$\int \mathcal{D}_g g_{\tau\tau} \mathcal{D}_g X^\mu$ incluye cada trayectoria física de la partícula un número infinito de veces. Concretamente,

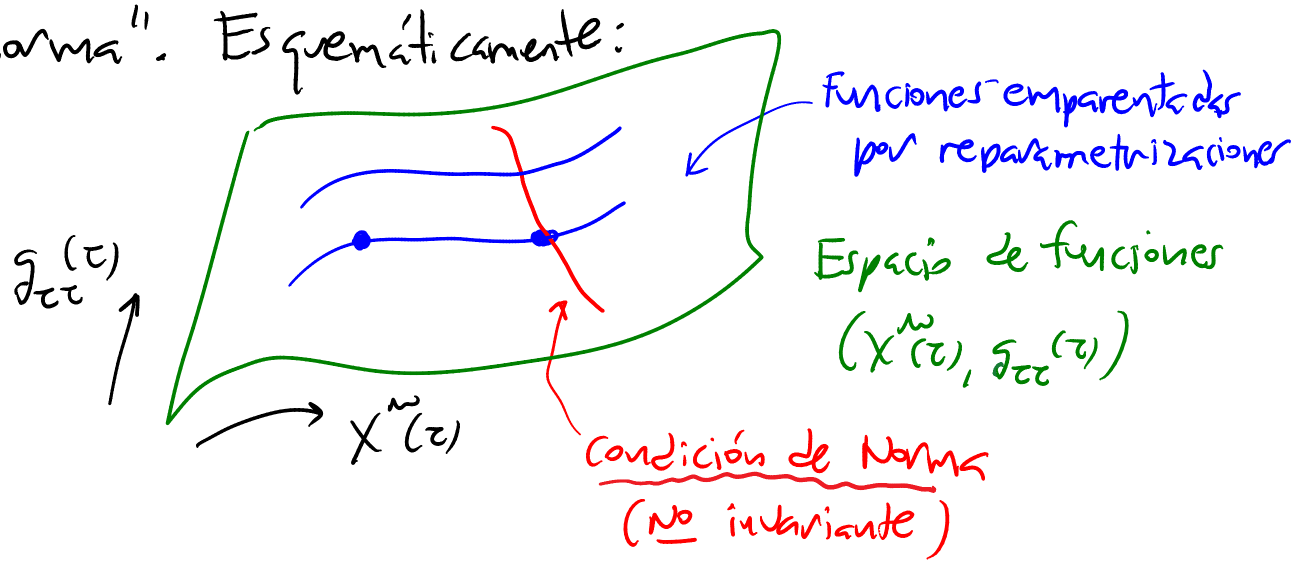
$$(X^\mu(\tau), g_{\tau\tau}(\tau)) \quad y \quad (X'^\mu(\tau), g'_{\tau\tau}(\tau))$$

describen la misma trayectoria física si existe una función $\tau'(\tau)$ tal que $X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau)$ y $g'_{\tau\tau}(\tau') = \left(\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\right)^2 g_{\tau\tau}(\tau)$.

No debemos entonces integrar libremente sobre todas las funciones $X^\mu(\tau)$ y $g_{\tau\tau}(\tau)$, sino definir

$$G_2(x', x) = \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X(1)=x'^\mu} \frac{\mathcal{D}_g g_{\tau\tau} \mathcal{D}_g X^\mu}{\text{Reparametrizaciones}} \, e^{i\bar{S}[X,g]}$$

Es decir, necesitamos eliminar la redundancia, "fijar la norma". Esquemáticamente:



Lo interesante es que, ahora que además del parámetro τ

nos hemos inventado la variable auxiliar $g_{\tau\tau}(\tau)$, podemos fijar la norma (= especificar τ) de manera covariante bajo Lorentz, imponiendo una condición no sobre una de las $X^\mu(\tau)$, sino sobre $g_{\tau\tau}(\tau)$. Eliminamos la redundancia por completo si pedimos p.ej. que $g_{\tau\tau}(\tau) = \text{cte.}$: dada cualquier métrica en 1 dim, existe una y solo una reparametrización de $\tau \in [0,1]$ que la hace independiente de τ.

Notar sin embargo que

"tiempo" propio total

$$\int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \equiv T$$ es invariante bajo reparametrizaciones

en τ, así que no podemos elegir libremente el valor constante de la métrica : debemos poner $g_{\tau\tau}(\tau) = -T^2$, y, para incluir todas las trayectorias físicas distintas, integrar sobre todos los valores posibles de T.

