

Estos diagramas tienen una interpretación intuitiva bastante directa. P.ej., el primero representa la amplitud de que una partícula comience en x , se propague libremente hasta un punto y donde se convierte en 2 partículas, las cuales se propagan después hasta un punto y' donde desaparecen dejando en su lugar a una cuarta partícula, que finalmente se propaga a x' . Los otros 2 diagramas se interpretan de manera similar, aunque tienen la peculiaridad de incluir procesos donde se tienen partículas apareciendo del o desapareciendo en el vacío.

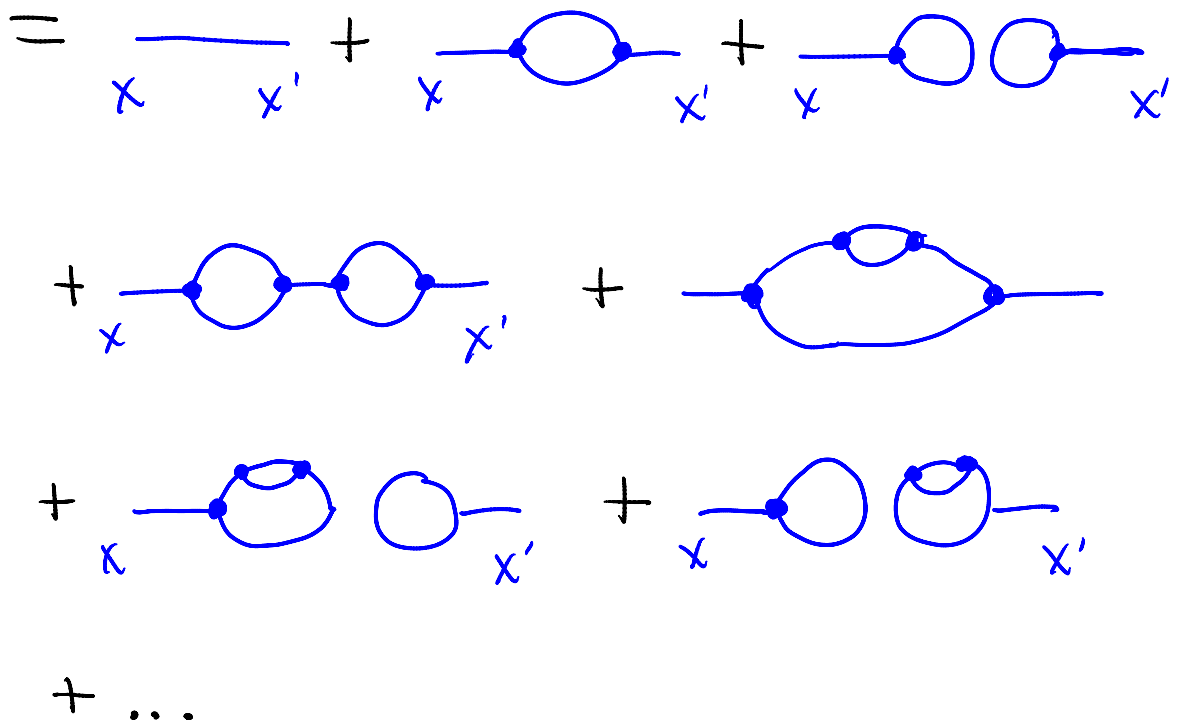
Vemos entonces que, como anticipábamos ya en el lenguaje canónico, el efecto de agregar $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{3!} \varphi^3$ es permitir que en los diagramas aparezcan estos vértices de 3 patas que representan procesos físicos con $3 \rightarrow 0$, $2 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, ó $0 \rightarrow 3$ partículas, cada uno de los cuales ocurre con amplitud de probabilidad $-i\lambda$, que hemos supuesto pequeña.


$$\int \mathcal{D}\varphi e^{i\int d^Dx (L_0 + L_I)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\text{suma de diagramas con } n \text{ vértices y } 0 \text{ puntos externos} \right)$$

de modo que nuestra receta final para calcular el propagador de la teoría con interacciones es

$$G(x, x') \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{iS}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\text{suma de diagramas sin 'burbujas de vacío', con } n \text{ vértices y } 2 \text{ puntos externos } x, x' \right)$$



La moraleja es que los términos cúbicos y más altos en \mathcal{L} , que hacen que el campo esté acoplado consigo mismo, dan lugar a interacciones entre las partículas asociadas al campo: un término $\lambda_p \varphi^p$ corresponde a un vértice de p patas  , que puede describirse procesar con $0 \rightarrow p, 1 \rightarrow p-1, \dots, p \rightarrow 0$ partículas, cuya amplitud de probabilidad está determinada por la constante de acoplamiento λ_p .

