

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CUERDAS

0. Motivación: ¿Por qué cuerdas?

La teoría de cuerdas es uno de nuestros intentos más recientes por entender de qué está hecho nuestro universo.

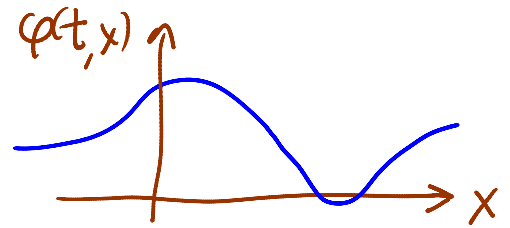
El lenguaje que hasta ahora utilizamos para responder a estas preguntas es el de la teoría cuántica de campos. Para poder contrastarlo con la teoría de cuerdas, nos conviene iniciar con un breve repaso del lenguaje de campos.

Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo: $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

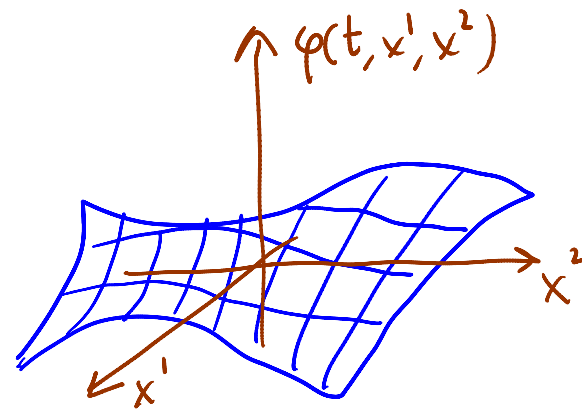
análogo a $x_n(t)$ en sistema con N partículas
 \uparrow índice discreto $n=1, \dots, N$
 \uparrow índice continuo $\in \mathbb{R}^3$

Un 'campo' en $0+1$ dimensiones $\varphi(t)$ sería exactamente análogo a un sistema de 1 partícula que se mueve en 1 dim, $y(t)$.

Un campo en $1+1$ dim $\varphi_x(t)$ es exactamente análogo a una cuerda que puede oscilar en 1 dim transversa, $y(x,t)$.



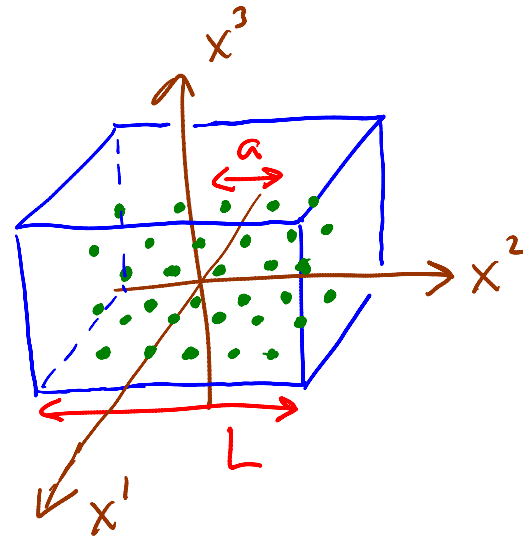
Un campo en $2+1$ dimensiones $\varphi(t, x^1, x^2)$ es exactamente análogo a la membrana de un tambor, que oscila en 1 dim transversa, $y(t, x^1, x^2)$



Un campo en $3+1$ dim $\varphi(t, \vec{x})$ es entonces análogo a 1 gelatina / jalea que llena 3 dim espaciales y oscila en 1 dim transversa, $y(t, \vec{x})$. Ejemplos sencillos serían los campos que describen a la temperatura o la presión o la densidad o la velocidad del aire en un cuarto.

A partir de la definición vemos que cualquier campo (en $d+1$ dim con $d \geq 1$) es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

Se le puede pensar como el límite $L \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$ del caso con un volumen finito L^3 en un espacio discretizado con espaciamiento a , sistema que tendría $(L/a)^3$ grados de libertad.