Es decir,

$$\int \frac{\mathcal{D}_g g_{\tau\tau} \mathcal{D}_g X^\mu}{\text{Reparametrizaciones}} = \int_0^\infty dT \underbrace{\mu(T)}_{\text{función por determinar}} \int \mathcal{D}_T X^\mu .$$

(Notar que, de hecho, podríamos reparametrizar $\tau \to \tau'(\tau) = T\tau$ para lograr que $g'_{\tau\tau}(\tau') = -1$; pero entonces tendríamos $\tau' \in [0, T]$, y haría falta por tanto sumar de cualquier manera sobre todos los posibles valores de T.)

Es muy buena noticia que al final no resulta necesario hacer la integral $\int \mathcal{D} g_{\tau\tau}$, porque no era gaussiana. La deducción de $\mu(T)$ es sutil, e involucra el procedimiento para fijar la norma dentro de la integral funcional, conocido como método de Faddeev-Popov (que veremos más adelante, en el contexto de la cuerda), pero al final arroja el sencillo resultado $\mu(T) = 1$.

Así que nuestras 2 invenciones, τ ($\leftrightarrow$ difeos) y $g_{\tau\tau}(\tau)$, se cancelan casi por completo una a la otra, y al final tenemos

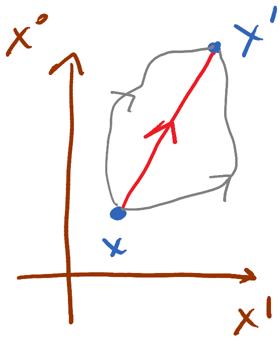
$$G_2(x', x) = \int_0^\infty dT \int_{X(0)=x}^{X(1)=x'} \mathcal{D}_T X^\mu \exp\left[i \frac{m}{2} \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{X}^2}{T} - T \right) \right],$$

es decir, una integral funcional puramente gaussiana.

La ec. de mov. que se deduce del lagrangiano $L = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot X^2}{T} - T\right)$ es $\ddot X^\mu = 0$, cuyas soluciones son líneas rectas en el espaciotiempo, justo como esperamos clásicamente para una partícula libre.

Podemos extraer de la integral funcional $\int \mathcal{D}_T X^\mu$ la dependencia de x^μ y x'^μ haciendo un cambio de variable (función) de integración $X^\mu(\tau) \to Y^\mu(\tau)$, con

$$X^\mu(\tau) \equiv \underbrace{x^\mu + (x'^\mu - x^\mu)\tau}_{\substack{\text{Solución de ec. de}\\ \text{mov. que satisface}\\ X^\mu(0)=x^\mu,\ X^\mu(1)=x'^\mu}} + \underbrace{Y^\mu(\tau)}_{\substack{\text{Función arbitraria}\\ \text{(fluctuación) tal que}\\ Y^\mu(0)=0=Y^\mu(1)}}$$



$$\Rightarrow \dot X^\mu(\tau) = (x'^\mu - x^\mu) + \dot Y^\mu(\tau)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau\, \dot X^2 = (x'-x)^2 + 2(x'-x)_\mu \underbrace{\cancelto{0}{\int_0^1 d\tau\, \partial_\tau Y^\mu}}_{\text{Se anula porque extremizamos la acción}} + \int_0^1 d\tau\, \dot Y^2 .$$

Dado que

$$\mathcal{D}_T X^\mu(\tau) \propto \lim_{N\to\infty} \int d^D X(\tau_1) \cdots d^D X(\tau_{N-1}) \,,$$

$$\mathcal{D}_T Y^\mu(\tau) \propto \lim_{N\to\infty} \int d^D Y(\tau_1) \cdots d^D Y(\tau_{N-1}) \,,$$

y en cada τ_n dado, $X^\mu(\tau_n)$ y $Y^\mu(\tau_n)$ difieren solo por una <u>constante</u>,

$$X^\mu(\tau_n) = (x'^\mu - x^\mu)\,\tau_n + Y^\mu(\tau_n) \,,$$

tenemos $\mathcal{D}_T X^\mu(\tau) = \mathcal{D}_T Y^\mu(\tau)$ (el jacobiano es 1).

