justo como en el caso de la partícula, podemos hacerlo de manera covariante

bajo Poincaré imponiendo condiciones sobre $g_{ab}(\sigma)$.
Ésta tiene 3 componentes independientes, que podemos especificar por completo utilizando nuestras 3 invariancias locales (2 difeos + 1 Weyl).

Elegiremos trabajar en la norma plana

$$g_{ab}(\sigma) = \begin{cases} \eta_{ab} & \text{en signatura lorentziana} \\ \delta_{ab} & \text{en signatura euclideana} \end{cases}.$$

Para ser más precisos: dada cualquier $\bar{g}_{ab}(\sigma)$, siempre es posible transformar a η_{ab} ó δ_{ab} localmente (en un parche de coordenadas a la vez). Globalmente habrá en general restricciones ("módulos" análogos al "tiempo" propio T en el caso de la partícula); pero eso solo será importante más adelante.

Será conveniente para nosotros hacer además una rotación de Wick en la hoja de mundo, renombrando

$$\tau \equiv \sigma^0 = -i\sigma^2,$$

de modo que $g_{ab} = \underbrace{\eta_{ab}}_{a,b=0,1} \longrightarrow \underbrace{\delta_{ab}}_{a,b=1,2}$. Al hacer esto, es habitual definir la acción euclideana con el signo invertido con respecto a la lorentziana, de forma que $\exp\left(i\int d\sigma^0 d\sigma^1 \mathcal{L}_{Lor.}\right) = \exp\left(-\int d\sigma^1 d\sigma^2 \mathcal{L}_{Eucl.}\right)$.

Nuestro sistema es entonces

$$\boxed{S_p[X] = + \underbrace{\frac{1}{4\pi\alpha'}}_{T/2} \int d^2\sigma\, \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu \eta_{\mu\nu}},$$

suma implícita (contraído con δ^{ab})

que describe simplemente a D campos escalares <u>libres</u> (Klein-Gordon) no masivos en 1+1 dimensiones!

Pero no puede ser esta la historia completa, porque tenemos aquí todavía D variables.

El punto es que, antes de fijar $g_{ab} = \delta_{ab}$, la acción $S_p[X,g]$ contenía la información sobre la ecuación de g_{ab}, $T_{ab}=0$, que como vimos, resulta clave para reproducir S_{NG}. Al fijar g_{ab} perderíamos

martes, 26 de febrero de 2013
09:16 a.m.

esta información, así que para recuperar la física correcta debemos imponerla <u>a mano</u> (ver p. 129),

$$\boxed{\begin{aligned} T_{22} &= \mathcal{H} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\partial_2 X\cdot\partial_2 X - \frac{1}{2}\partial_1 X\cdot\partial_1 X\right) = 0\,, \\ T_{11} &= \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\partial_1 X\cdot\partial_1 X - \frac{1}{2}\partial_2 X\cdot\partial_2 X\right) = 0\,, \\ T_{12} &= \frac{1}{\alpha'}\,\partial_1 X\cdot\partial_2 X = 0\,. \end{aligned}}$$

Sabemos que estas condiciones equivalen a decir que $h_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma)\, g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma)\,\delta_{ab}$, es decir, que la métrica inducida es conformalmente plana (plana salvo Weyl). Y de hecho, si en S_{NG} elegimos σ^1, σ^2 tales que $h_{12} = \dot{X}\cdot X' = 0$ y

$\dot{} \equiv \partial_2$ aquí

$$h_{11} = X'^2 = \lambda = \dot{X}^2 = h_{22}\,,$$ obtenemos

$$S_{NG}[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma \sqrt{\underbrace{\dot{X}^2 X'^2}_{\dot{X}^2 = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2)} - \cancel{(\dot{X}\cdot X')^2}^{\,0}} = S_P[X]\,.$$

martes, 26 de febrero de 2013
09:19 a.m.

Podemos notar que las 3 ecuaciones de movimiento $T_{ab}=0$ en realidad nos dan solo 2 constricciones independientes, puesto que $T_{11}+T_{22}=\delta^{ab}T_{ab}=0$, o en versión lorentziana, $T_{11}-T_{00}=\eta^{ab}T_{ab}=0$.

El hecho de que la traza de T_{ab} sea en automático cero es consecuencia directa de la invariancia de Weyl: bajo $g_{ab}\to g_{ab}+\delta g_{ab}$ se tiene

$$\delta S_p \propto \int d^2\sigma \sqrt{-g}\,\underbrace{\delta g^{ab}}_{\omega(\sigma)g^{ab}}\, T_{ab}$$

, y para una transformación de Weyl $(g^{ab}\to(1+\omega(\sigma))g^{ab})$, así que $\delta S_p=0$ para cualquier $\omega(\sigma)$ implica que $\boxed{g^{ab}T_{ab}=0}$.

Esto es importante porque nos da el conteo correcto: D variables − 2 constricciones = D−2 grados de libertad. ✓

Las 2 constricciones expresan el hecho de que, aún después de haber fijado $g_{ab}=\delta_{ab}$, tenemos todavía un lenguaje redundante, que se manifiesta también en la existencia de 2 simetrías locales remanentes.

martes, 26 de febrero de 2013
11:32 a.m.

Es decir, hemos fijado la norma (eliminando la redundancia) casi por completo; pero (localmente) existen unas cuantas transformaciones en el grupo Dif x Weyl que NO cambian la métrica $g_{ab}=\delta_{ab}$, y por tanto siguen vivas.

Para entender esto, conviene usar las coordenadas del cono de luz en la hoja de mundo

$$\left.\begin{aligned} \sigma^+ &\equiv \tau+\sigma = -i\sigma^2+\sigma^1 \\ \sigma^- &\equiv \tau-\sigma = -i\sigma^2-\sigma^1 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \tau &= \tfrac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-) \\ \sigma &= \tfrac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-) \end{aligned}\right.$$

de modo que la métrica plana $g=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ se reescribe en la forma $\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}$:

$$g_{++} = \underbrace{\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau}=-1} + \underbrace{\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma}=+1} = 0,$$

$$g_{--} = \underbrace{\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau}=-1} + \underbrace{\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}}_{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma}=+1} = 0,$$