Podemos describir la dinámica de nuestro campo $\varphi(x) \equiv \varphi(x^\mu) \equiv \varphi(t, \vec{x})$ especificando su acción

$$S[\varphi] = \int dt \underbrace{L[\varphi(t)]}_{\text{Lagrangiano}} = \int dt \int d^3x \underbrace{\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}_{\text{Densidad Lagrangiana}}.$$

Densidad Lagrangiana

En el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, descrito por variables canónicas

$$q_n \text{ y } p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \text{ siempre que el procedimiento}$$

de cuantización canónica consiste en promover

$$q_n, p_m \rightarrow \text{Operadores } \hat{q}_n, \hat{p}_m \text{ que}$$

satisficieran las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_m] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_m] \quad \forall n, m,$$

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = i\hbar \delta_{nm} \quad (\text{trabajaremos en } \hbar = 1).$$

$$\underbrace{\hspace{10em}} \quad \delta_{nm} \text{ de Kronecker} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Operadores en el cuadro de Schrödinger,
o de Heisenberg a tiempos iguales

Nuestro ejemplo favorito es por supuesto el oscilador armónico

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2}_{\Rightarrow p_j = m \dot{x}_j} - \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x}^2, \quad \text{o, equivalentemente,}$$

$$H \equiv \sum_j p_j \dot{x}_j - L = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{x}^2,$$

donde recordamos que en las definiciones

$$a_j \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x_j + \frac{i p_j}{m\omega} \right), \quad a_j^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x_j - \frac{i p_j}{m\omega} \right),$$

se tiene

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]$$

$$\leftrightarrow [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0,$$

operadores de descenso y ascenso (bajada y subida)

$$\hat{H} = \sum_j \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}_j^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}_j^2 \right) = \sum_j \omega \left(\underbrace{\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j}_{\hat{N}_j} + \frac{1}{2} \right),$$

operador
 \hat{N}_j de número

$$[\hat{N}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \hat{a}_j^\dagger,$$

de tal modo que el espectro completo es

$$|0\rangle \text{ tal que } \hat{a}_j |0\rangle = 0 \quad \forall j, \text{ con } E_0 = \frac{\omega}{2},$$

$$|\vec{n}\rangle \equiv \prod_j \left(\frac{1}{\sqrt{n_j!}} (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} \right) |0\rangle, \quad E_{\vec{n}} = \sum_j \omega \left(n_j + \frac{1}{2} \right).$$

De igual manera, para cuantizar canónicamente a un campo $\varphi(t, \vec{x})$ proponemos

↑ índice, NO variable dinámica

$$\varphi(x), \Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \rightarrow \text{operadores } \hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$$

en cuadro de Schrödinger,

o $\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x})$ en

cuadro de Heisenberg,

↑ densidad de
momento canónico

imponiendo las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] = 0 = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')],$$

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] = i \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')}_{\text{delta de Dirac}}.$$

El ejemplo más sencillo (con el que llegaremos muy lejos en este curso) es un camp escalar (bajo Lorentz, consistente de un solo número en cada sitio \vec{x}) libre ($\equiv \mathcal{L}$ cuadrática, y por tanto, ec. de movimiento lineal):

$$\eta^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{\mu\nu} \quad \begin{array}{l} \text{Métrica de} \\ \text{Minkowski} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi) = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

$\frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$ 'Término cinético' (Usamos $c=1$)

'Término de masa': m resultará ser la masa de las partículas asociadas a $\varphi(x)$

Usando la fórmula de Euler-Lagrange, $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$, deducimos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad \text{Ec. de Klein-Gordon}$$

$$\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 \equiv \partial^2 \equiv \square \quad \text{Laplaciano/D'Alembertiano}$$

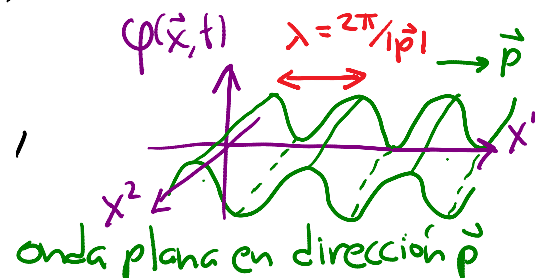
Para $m^2=0$, esto no es otra cosa que la ec. de ondas, con velocidad de propagación $= 1$. Cuando $m^2 \neq 0$ la ec. de Klein-Gordon todavía describe la propagación de ondas en el campo (en general con velocidad $\neq 1$). Para ver esto, conviene cambiar nuestras variables básicas $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_x(t)$ a unas nuevas variables $\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \tilde{\varphi}_p(t)$ obtenidas a través de una transformada de Fourier, ↖ índice, no variable dinámica

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \quad \leftrightarrow \quad \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

que satisfacen $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$, como consecuencia de $\varphi^*(x) = \varphi(x)$.

