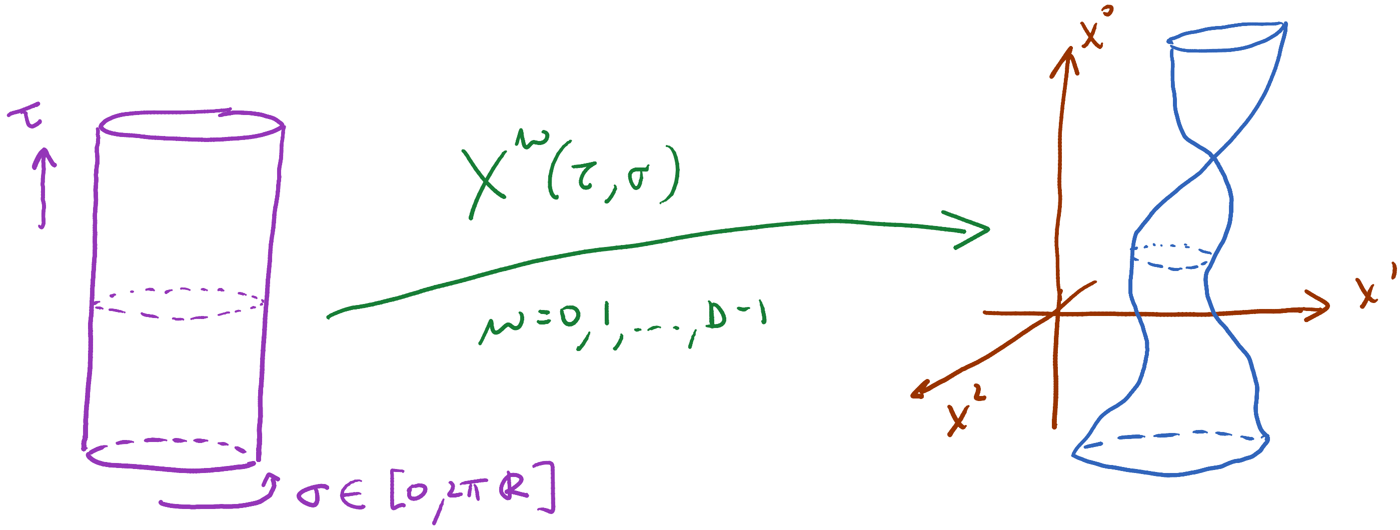
lunes, 14 de noviembre de 2011
04:34 p.m.



$\sigma\in[0,2\pi R]$

$\sigma\simeq\sigma+2\pi R$, tomaremos $R=1$

y debemos exigir la condición de periodicidad

$$X^\mu(\tau,\sigma)=X^\mu(\tau,\sigma+2\pi R)\,.$$

La dependencia de σ figura sólo en $e^{ip_1\sigma}$, así que esto equivale a una condición de discretización sobre el momento espacial en la hoja de mundo,

$$p_1=\frac{n}{R}=n\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Nuestros campos escalares se desarrollan entonces en una serie (y no una transformada) de Fourier:

$$\hat{\varphi}(\tau,\sigma)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}\left[\hat{a}_n e^{in(-\tau+\sigma)}+\hat{a}_n^\dagger e^{-in(-\tau+\sigma)}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{\sqrt{-2n}}\left[\hat{a}_n e^{in(+\tau+\sigma)}+\hat{a}_n^\dagger e^{-in(+\tau+\sigma)}\right].$$

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:55 p.m.

Observando además que la ec. de ondas $-\ddot{X}^\mu + X''^\mu = 0$ permite tener una contribución al campo que sea lineal en las coordenadas de la hoja de mundo,

$$\varphi(\tau,\sigma) \sim c_1 + c_2\tau + \cancel{c_3}^{\,0}\,\sigma$$

por periodicidad bajo $\sigma \to \sigma + 2\pi$

(contribución que estaría prohibida si el campo fuera masivo, $(\partial^2 + m^2)\varphi = 0$, pero en el caso no masivo nos es familiar, porque $A_\mu(x) \sim F_{\mu\nu}X^\nu$ corresponde a una intensidad de campo $F_{\mu\nu}$ $(\leftrightarrow \vec{E}, \vec{B})$ constante — normalmente ausente por condiciones a la frontera,) escribimos entonces finalmente