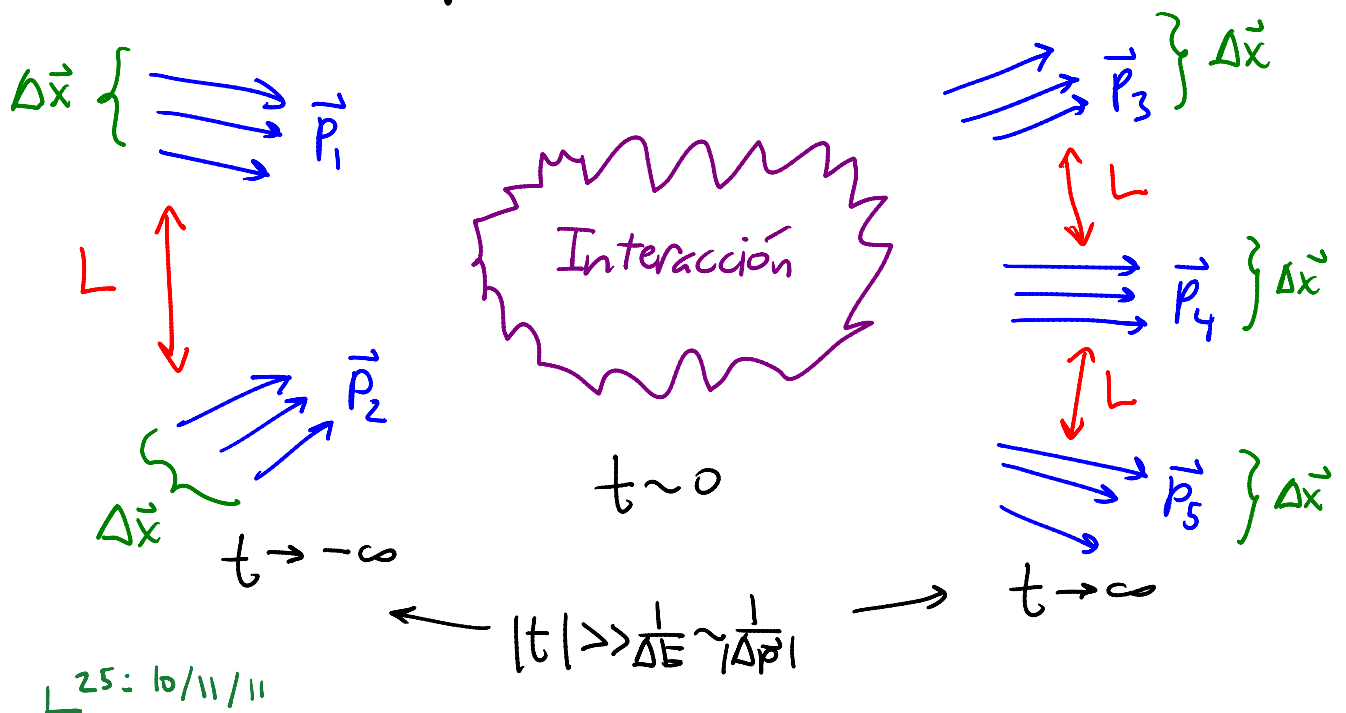
La cantidad más general que podemos calcular es la amplitud de empezar con N partículas y terminar con N' , que está relacionada con la función de correlación con $N+N'$ puntos

$$G(x_1, \dots, x_{N+N'}) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_{N+N'}) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{N+N'}) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}}.$$

Para predicciones experimentales, lo relevante son las amplitudes de dispersión de partículas con momentos (en lugar de posiciones) bien definidos,

$$\langle p'_1 \dots p'_N | p_1 \dots p_N \rangle \sim \int d^4x_1 \dots d^4x_{N+N'} e^{ip_1 x_1} \dots G(x_1, \dots, x_{N+N'}).$$

El típico arreglo experimental involucra choces de partículas cuyos paquetes de onda son suficientemente grandes como para tener un momento \vec{p} bien definido ($|\Delta\vec{x}| \gg \lambda_{\text{de Broglie}} \sim \frac{1}{|\vec{p}|}$), pero están suficientemente separados entre sí como para garantizar que en el estado inicial/final las partículas no interactúan ($L \gg |\Delta\vec{x}|$):