La ec. de mov. $(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = 0$ se convierte en

$$(\partial_0^2 + \underbrace{\vec{p}^2}_{\equiv E_p^2} + m^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0,$$



es decir, $\ddot{\tilde{\varphi}}(t, \vec{p}) = -E_p^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p})$: cada $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$ es un

oscilador armónico con frecuencia $\omega = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

y nuestro campo libre $\varphi(\vec{x}, t)$ no es entonces más que una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados (un sistema completamente análogo a una cuerda de violín o la membrana de un tambor).

En otras palabras, los modos de Fourier / ondas planas $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$ son los modos normales de oscilación del campo. Con esto entendemos perfectamente la manera en que $\varphi(t, \vec{x})$ evolucionará a nivel clásico.

Para cuantizar este sistema por el método canónico, convertimos al campo $\varphi(t, \vec{x})$ y a su momento canónico conjugado $\Pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$ en operadores en el cuadro de Schrödinger, $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$, o en el de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{\Pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\Pi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t},$$

e imponemos las relaciones de conmutación canónicas (p.6). Sabiendo ya que $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ son análogos a los operadores \hat{x} y \hat{p} de un oscilador armónico (con masa unidad), naturalmente conviene desarrollar

en operadores de ascenso y descenso:

$$\hat{\tilde{\varphi}}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

y

$$\begin{aligned} &\uparrow \text{signo tal que } \hat{\tilde{\varphi}}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\tilde{\varphi}}(-\vec{p}) \\ &\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x}) \text{ (campo real)} \end{aligned}$$

$$\hat{\tilde{\pi}}(\vec{p}) = -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger})).$$

A partir de las relaciones de conmutación para $\hat{\varphi}(\vec{x})$ y $\hat{\pi}(\vec{y})$ es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{análogo a } [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij})$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}].$$

Y el Hamiltoniano clásico

$$H \equiv \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right),$$

al promoverse a operador, toma entonces la forma

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right]$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) E_{\vec{p}}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] E_{\vec{p}} \right)$$

$\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$
 $\int d^3 p$ diverge por \vec{p} grande
 $(\leftrightarrow$ distancias pequeñas)

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}) = \int d^3 x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p})}$$

(cf. $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$) volumen \propto del espacio

El segundo término en \hat{H} claramente representa la 'energía de punto cero' del oscilador armónico etiquetado por \vec{p} , es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado fundamental. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$$

Define $E=0$ como la energía del campo sin excitar

↑ "orden normal": colocar \hat{a}^\dagger 's a la izquierda de \hat{a} 's

Podemos entonces obtener una base para el espacio de Hilbert de nuestro sistema/campo vibrante comenzando con el estado sin excitar

$|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}} |0, 0, 0, \dots\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$
(todos los osciladores en su estado base), y aplicando los operadores de ascenso $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$. El estado más general es una combinación lineal de estados donde cada uno de los infinitos osciladores (\exists uno por cada \vec{p}) está en alguno de sus infinitos estados de excitación.

Y lo más interesante de todo este asunto es que, usando las expresiones conocidas para la energía y el momento espacial ($\neq \Pi$) del campo,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} \hat{N}_{\vec{p}}$$

↖ operador de número

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3x \frac{1}{2} \left(\hat{\Pi} \vec{\nabla} \hat{\varphi} + \vec{\nabla} \hat{\varphi} \hat{\Pi} \right)$$

Carga conservada asociada a invariancia bajo traslaciones (Noether)

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{N}_{\vec{p}},$$

podemos comprobar que existe un acuerdo total entre el espacio de Hilbert de nuestro campo de Klein-Gordon y el espacio de Hilbert de un número arbitrario de partículas relativistas libres sin espín, con masa m y momento \vec{p} :

- $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$, con $\langle 0|0\rangle = 1$

Estado con el campo sin excitar \longleftrightarrow Vacío
(tods los osciladores en su estado base: $|0, 0, 0, 0, \dots\rangle$) (estado sin partículas)
 $E_{\text{tot}} = 0, \quad \vec{P}_{\text{tot}} = 0$

- $|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ (con $\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$)

Estado con el oscilador (onda plana) \vec{p} excitado a su primer nivel \longleftrightarrow Estado con 1 partícula
(" $|0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\rangle$ ") con momento \vec{p}
 $E_{\text{tot}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{p}$

- $|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$ (con $\frac{1}{\sqrt{2!}}$ adicional si $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$)

Estado con 2 osciladores excitados \longleftrightarrow Estado con 2 partículas
 al 1er. nivel ("10,0,0,1,0,0,1,0,0...") en momentos \vec{p}_1, \vec{p}_2
 o, si $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$, 1 oscilador en el 2do. nivel
 ("10,0,0,2,0,0,...")
 $E_{TOT} = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2}$, $\vec{P}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
 partículas No interacción

• $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\rangle$, etc.