$$\hat{X}^\mu(\tau,\sigma) = \underbrace{\hat{x}^\mu + l_c^2\,\hat{p}^\mu\tau}_{\text{Grados de libertad de partícula}}$$

posición del centro de masa (en $\tau=0$)

momento del centro de masa

($X^\mu(\tau)$ con $\ddot{X}^\mu(\tau) = 0$)

$$+\frac{l_c}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2|n|}}\left[\hat{a}_n^\mu e^{i(-|n|\tau + n\sigma)} + \hat{a}_n^{\dagger\mu} e^{i(|n|\tau - n\sigma)}\right]$$

Oscilaciones de cuerda.

por normalización de $\varphi(\sigma)$ vs. $X^\mu(\sigma)$

L26: 17/11/11

Al imponer las relaciones de conmutación canónicas,

$$\left[\hat{X}^{\mu}(\tau,\sigma), \hat{\Pi}_{\nu}(\tau,\sigma')\right] = i\,\delta^{\mu}_{\nu}\,\delta(\sigma-\sigma'),$$

con $\Pi_{\nu}(\tau,\sigma) \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^{\nu}(\tau,\sigma)} = \dfrac{1}{2\pi l_c^2}\dot{X}_{\nu}(\tau,\sigma)$,

se puede deducir que

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{p}_{\nu}] = i\,\delta^{\mu}_{\nu}$$

(mostrando que hemos identificado correctamente a estas variables conjugadas)

$$[\hat{a}^{\mu}_{m}, \hat{a}^{\dagger\nu}_{n}] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m,n}$$

(como esperamos para operadores de creación/aniquilación)

$$[\hat{a},\hat{a}] = 0 = [\hat{a},\hat{x}] = [\hat{a},\hat{p}].$$

(Por razones históricas, en los libros de cuerdas normalmente la expansión en modos de Fourier se escribe en términos de

$$\hat{\tilde{\alpha}}^{\mu}_{n} \equiv \sqrt{n}\,\hat{a}^{\mu}_{n}, \quad \hat{\tilde{\alpha}}^{\mu}_{-n} \equiv \sqrt{n}\,\hat{a}^{\dagger\mu}_{n} \quad \forall\, n>0$$

Modos <u>Derechos</u> $\sim \exp(in(\tau-\sigma))$

y

$$\hat{\alpha}^{\mu}_{-n} \equiv \sqrt{-n}\,\hat{a}^{\mu}_{n} \quad , \quad \hat{\alpha}^{\mu}_{n} \equiv \sqrt{-n}\,\hat{a}^{\dagger\mu}_{n} \quad \forall\, n<0$$

Modos Izquierdos $\sim \exp[in(\tau+\sigma)]$,

que satisfacen

$$[\hat{\alpha}^{\mu}_{m}, \hat{\alpha}^{\nu}_{n}] = m\,\delta_{m,-n}\,\eta^{\mu\nu} \quad , \quad [\hat{\tilde{\alpha}}^{\mu}_{m}, \hat{\tilde{\alpha}}^{\nu}_{n}] = m\,\delta_{m,-n}\,\eta^{\mu\nu} \,.$$

Tenemos entonces un número infinito de osciladores armónicos desacoplados (D de ellos por cada elección de $p_1 = n$), como resultado del hecho de que la cuerda puede vibrar, MÁS los grados de libertad de una partícula libre, asociados a la posición/momento del centro de masa de la cuerda.