Obtenemos entonces:

$$G_2(x',x) = \int_0^\infty dT\, e^{i\frac{m}{2T}(x'-x)^2 - i\frac{m}{2}T} \underbrace{\int_{Y(0)=0}^{Y(1)=0} \mathcal{D}_T Y^\mu\, e^{i\frac{m}{2T}\int_0^1 d\tau\, \dot{Y}^2}}_{\text{Nos interesa solo la dependencia de } T}$$

Como mencionamos antes, $\mathcal{D}_T X^\mu \equiv \mathcal{D}_g X^\mu$ se define usando $g_{\tau\tau} = -T^2$. La receta apropiada es insertar $\left(\sqrt{\Delta\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}}\right)^D = \left(\sqrt{T/N}\right)^D$ en cada punto de la discretización ($\Delta\tau \equiv 1/N$, $\tau_0 \equiv 0$, $\tau_n \equiv n\Delta\tau$, $\tau_N = 1$):

lunes, 18 de febrero de 2013
11:53 a.m.

$$\int \mathcal{D}_T Y^\mu e^{i\frac{m}{2T}\int_0^1 d\tau \dot{Y}^2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int d^D Y_1 \cdots d^D Y_{N-1} \left(\sqrt{\frac{T}{N}}\right)^{D(N-1)} \exp\left[i\frac{m}{2T}\sum_{n=1}^{N}\Delta\tau\left(\frac{Y_n - Y_{n-1}}{\Delta\tau}\right)^2\right]$$

$$Z_n \equiv \frac{Y_n}{\sqrt{T}}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sqrt{\frac{T}{N}}\cdot\sqrt{T}\right)^{D(N-1)} \underbrace{\int d^D Z_1 \cdots d^D Z_{N-1} \exp\left[i\frac{m}{2}\sum_{n=1}^{N}\Delta\tau\left(\frac{Z_n - Z_{n-1}}{\Delta\tau}\right)^2\right]}_{\text{independiente de } T,\ \propto \sqrt{\Delta\tau}^{D(N-1)}}$$

$$\propto \prod_{n=1}^{\infty} T^D .$$

Otra perspectiva: podemos eliminar a T de la medida de integración $\mathcal{D}_T Y^\mu \sim \sqrt{T}^D d^D Y_1 \cdots \sqrt{T}^D d^D Y_{N-1}$ definiendo $W^\mu \equiv \sqrt{T}\, Y^\mu$. Tenemos entonces

$$\int \mathcal{D}_T Y^\mu \exp\left[i\frac{m}{2T}\int_0^1 d\tau\, \partial_\tau Y\cdot\partial_\tau Y\right]$$

$$= \int \underbrace{\mathcal{D}W^\mu}_{\text{independiente de } T} \exp\left[i\frac{m}{2T^2}\int_0^1 d\tau\, \partial_\tau W\cdot\partial_\tau W\right]$$

partes

$$= \int \mathcal{D}W^\mu \exp\left[\frac{i}{2}\int_0^1 d\tau\, W\cdot \underbrace{\left(-\frac{m}{T^2}\partial_\tau^2\right)}_{\equiv \Delta_\tau} W\right].$$

El operador diferencial $\Delta_\tau \equiv -\frac{m}{T^2}\partial_\tau^2$ tiene un conjunto completo de funciones propias

$$f_n(\tau) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi\tau)$$ ← satisfacen condiciones de borde $f_n(0) = 0 = f_n(1)$,

$n = 1, 2, \ldots$

con valores propios $\lambda_n \equiv \frac{m}{T^2} n^2 \pi^2$.

Desarrollando

$$W^\mu(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\mu f_n(\tau) \,,$$ podemos reinterpretar

$$\int \mathcal{D}W^\mu(\tau) \propto \int_{-\infty}^{\infty} d^D c_1\, d^D c_2 \cdots \,,$$

quedando entonces con las integrales gaussianas

$$\int \mathcal{D}W^\mu \exp\Big[\frac{i}{2}\int_0^1 d\tau\, \underbrace{W}_{\sum_{n'} c_{n'} f_{n'}} \cdot \underbrace{\Delta_\tau W}_{\sum_n \lambda_n c_n f_n}\Big]$$, con $\int d\tau f_{n'} f_n = \delta_{n',n}$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} d^D c_1\, d^D c_2 \ldots \exp\Big[\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2\Big].$$

Recordando que $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ (válido para a imaginaria, por continuación analítica), concluimos entonces que, en general,

martes, 19 de febrero de 2013
08:06 a.m.