La correspondencia incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados (\vec{p}_n 's), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal.
 ¡Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles!
 (Similarmente, al cuantizar un campo no escalar —descrito por varios números en cada lugar, que se mezclan entre sí bajo Lorentz— obtenemos partículas con espín.)

Aprendemos entonces que ¡¡ las partículas son en realidad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo !!

(se trata de estados con energía definida, de modo que las ondas planas en cuestión No son eigenestados de $\hat{\Phi}(\vec{p})$ ni $\hat{\Pi}(\vec{p})$ (ni $\hat{\Phi}(\vec{x})$ ni $\hat{\Pi}(\vec{x})$.)

El universo está hecho de campos, no de partículas.

En este contexto, es natural llamar a $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$ operadores de creación y aniquilación, respectivamente, porque crean/aniquilan partículas en momento definido. (Habríamos aquí de crear/aniquilar apenas a nivel del formalismo teórico. En la teoría libre, la evolución temporal está controlada por $\hat{H} \sim \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}$, que en conjunto mantiene constante el número de partículas.)

Y podemos notar que

$$\hat{\psi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i p \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

crea una partícula en posición definida:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) |0\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-i p \cdot x} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-i p \cdot x} |\vec{p}\rangle \equiv |x\rangle. \end{aligned}$$

operar en el
axioma de Heisenberg

covariante bajo Lorentz, y $\propto \int d^3 p$ para $\vec{p}^2 \ll m^2$

Como las partículas en esta teoría son libres, el único dato de interés es la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague de un punto en el espaciotiempo a otro,

$$\langle t, \vec{x} | t', \vec{x}' \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle.$$

↖ estado en el cuadro de Heisenberg (no evolucionan)

Es útil/habitual concentrarse en el propagador de Feynman

$$G(x, x') \equiv \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0) + \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0)$$

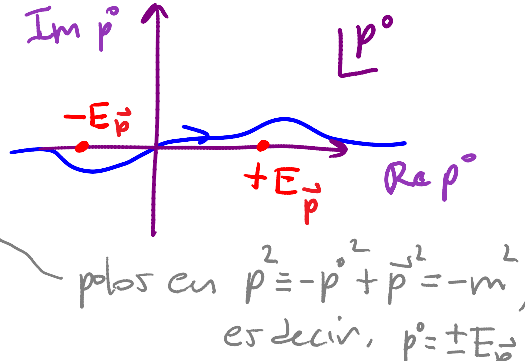
$$\underbrace{\langle x' | x \rangle}_{= \langle x | x' \rangle^*}$$

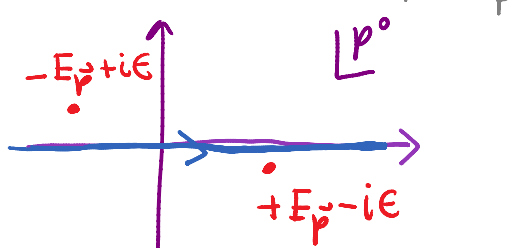
$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \} | 0 \rangle$$

$$\uparrow \text{orden temporal} \equiv \begin{cases} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases}$$

El resultado del cálculo se puede resumir (consultar textos) utilizando una integral sobre una variable auxiliar p^0 que en general difiere de la energía física $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ (y que incluso permitimos que sea compleja, para que al utilizar el teorema de Cauchy podamos peser el residuo

del polo en $p^0 = E_{\vec{p}}$ ó $p^0 = -E_{\vec{p}}$ para obtener el término en $G(x, x')$ con $\Theta(x^0 - x'^0)$ o $\Theta(x'^0 - x^0)$):

$$G(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} \underbrace{\frac{-i}{p^2 + m^2}}_{\equiv \tilde{G}(p)}$$


$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$


Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre \leftrightarrow \mathcal{L} cuadrático (ec. de mov. lineal)

\leftrightarrow Modos de Fourier desacoplados

\leftrightarrow Partículas no interactuantes

(En cuerdas, podremos llegar muy lejos solo con este caso.)