Nuestro espacio de Hilbert completo tiene como base a los estados:

- $|0;p\rangle$ (es decir, $|0,0,\cdots;p\rangle$)

tal que $\hat{a}^{\mu}_{n}|0;p\rangle = 0 \quad \forall\ \mu, n$

$$\hat{p}^{\mu}|0;p\rangle = p^{\mu}|0;p\rangle$$

1 Cuerda sin oscilar (estado fundamental) con momento p^{μ} $\longleftrightarrow$ Estado sin "partículas" (=vacío) en teoría de campos 1+1 dim

- $\hat{a}^{\dagger\mu}_{n}|0;p\rangle$ (es decir, $|0,0,\cdots,0,\underset{\text{oscilador número } n,\mu}{1},0,\cdots;p\rangle$)

1 cuerda con 1 solo modo de vibración excitado mínimamente y momento p^μ $\longleftrightarrow$ Estado con 1 "partícula" en teoría de campos 1+1 dim

- $\hat{a}^{\dagger\mu}_{m}\hat{a}^{\dagger\nu}_{n}|0;p\rangle$ $\Big(|0,0,\cdots,0,\underset{(\mu,m)}{1},0\cdots0,\underset{(\nu,n)}{1},0,\cdots;p\rangle\Big)$

1 cuerda con 2 modos de vibración excitados mínimamente y momento p^μ $\longleftrightarrow$ Estado con 2 "partículas" en teoría de campos 1+1 dim

(o, si $\mu=\nu$, $m=n$, 1 solo modo doblemente excitado)

- etc.

El ket más general en esta base tiene la forma

$$\hat{a}^{\dagger\mu_1}_{n_1}\hat{a}^{\dagger\mu_2}_{n_2}\cdots\hat{a}^{\dagger\mu_N}_{n_N}|0;p\rangle .$$

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:55 p.m.

Podemos notar que en este espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ existen muchos estados con norma negativa, como p.ej.

$$|\psi\rangle = \hat{a}^{\dagger 0}_{n} |0;p\rangle :$$

$$||\psi\rangle|^2 \equiv \langle\psi|\psi\rangle = \langle 0;p| \underbrace{\hat{a}^{0}_{n} \hat{a}^{\dagger 0}_{n}} |0;p\rangle$$

$$[\hat{a}^{0}_{n}, \hat{a}^{\dagger 0}_{n}] = \eta^{00} = -1$$

$$= - \langle 0;p|0;p\rangle = -\langle p|p\rangle$$

$$= - (2\pi)^D \delta^{(D)}(p-p) < 0 .$$

Esto es absurdo, ¡ pues corresponde a una probabilidad negativa !

Pero es importante recordar que desde un principio sabemos que NO todos los estados en $\mathcal{H}$ son físicos, puesto que nos falta imponer las constricciones

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \ , \ T_{01} = \dot{X}\cdot X' = 0$$

(que equivalen a la ec. de movimiento $g_{ab} \propto h_{ab}$). $= \eta_{ab}$

Para que la teoría tenga sentido, estas condiciones deben bastar entonces para eliminar a todos los estados con norma negativa (en ocasiones llamados "fantasmas"). L27: 22/11/11

Las constricciones exigen que $T_{ab}(\tau,\sigma) = 0 \quad \forall\, \tau,\sigma$.

Notemos ahora que, en términos de

$$\sigma^+ \equiv \tau + \sigma \quad y \quad \sigma^- \equiv \tau - \sigma$$

(coordenadas "del cono de luz" en la hoja de mundo),

$$T_{++} \equiv \frac{\partial\sigma^a}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma^b}{\partial\sigma^+} T_{ab} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X \cdot \partial_+ X$$

$$\left\{ \partial_+ \equiv \frac{\partial\sigma^a}{\partial\sigma^+}\partial_a = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma) \right\}$$

depende sólo de σ^+ y no de σ^- (porque teníamos $X^\mu(\tau,\sigma) = f_+^\mu(\tau+\sigma) + f_-^\mu(\tau-\sigma)$ por la ec. de onda), y similarmente,

$$T_{--} \equiv \frac{\partial\sigma^a}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\sigma^b}{\partial\sigma^-} T_{ab} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X \cdot \partial_- X$$

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:55 p.m.

depende sólo de σ^- y no de σ^+.