$$\int \mathcal{D}W^{\mu} \exp\left[\frac{i}{2}\int_0^1 d\tau\, W\cdot\Delta_\tau W\right] \propto \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^D$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots}}\right)^D \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det}\Delta_\tau}}\right)^D ,$$

determinante funcional

y en nuestro caso particular,

$$\int \mathcal{D}_T Y^{\mu}\, e^{\frac{im}{2T}\int_0^1 d\tau\, \dot{Y}^2} \propto \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{T^2}n^2\pi^2\right)^{-D/2}$$

$$\propto \prod_{n=1}^{\infty} T^D = T^{D\sum_{n=1}^{\infty} 1} ,$$

que coincide con lo que teníamos en la p.106.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ claramente diverge, y se trata de un efecto de distancias pequeñas / energías grandes, es decir, una divergencia ultravioleta (UV). Para lidiar con ella, procedemos de la manera habitual en teoría cuántica de campos:

I) Primero 'regularizamos', es decir, modificamos a mano la teoría en el UV de tal modo que el resultado

martes, 19 de febrero de 2013
08:17 a.m.

sea finito, y por tanto manejable.

II) Después renormalizamos, es decir, cambiamos a parámetros más directamente físicos, lo cual acaba teniendo como consecuencia que cancelamos las divergencias UV y podemos entonces retirar la regularización.

L4 : 19/02/13

En el caso que nos interesa, podemos por ejemplo regularizar reemplazando

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n}$$

suprime modos UV con $n \gg 1/\epsilon$

"parámetro de corte"

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{1-e^{-\epsilon}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\underbrace{\frac{1}{\cancel{1}-(\cancel{1}-\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon^2-\dots)}}_{\frac{1}{\epsilon(1-\frac{1}{2}\epsilon+\dots)} \simeq \frac{1}{\epsilon}(1+\frac{1}{2}\epsilon+\dots)} - 1 \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right)$$

"Renormalizaremos" descartando la parte divergente, para quedarnos con

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \longrightarrow -\frac{1}{2} \qquad (!!),$$

lo cual, como veremos, conduce al resultado correcto para el propagador.

Conviene mencionar que es posible extraer este mismo resultado con un truco matemático: el procedimiento de continuación analítica conocido como regularización por función zeta. Para ello, recordemos la definición de la función zeta (directa) de Riemann

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} du\, \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}$$

para $\operatorname{Re} z > 1$, que puede continuarse analíticamente a todo el plano complejo, a través de la relación

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\, \zeta(1-z).$$

martes, 19 de febrero de 2013
09:36 a.m.

El resultado es una función que es holomorfa, o analítica, en todo $z \in \mathbb{C}$, excepto en $z=1$, donde tiene un polo simple (correspondiente a $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$).

Por continuación analítica, podemos entonces definir

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} \longrightarrow \zeta(0) = -\frac{1}{2} \; ,$$

que, según lo que afirmamos antes, ¡es el resultado deseado! (Notar que esto requirió solamente un paso, que empaqueta entonces regularización y renormalización.)

La regularización por función zeta parece magia negra; pero desde los '70s y '80s es de hecho un método respetable [ver p.ej. hep-th/9308028 y refs. ahí citadas].

Usando este "resultado", podemos proceder ahora a la etapa final de nuestro cálculo:

$$G_2(x',x) = \int_0^\infty dT \; T^{-D/2} \; e^{i\frac{m}{2T}(x'-x)^2 - i\frac{m}{2}T}$$

$$\overset{t \equiv T/m}{\propto} \int_0^\infty dt \; t^{-D/2} \; e^{i\frac{(x'-x)^2}{2t} - \frac{i}{2}m^2 t}$$

Completar cuadrado y hacer D integrales gaussianas

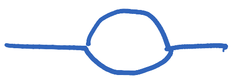
$$\propto \int_0^\infty dt \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \, e^{-\frac{i}{2}(m^2+p^2)t + ip\cdot(x'-x)}$$

Haciendo la integral sobre t, obtenemos finalmente

$$G_2(x', x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \, e^{i p\cdot(x-x')} \frac{-i}{p^2+m^2}$$

que efectivamente es el resultado correcto, p. 81 (salvo que en esta cuenta no le hemos seguido la pista a la constante de normalización).