Si agregamos a \mathcal{L} términos cúbicos en φ o más altos, la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos de Fourier $\varphi(\vec{p}, t)$ no estarán ya desacoplados (\therefore no serán modos normales). Llamamos a esto una teoría de campo interactuante. La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino también que interactúen "consigo mismas", de tal modo que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula $|\vec{p}\rangle$ (y \therefore también del vacío $|0\rangle$) en relación con el campo. P.ej., en este nuevo contexto se encuentra que $\hat{\phi}$ no solo crea una partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|0\rangle \sim \alpha_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(\vec{p}')^2} \alpha_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

(Nota que en el formalismo de campos no tiene nada de raro tener una superposición con distintos números de partículas, puesto que se trata simplemente de una indeterminación en el estado del campo desc.)

Y en general, el número de partículas no se mantiene constante: existen procesos físicos de creación/aniquilación. (Básicamente, el generador de evolución en el tiempo \hat{H} ahora sí incluye términos del tipo

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}-\vec{p}'}^{\dagger} \quad \text{o} \quad \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}+\vec{p}'+\vec{p}''}^{\dagger}, \text{ etc. ,}$$

que NO conservan el número de partículas.)

En cualquier teoría de campos, el objetivo principal es calcular las llamadas funciones de correlación o correladores

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | 0 \rangle$$

\uparrow orden temporal \uparrow vacío (estado base)
 $(x_i$: aumenta de derecha a izquierda)

que físicamente representan esencialmente la amplitud de probabilidad de empezar en cierto número de partículas en algún punto del espaciotiempo y terminar en otro número en los sitios restantes. P.ej., $G_5(x_1, \dots, x_5)$ contiene información sobre $1+2 \rightarrow 3+4+5$. (Salvo que para definir adecuadamente a las partículas necesitamos separarlas mucho y pasar al espacio de momentos: amplitudes de dispersión.)

Toda la información física de la teoría puede extraerse de estas funciones de correlación; "resolver" la teoría equivale a ser capaz de determinar G_n (o \tilde{G}_n) $\forall n$.

Tomemos como ejemplo

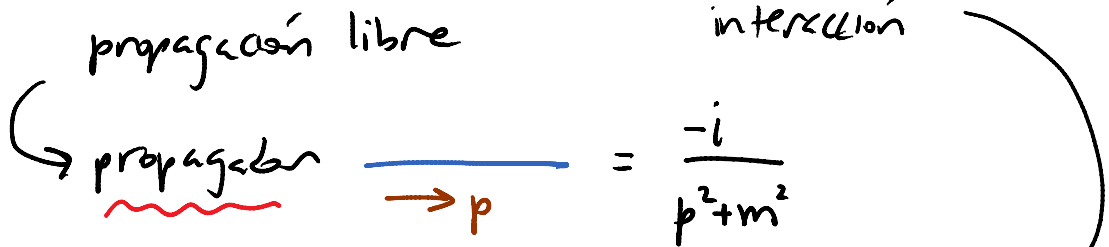
$$S(\varphi) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4 \right)$$

Teoría φ^4

g es la constante de acoplamiento, y controla la intensidad de las interacciones.

Si la teoría está débilmente acoplada (es decir, las constantes de acoplamiento son pequeñas), la teoría está cerca de ser libre, y es posible calcular las $G_n(x_1, \dots)$ en una expansión perturbativa (una serie en potencias de las constantes de acoplamiento). La receta se basa en diagramas de Feynman, construido a partir de 2 tipos de ingredientes que se leen directamente del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2}_{\text{propagación libre}} - \underbrace{\frac{g}{4!} \varphi^4}_{\text{interacción}}$$



proceso con $0 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$ ó $4 \rightarrow 0$ partículas

p.ej.

$$G_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_4) \} | 0 \rangle$$

Suma sobre todos los diagramas con 4 puntos
= externos (y sin pezones completamente
desconector de esos puntos)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ 3 \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \end{array} \quad \mathcal{O}(g^0) \\
 &+ \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ \circ \\ 3 \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ \circ \\ 3 \text{---} 4 \end{array}} \right\} \mathcal{O}(g^1) \\
 &+ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \dots \quad \mathcal{O}(g^2) \\
 &+ \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Cada diagrama se traduce en una fórmula, pero además nos cuenta la historia de un proceso en el espaciotiempo, donde vemos que en etapas intermedias partículas ("virtuales") aparecen y desaparecen.

Para $g \ll 1$, es una buena aproximación quedarnos solo con unos cuantos diagramas de los más sencillos; pero cuando