Podemos entonces descomponer en modos de Fourier,

$$T_{++}(\sigma^+) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\sigma^+} \frac{2L_n}{T}, \quad T_{--}(\sigma^-) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\sigma^-} \frac{2\tilde{L}_n}{T}$$

tensión

$$\left(\Rightarrow \quad L_n^* = L_{-n}, \quad \tilde{L}_n^* = \tilde{L}_{-n} \right),$$

y el requisito de que

$$T_{++}(\sigma^+) = 0 \quad \forall\, \sigma^+, \quad T_{--}(\sigma^-) = 0 \quad \forall\, \sigma^-$$

equivale a

$$L_n = 0 = \tilde{L}_n \quad \forall\, n.$$

Dado que

$$L_n \equiv \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, e^{in\sigma^+} T_{++} = \frac{1}{4\pi \ell_c^2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, e^{in\sigma^+} \frac{1}{4}\left(\dot{X}^2 + X'^2 + 2\dot{X}\cdot X'\right)$$

y

$$\tilde{L}_n \equiv \frac{T}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, e^{in\sigma^-} T_{--} = \frac{1}{4\pi \ell_c^2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, e^{in\sigma^-} \frac{1}{4}\left(\dot{X}^2 + X'^2 - 2\dot{X}\cdot X'\right),$$

los operadores correspondientes a nivel cuántico

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:56 p.m.

pueden escribirse en términos de los operadores $\hat{p}^\mu$, $\hat{a}^{\dagger\mu}_n$, $\hat{a}^\mu_n$ que figuran dentro de $\hat{X}^\mu(\tau,\sigma)$.

El resultado es

$$\hat{L}_{n>0} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} l_c \hat{p}\cdot\hat{a}_{-n} + \frac{1}{2}\sum_{l<0}\sqrt{-l}\sqrt{n-l}\,\hat{a}^\dagger_l\cdot\hat{a}_{-(n-l)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{0<l<n}\sqrt{l}\sqrt{n-l}\,\hat{a}_{-l}\cdot\hat{a}_{-(n-l)} + \frac{1}{2}\sum_{l>n}\sqrt{l}\sqrt{l-n}\,\hat{a}^\dagger_{-(l-n)}\cdot\hat{a}_l$$

$$\hat{L}_{n<0} = \left(\hat{L}_{-n}\right)^\dagger = \frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{2}} l_c \hat{p}\cdot\hat{a}^\dagger_n + \ldots$$

$$\hat{L}_0 = \frac{l_c^2\hat{p}^2}{4} + \underbrace{\sum_{l>0} l\,\hat{a}^\dagger_{-l}\cdot\hat{a}_{-l}}$$

← omitiendo aquí una posible constante de orden $-c$

(porque $[\hat{a}^{\dagger\mu}_{-m}, \hat{a}^\nu_{-m}] = \eta^{\mu\nu} \neq 0$)

contribución esperada para el Hamiltoniano en la hoja de mundo, porque $p^0 = \varepsilon_{p'} = |p'| = l$

(o, usando las α^μ_n,

$$\hat{L}_n = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} :\hat{\alpha}_l\cdot\hat{\alpha}_{n-l}: , \quad \text{con} \quad \hat{\alpha}^\mu_0 \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}}\hat{p}^\mu \Bigg),$$

con expresiones similares para $\hat{\tilde{L}}_n$, construidos con los modos <u>derechos</u>: $\hat{a}_m$, $\hat{a}^\dagger_m$ con subíndices <u>positivos</u>.

$$\left(\hat{\tilde{L}}_n = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} :\hat{\tilde{\alpha}}_l\cdot\hat{\tilde{\alpha}}_{n-l}: , \quad \text{con} \quad \hat{\tilde{\alpha}}^\mu_0 \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}}\hat{p}^\mu\right).$$

Podemos proceder ahora a utilizar las constricciones clásicas $L_n = 0 = \tilde{L}_n \ \forall \ n$ ($\leftrightarrow T_{++}(\sigma) = 0 = T_{--}(\sigma) \ \forall \ \sigma^a$) como herramientas para distinguir cuáles estados en $\mathcal{H}$ son físicos.