Hasta aquí apenas hemos mostrado que cuantizando directamente a una partícula se puede reproducir el propagador de Feynman para una teoría de campos libre. Para reproducir los diagramas de Feynman de una teoría de campos interactuante, es posible agregar los vértices de interacción a mano (p.ej.,

, donde denota la propagación libre y

 $= -i\lambda$ es una interacción cúbica).

Así que, si uno se pone necio, es posible hablar de partículas cuánticas relativistas SIN usar campos [ver p.ej. Bjorken & Drell, vol. 1]. Pero el resultado es torpe (p.ej., uno batalla para asegurarse de que la descripción sea unitaria), y necesariamente perturbativo, y por tanto, incompleto.

¡Por eso usamos campos!

(Aunque, por otro lado, algunos cálculos de diagramas con lazos se procesan más eficientemente con este método de "primera cuantización", que en una versión inspirada por las técnicas de cuerdas, se conoce también como "formalismo de la línea de mundo" [ver, p.ej. Schubert, hep-th/9610108, 0703186].)

---

* Cuerdas

Para describir a objetos unidimensionales cuánticos y relativistas, existen nuevamente 2 opciones.

① Cuantizar Cuerdas ("primera cuantización")

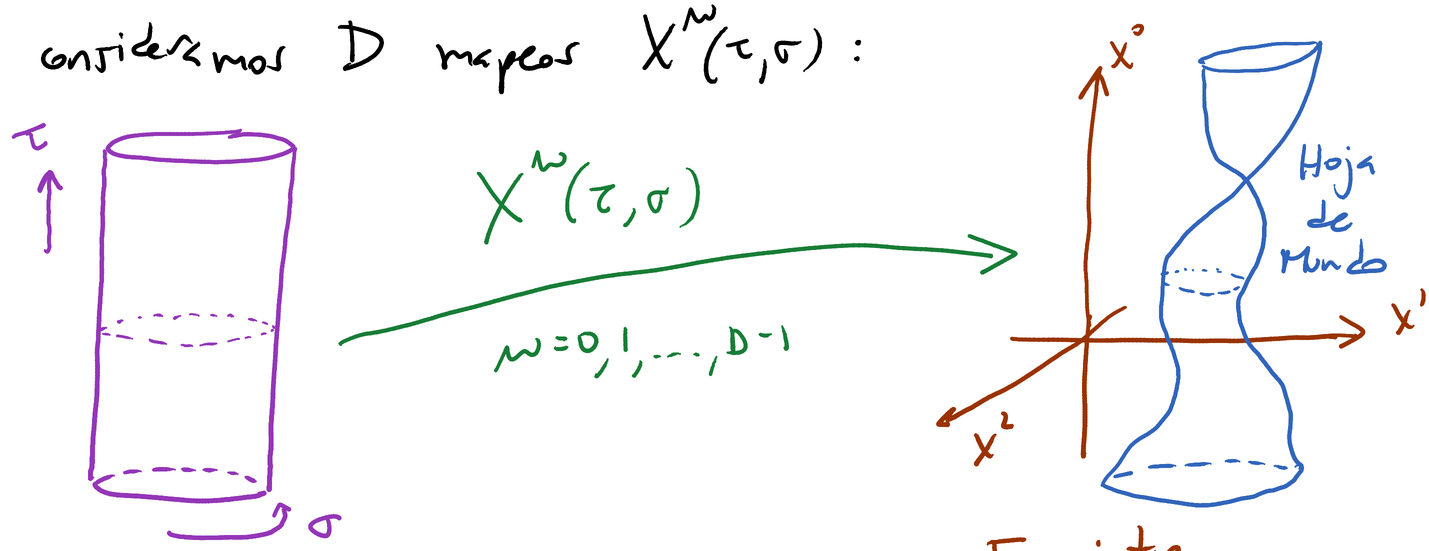
Por generalidad, podemos considerar

Cuerdas cerradas ó Cuerdas abiertas

(≡ sin extremos) ← ningún punto es especial

(≡ con extremos) ← los extremos son puntos especiales

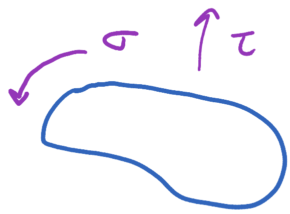
En cualquier caso, necesitamos alguna etiqueta para ubicar a los distintos puntos sobre la cuerda a un tiempo dado. Pero además nos falta incorporar la evolución temporal. Por ser la cuerda un objeto unidimensional, su trayectoria al transcurrir el tiempo traza una superficie en el espaciotiempo, que llamamos su hoja de mundo. Análogamente al caso de la partícula, para describir a la cuerda covariantemente nos inventamos 2 parámetros arbitrarios τ, σ y consideramos D mapeos $X^\mu(\tau,\sigma)$:



Espacio Ficticio 1+1 dimensional que será útil llamar hoja de mundo

Espaciotiempo D dimensional

Esencialmente, τ es una etiqueta que indica en qué instante estamos examinando a la cuerda, mientras que σ indica cuál punto de la cuerda nos interesa.