Análogamente al caso de la partícula, donde pedimos

$$(\hat{p}^2 + m^2)\,|fis\rangle = 0 ,$$

aquí quisiéramos básicamente exigir que los $\hat{L}_n$ y $\hat{\tilde{L}}_n$ aniquilen a los estados físicos. Pero debemos tomar en cuenta que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}$$

"Álgebra de Virasoro"

(e idénticamente para los modos derechos $\hat{\tilde{L}}_n$), lo cual nos impide tener $\hat{L}_n |fis\rangle = 0 \ \forall n$.

Cualquier cantidad física se calcula a partir de elementos de matriz, así que lo que en realidad es indispensable es pedir que para cualquier elección de estados físicos

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:56 p.m.

$|\text{fís}\rangle$ y $|\text{fís}'\rangle$ tengamos

$$\langle \text{fís}|\hat{L}_n|\text{fís}'\rangle = 0 \qquad \forall\, n.$$

Recordando que $\hat{L}_{-n} = \hat{L}_n^\dagger$, esto se logra si identificamos los estados físicos $|\text{fís}\rangle$ como aquellos que satisfacen

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{L}_n|\text{fís}\rangle = 0 \quad \forall\, n>0, \quad (\hat{L}_0 - c)|\text{fís}\rangle = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{cte. de orden} \\ \hat{\tilde{L}}_n|\text{fís}\rangle = 0 \quad \forall\, n>0, \quad (\hat{\tilde{L}}_0 - c)|\text{fís}\rangle = 0. \end{array}}$$

Recordando de la p. 249 que

$$\hat{L}_0 = \frac{l_c^2\hat{p}^2}{4} + \underbrace{\sum_{n>0} n\,\hat{a}_{-n}^\dagger \cdot \hat{a}_{-n}}_{\equiv \sum_{n>0} n\hat{N}_{-n} \equiv \hat{N}}, \qquad \hat{\tilde{L}}_0 = \frac{l_c^2\hat{p}^2}{4} + \underbrace{\sum_{n>0} n\,\hat{a}_n^\dagger \cdot \hat{a}_n}_{\equiv \sum_{n>0} n\hat{N}_n \equiv \hat{\tilde{N}}},$$

(donde $\hat{N}_n$ es el operador de número usual para el oscilador armónico # n, p.ej.

$$\hat{N}_{-6}\,\hat{a}_{-3}^{\omega\dagger}\hat{a}_{-6}^{\nu\dagger}\hat{a}_{-2}^{\lambda\dagger}\hat{a}_5^{\rho\dagger}\hat{a}_{-6}^{\beta\dagger}|0\rangle = 2\,\hat{a}_{-3}^{\omega\dagger}\hat{a}_{-6}^{\nu\dagger}\hat{a}_{-2}^{\lambda\dagger}\hat{a}_5^{\rho\dagger}\hat{a}_{-6}^{\beta\dagger}|0\rangle,)$$

y notando que al actuar sobre un ket arbitrario de

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:56 p.m.

nuestra base (p.245) para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$,

$$|\psi\rangle \equiv \underbrace{\hat{a}_{n_1^+}^{\omega_1 \dagger} \cdots \hat{a}_{n_{N^+}^+}^{\omega_{N^+}\dagger}}_{>0} \underbrace{\hat{a}_{n_1^-}^{\nu_1 \dagger} \cdots \hat{a}_{n_{N^-}^-}^{\nu_{N^-}\dagger}}_{<0} |0;p\rangle$$

tenemos

$$\hat{p}^2|\psi\rangle = p^2|\psi\rangle,$$

$$\hat{N}|\psi\rangle = \sum_{n>0} n\hat{N}_{-n}|\psi\rangle = \underbrace{(-n_1^- - n_2^- \ldots - n_{N^-}^-)}_{\equiv N}|\psi\rangle$$

$$\hat{\tilde{N}}|\psi\rangle = \sum_{n>0} n\hat{N}_n|\psi\rangle = \underbrace{(n_1^+ + n_2^+ + \ldots n_{N^+}^+)}_{\equiv \tilde{N}}|\psi\rangle,$$

podemos concluir que las condiciones

$$(\hat{L}_0 - c)|fis\rangle = 0 = (\hat{\tilde{L}}_0 - c)|fis\rangle$$

nos informan que $|\psi\rangle$ es físico solo si

$$\frac{l_c^2 p^2}{4} + N - c = 0 = \frac{l_c^2 p^2}{4} + \tilde{N} - c,$$

es decir, si se satisface la "condición de empatamiento de niveles"