En este método, necesitamos escribir una acción para la cuerda en la hoja de mundo, $S[X]=\int d\tau d\sigma\, L$ (cuya forma explícita veremos en breve), y cuantizar, ya sea canónicamente (fijando o no la norma antes) o con la integral de trayectoria, $\int DX^\mu(\tau,\sigma)\, e^{iS[X]}$.

Podremos así hablar de la propagación libre de una cuerda, y eventualmente agregar interacciones (¿a mano?).

② <u>Cuantizar un Campo de Cuerdas</u> ("segunda cuantización")

¿Qué cosa es un campo de cuerdas? Un campo ordinario es una función que asigna un número (o varios) a cada punto en el espaciotiempo, $\varphi(x^\mu)$. Es decir, es un mapeo que come los datos que podrían describir a una <u>partícula</u> a un instante dado, $x^\mu = X^\mu(\underbrace{\tau}_{\text{fijo}})$.

martes, 19 de febrero de 2013
12:21 p.m.

Análogamente, un campo de cuerdas es un mapeo que come los datos que podrían describir a una cuerda en un instante dado, $x^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma)$. Es decir, es
τ fijo
no una función sino un funcional $\Phi[x^\mu(\sigma)]$, que mapea configuraciones de la cuerda a números.

Para perderle el miedo a este objeto, imaginemos desarrollar a las $x^\mu(\sigma)$ en un conjunto completo de funciones, como p.ej., modos de Fourier,

$$x^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sum_{n\neq 0} \tilde{x}_n^\mu e^{in\sigma} \qquad (\text{con } \tilde{x}_n^* = \tilde{x}_{-n}).$$

modo cero

Tenemos entonces $\Phi[x^\mu(\sigma)] = \Phi(x_0^\mu, \tilde{x}_n^\mu]$, y podemos pensar en descomponer

$$\Phi[x^\mu(\sigma)] = \sum_{L=1}^{\infty} \varphi_L(x_0^\mu)\, \Phi_L[\tilde{x}_n^\mu] .$$

conjunto completo de funcionales, especificado de antemano
(p.ej., $\Phi_L[\tilde{x}_n] = \tilde{x}_\ell\,,\ \tilde{x}_\ell\tilde{x}_{\ell'}\,,$ etc.)

Reconocemos así al campo de cuerdas $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ como una colección de un número infinito de campos convencionales $\varphi_i(x)$.

Para codificar la dinámica del campo de cuerdas, necesitamos una acción en el espacio de $X^\mu(\sigma)$'s. Existen varias opciones y enfoques [Witten; Zwiebach; Berkovits; Kaku, Kikkawa; Siegel; ...]

Un ejemplo es la acción de Witten (y Kato, Kugo, Ogawa, Uehara) para cuerdas abiertas,

$$S[\Phi] = \frac{1}{2}\int \Phi * Q_B \Phi + \frac{2g}{3}\int \Phi * \Phi * \Phi$$

"producto estrella" "carga BRST" noción formal de integración

[ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085].

La "segunda cuantización" de las cuerdas debiera ser un formalismo más poderoso que la "primera cuantización", pero es más complicado, y durante muchos años, lo único que se pudo hacer con él fue reproducir la expansión perturbativa conocida ya a partir de las cuerdas en "primera cuantización".