$$N = \tilde{N} \quad ,$$

$-n_1^- - n_2^- \ldots - n_{N^-}$ $\qquad$ $n_1^+ + n_2^+ + \ldots + n_{N^+}$

junto con la condición de capa de masa

$$p^2 = -(p^0)^2 + \vec{p}^{\,2} = -\frac{4}{\ell_c^2}(N - c) \quad .$$

En otras palabras, en cualquier estado físico, la manera en que la cuerda está vibrando (resumida en el eigenvalor $N = \tilde{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$) hace que la cuerda posea la energía correspondiente a una partícula con masa al cuadrado

$$m^2 \equiv -p^2 = \frac{4}{\ell_c^2}(N - c) \qquad \left(\leftrightarrow E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\right).$$

Parte de esto no es nuevo: cuando cuantizamos a la partícula relativista covariantemente, la condición de capa de masa apareció precisamente a través de la constricción impuesta a nivel cuántico,

$$(\hat{p}^2 + m^2)\,|\text{fís}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 = -m^2 .$$

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:56 p.m.

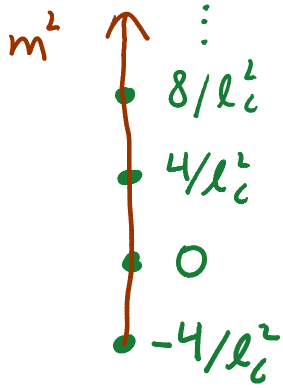
Pero en ese caso habría una sola masa, y estaba predeterminada desde el momento en que escribimos la acción.

Al cuantizar una cuerda relativista, ¡hemos obtenido estados "de partícula" con una infinidad de masas posibles, determinadas por el estado de vibración de la cuerda!

Existen varias maneras de deducir el valor que debe tener la constante de orden c. P.ej., podemos simplemente exigir que nuestros resultados en este método de cuantización covariante (que denotamos como II en nuestra lista de alternativas) coincidan con los que arroja el procedimiento donde primero eliminamos la redundancia y después cuantizamos (que denotamos I en la p.239a, la llamada "norma del cono de luz").

Por cualquier camino, la conclusión es eventualmente que $\boxed{c=1}$, así que usaremos este valor de aquí en adelante. El espectro de masas que se obtiene de la cuerda bosónica cerrada es entonces

$$\boxed{m^2 = \frac{4}{\ell_c^2}(\underset{\uparrow\, 0,1,2,3,\ldots}{N}-1)}\ .$$



Ahora bien, nuestro objetivo primario no era hacer contacto con estados de partícula, sino asegurarnos de que <u>NO</u> sea físico <u>NINGUNO</u> de los kets en $\mathcal{H}$ que tiene norma negativa.

Para identificar con toda precisión a los estados físicos de la cuerda, nos hace falta todavía imponer las condiciones $\hat{L}_{n>0}|\text{fís}\rangle = 0 = \hat{\tilde{L}}_{n>0}|\text{fís}\rangle$.

Podemos notar además que cualquier estado del tipo $\hat{L}_{-n}|\chi\rangle$ ó $\hat{\tilde{L}}_{-n}|\chi\rangle$ con $n>0$ es

arbitrario

irrelevante, porque su producto interno con cualquier

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:56 p.m.

estado físico se anula:

$$\langle \text{fís}|\,\hat{L}_{-n}\,|\chi\rangle = \langle \hat{L}_{n>0}\,\text{fís}\,|\chi\rangle = 0 \,.$$

Dichos estados se conocen como "espurios".
Si además son físicos, se les llama "nulos",
y pueden sumarse a cualquier otro estado físico sin ocasionar efecto alguno:

$$|\text{fís}\rangle \simeq |\text{fís}\rangle + |\text{nulo}\rangle \equiv |\text{fís}'\rangle \,,$$

porque $\langle \text{fís}''|\text{fís}\rangle = \langle \text{fís}''|\text{fís}'\rangle \quad \forall \ |\text{fís}''\rangle$.

Podemos ahora identificar los estados físicos de la cuerda en cada uno de los distintos niveles de excitación, etiquetados por N y $\tilde{N}$ (que son los eigenvalores de $\hat{N} \equiv \sum_{n>0} n\,\hat{a}^{\dagger}_{-n}\hat{a}_{-n}$ y $\hat{\tilde{N}} \equiv \sum_{n>0} n\,\hat{\tilde{a}}^{\dagger}_{n}\hat{\tilde{a}}_{n}$):

- $\boxed{N = \tilde{N} = 0 \longleftrightarrow m^2 = -\frac{4}{\ell_c^2}}$: estados $|0;p\rangle$ con $p^2 = \frac{4}{\ell_c^2}$

Son automáticamente aniquilados por

$$\hat{L}_{n>0} \sim \sum_{\ell} \left(\text{coef.}\,\hat{a}_{|\ell|} + \text{coef.}\,\hat{a}_{-|n-\ell|}\right) \ \text{y} \ \hat{\tilde{L}}_{n>0} \ (\text{p. } 249),$$

miércoles, 16 de noviembre de 2011
05:56 p.m.

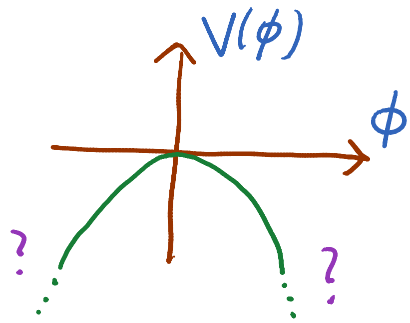
así que todos son físicos. Todos tienen norma positiva. ✓

Este conjunto de estados es idéntico al de una partícula sin espín (= sin grados de libertad adicionales que transformen bajo Lorentz), con masa $m^2 = -4/\ell_c^2$, es decir, un taquión. Sabemos que dicha partícula corresponde a una pequeña fluctuación de un campo escalar, $\phi(x)$.

Así que, al estudiar cuerdas bosónicas, estamos en particular estudiando a este campo $\phi(x)$ (que a estas alturas es libre, pero se volverá interactuante cuando las cuerdas lo sean).

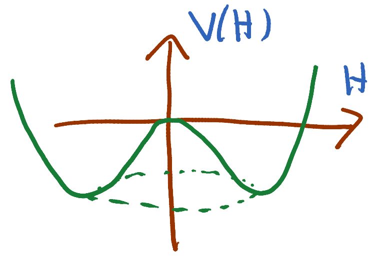
Por el capítulo anterior sabemos que m^2 figura en

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \underbrace{- \frac{1}{2}m^2\phi^2}_{V(\phi)},$$



así que $m^2<0$, aunque desagradable, no implica necesariamente que la teoría sea patológica, sino que el valor promedio del campo — es decir, el vacío —

alrededor del cual perturbamos es inestable, como vimos para el Higgs del Modelo Estándar – p. 63.



• $\boxed{N=\tilde{N}=1 \quad \leftrightarrow \quad m^2=0}$: estados $\varepsilon_{\mu\nu}\,\hat{a}^{\mu\dagger}_{-1}\,\hat{a}^{\nu\dagger}_{+1}|0;p\rangle$ con $p^2=0$

coeficientes arbitrarios

$\hat{L}_n \sim (\text{coef})\cdot\hat{a}_{\ell<-1}$ y $\hat{\tilde{L}}_n$ en automático aniquilan a estos estados para todo $n\geq 2$, pero

$$\hat{L}_1 = \frac{l_c}{\sqrt{2}}\,l_c\,\hat{p}\cdot\hat{a}_{-1} + \frac{1}{2}\sum_{m>1}\sqrt{m-1}\,\hat{a}^\dagger_{-(m-1)}\cdot\hat{a}_{-m} + \frac{1}{2}\sum_{m<0}\sqrt{1-m}\,\hat{a}^\dagger_m\cdot\hat{a}_{-(1-m)}$$