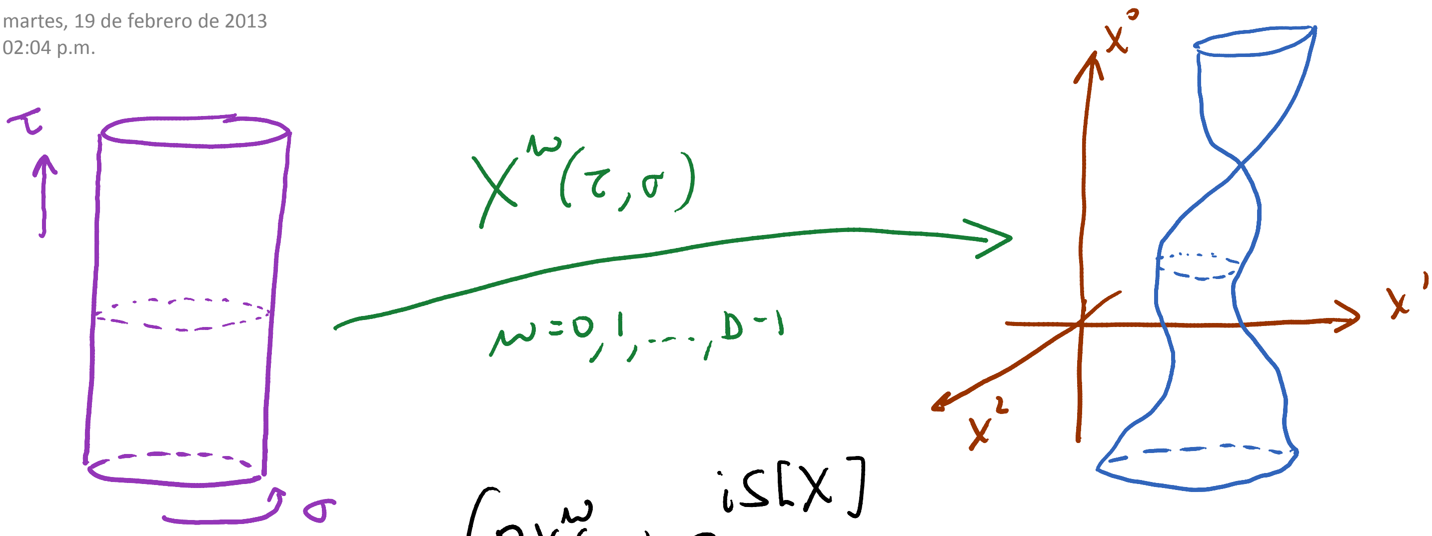
Hacia finales de los 90 hubo nuevos avances que por fin dejaron claro que la teoría del campo de cuerdas (string field theory) en verdad incluye más información, no perturbativa. Desde entonces ha seguido habiendo avances, pero el tema sigue siendo bastante complicado, y en cualquier caso NO parece ser el camino para encontrar la respuesta completa a la pregunta clave, ¿de qué están hechas las cuerdas? (Si las cuerdas no son fundamentales, tampoco debemos esperar que lo sea el campo de cuerdas.)

En lo que resta del curso trabajaremos con las cuerdas en "primera cuantización", conocida también en este contexto como el formalismo de la hoja de mundo. Como ya hemos dicho, para desarrollar la expansión perturbativa, que es nuestro objetivo central aquí, este camino arroja los mismos resultados que la teoría del campo de cuerdas, con la ventaja de ser más fácil.

Además, como iremos viendo, en cuerdas (a diferencia de partículas) la "primera cuantización" nos permite llegar bastante lejos, y en particular, las interacciones se pueden agregar de manera muy natural.

Hablaremos de la cuerda bosónica, donde $X^\mu(\tau,\sigma)$ son los únicos grados de libertad, es decir, el estado de la cuerda está completamente caracterizado por su forma/ubicación en el espaciotiempo. Para obtener física más realista necesitaremos estudiar más adelante a la supercuerda, que tiene grados de libertad adicionales. Pero para iniciar, la cuerda bosónica es un útil modelo de juguete, análogo al campo escalar real.

En todo lo sucesivo, resultará provechoso notar que el sistema que nos interesa, la cuerda encajada en un espaciotiempo D-dimensional, descrita en "primera cuantización",



$$\int \mathcal{D}X^\mu(\tau,\sigma)\, e^{iS[X]} \,,$$

puede reinterpretarse como una teoría cuántica de D campos escalares (con nombre X^μ en vez de φ_n) que viven en 1+1 dimensiones (con coordenadas que denotamos τ,σ en vez de t,x). Este sería el punto de vista natural para un observador con domicilio en la hoja de mundo, que para nosotros es un espacio puramente ficticio/auxiliar, pero de gran utilidad.

Para proceder, necesitamos conocer la acción que controla la dinámica de la cuerda. En el caso de la partícula relativista, vimos que la acción natural es