lo hace solo si

$$0 = \varepsilon_{\mu\nu}\,\hat{p}_\lambda\,\underbrace{\hat{a}^\lambda_{-1}\,\hat{a}^{\mu\dagger}_{-1}}_{[\hat{a}^\lambda_{-1},\,\hat{a}^{\mu\dagger}_{-1}]=\eta^{\lambda\mu}}\,\hat{a}^{\nu\dagger}_{+1}|0;p\rangle = \varepsilon_{\mu\nu}\,\hat{p}^\mu\,\hat{a}^{\nu\dagger}_{+1}|0;p\rangle$$

$$= p^\mu\varepsilon_{\mu\nu}\,\hat{a}^{\nu\dagger}_{+1}|0;p\rangle,$$

es decir, si $p^\mu\varepsilon_{\mu\nu}=0$, y similarmente, $\hat{\tilde{L}}_1$ lo hace solo si $\varepsilon_{\mu\nu}p^\nu=0$.

Así que el estado es físico solo si los coeficientes $\varepsilon_{\mu\nu}$ de la combinación lineal satisfacen $p^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$ y $\varepsilon_{\mu\nu} p^\nu = 0$.

Para entender mejor estas restricciones, notemos que mediante una transformación de Lorentz apropiada podemos llegar a un marco de referencia en donde el vector nulo $p^2 = 0$ tome la forma

$$p^\mu = (p^1, p^1, 0, 0, \cdots),$$

y entonces

$$p^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = p^1(\varepsilon_{0\nu} + \varepsilon_{1\nu}) = 0 \implies \varepsilon_{0\nu} = -\varepsilon_{1\nu},$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} p^\nu = (\varepsilon_{\mu 0} + \varepsilon_{\mu 1}) p^1 = 0 \implies \varepsilon_{\mu 0} = -\varepsilon_{\mu 1}.$$

Es decir, los operadores $\hat{a}^{0\dagger}_n$, que resultan problemáticos porque pueden dar lugar a estados con norma negativa, tienen necesariamente que aparecer en combinaciones del tipo

$$\varepsilon_{\mu\nu} \hat{a}^{\mu\dagger}_{-1} \hat{a}^{\nu\dagger}_{+1} \supset (\hat{a}^{0\dagger}_{-1} - \hat{a}^{1\dagger}_{-1}) \text{ ó } (\hat{a}^{0\dagger}_{+1} - \hat{a}^{1\dagger}_{+1}).$$

Solo así el estado será físico.

La norma de un estado como

$$\left(\hat{a}^{0\dagger}_{-1} - \hat{a}^{1\dagger}_{-1}\right)\hat{a}^{i\dagger}_{+1}|0;p\rangle \quad \text{es}$$

2,3,…,D-1

$$\langle 0;p| \underbrace{\underbrace{\left(\hat{a}^{0}_{-1} - \hat{a}^{1}_{-1}\right)\left(\hat{a}^{0\dagger}_{-1} - \hat{a}^{1\dagger}_{-1}\right)}_{[\hat{a}^0_{-1},\hat{a}^{0\dagger}_{-1}]+[\hat{a}^1_{-1},\hat{a}^{1\dagger}_{-1}]}}_{-1+1=0} \underbrace{\hat{a}^{i}_{+1}\hat{a}^{i\dagger}_{+1}}_{[\hat{a}^i_{+1},\hat{a}^{i\dagger}_{+1}]=+1}|0;p\rangle = 0,$$

así que las condiciones de estado físico han logrado eliminar (en este nivel) a todos los estados de norma negativa. ✓

(Esto <u>No</u> hubiera ocurrido si hubiéramos tomado un valor para la constante de orden $c>1$, así que esos valores están claramente <u>descartados</u>.)

Más aún, podemos notar que los estados con norma cero son "nulos":

(-p';p')

$$\left(\hat{a}^{0\dagger}_{-1} - \hat{a}^{1\dagger}_{-1}\right)\hat{a}^{i\dagger}_{+1}|0;p\rangle \propto p_\mu \hat{a}^{\mu\dagger}_{-1}\hat{a}^{i\dagger}_{+1}|0;p\rangle$$