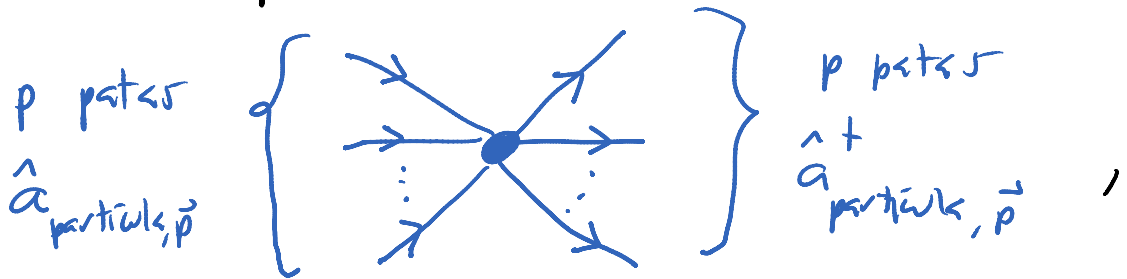
Con un poco más de generalidad, si el campo es complejo ($\varphi \neq \varphi^* \Rightarrow \hat{\varphi} \neq \hat{\varphi}^\dagger$), entonces tiene el doble de grados de libertad, lo cual, como dijimos al principio del curso, se debe a que describe tanto a partículas como antipartículas.

En el caso libre tendremos

$$\hat{\varphi}(x) \sim \int d^3p \left(e^{ipx} \hat{a}_{\text{partícula}, \vec{p}} + e^{-ipx} \hat{a}_{\text{antipartícula}, \vec{p}}^{\dagger} \right)$$

$$\hat{\varphi}^{\dagger}(x) \sim \int d^3p \left(e^{-ipx} \hat{a}_{\text{partícula}, \vec{p}}^{\dagger} + e^{ipx} \hat{a}_{\text{antipartícula}, \vec{p}} \right)$$

y en la expansión perturbativa, un término de interacción $\mathcal{L}_I \sim \lambda (\varphi^{\dagger} \varphi)^p$ corresponde a un vértice de $2p$ patas



donde, por convención, dibujamos flechas en la dirección en la que se propagarían las partículas (que es contraria a la dirección de las antipartículas = partículas viajando hacia atrás en el tiempo).

La función de correlación más general,

$$G_{N,M}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$$

$$\equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}^{\dagger}(x_1) \dots \hat{\varphi}^{\dagger}(x_n) \hat{\varphi}(y_1) \dots \hat{\varphi}(y_m) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi^*(x_1) \dots \varphi^*(x_n) \varphi(y_1) \dots \varphi(y_m) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}},$$

contiene información sobre procesos con un total de

- { n partículas iniciales o antipartículas finales
- { m partículas finales o antipartículas iniciales.

Más en general, al acoplar entre sí a 2 o más campos permitimos procesos donde las partículas correspondientes interactúan entre sí,

$$\varphi_1^3 \varphi_2^2 \leftrightarrow \text{diagrama} , \Phi^* \Phi A \leftrightarrow \text{diagrama}, \text{etc.}$$

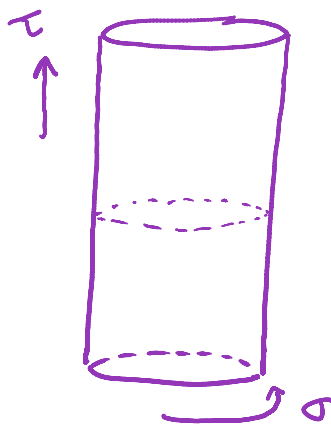
y calculamos funciones de correlación mixtas como

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\psi}_1(x) \hat{\psi}_1(x') \hat{\psi}_1(x'') \hat{\psi}_2(y) \hat{\psi}_2(y') \} | \Omega \rangle \quad \text{ó}$$

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x_1) \hat{\Phi}^\dagger(x_2) \hat{\Phi}(x_3) \hat{\Phi}(x_4) \hat{A}(x_5) \hat{A}(x_6) \} | \Omega \rangle.$$

4. Teoría de Cuerdas

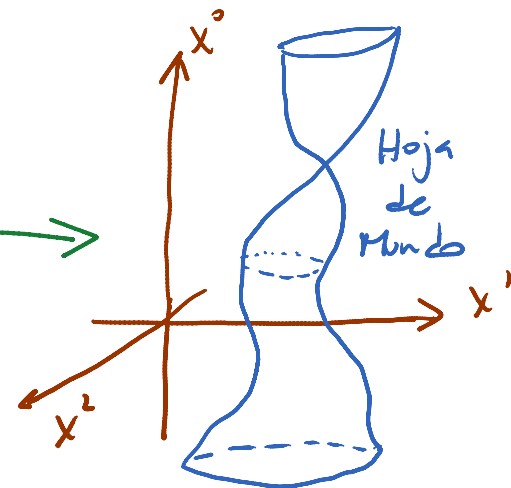
Por definición, una cuerda es un objeto unidimensional, así que al transcurrir el tiempo traza una superficie en el espaciotiempo, que llamamos su hoja de mundo. Análogamente al caso de la partícula, para describirla covariantemente inventamos 2 parámetros arbitrarios τ, σ y consideramos D mapeos $X^M(\tau, \sigma)$:



Espacio Ficticio 1+1 dim
(que será útil llamar 'hoja de mundo')

$X^M(\tau, \sigma)$

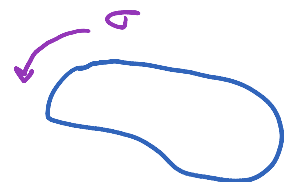
$M=0, 1, \dots, D-1$




Espaciotiempo

D dim

Esencialmente, τ es una etiqueta que indica en qué instante estamos examinando a la cuerda, mientras que σ indica cuál punto de la cuerda nos interesa.

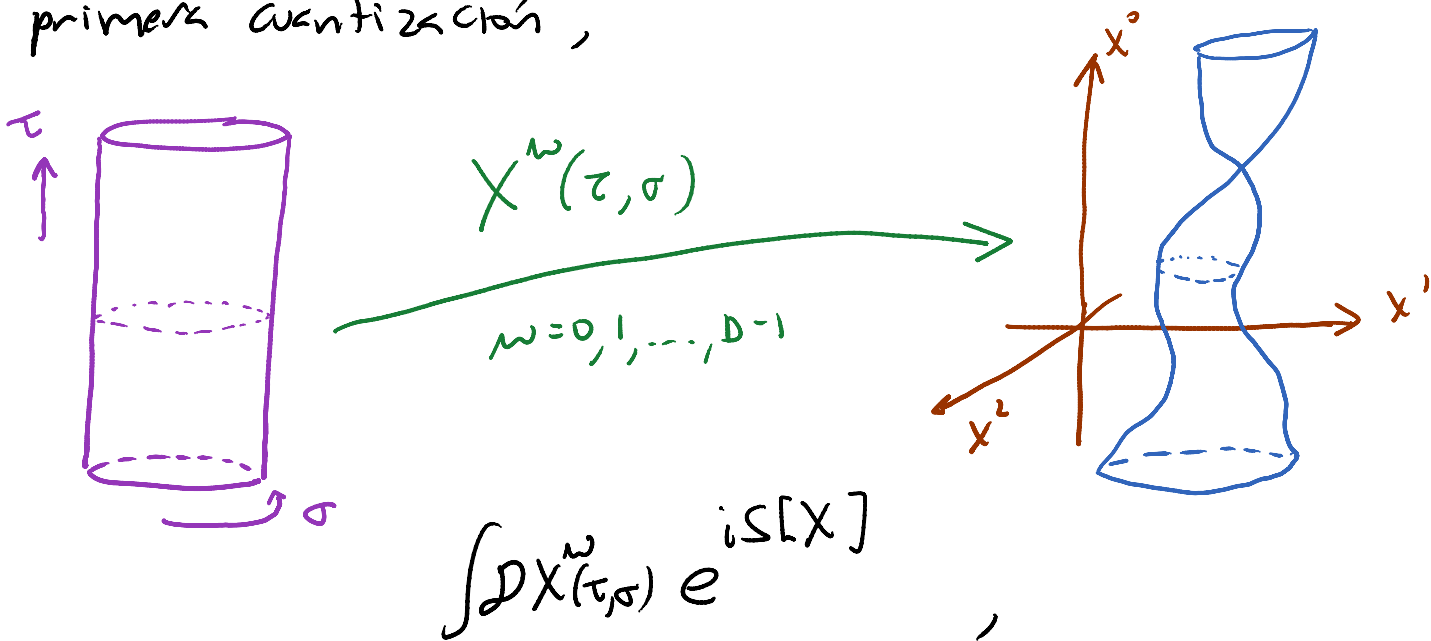


Para ser concretos, hemos dibujado una cuerda cerrada (\equiv sin extremos), pero también es posible e interesante estudiar cuerdas abiertas (\equiv con extremos). 

Cuantizaremos directamente a la trayectoria de la cuerda, $X^\mu(\tau, \sigma)$ — "primera cuantización" — en vez de cuantizar un campo de cuerdas $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ — "segunda cuantización" —. La razón es que es más fácil, y en cuerdas, a diferencia de partículas, la primera cuantización nos permite llegar bastante lejos. (La "teoría del campo de cuerdas" incluye más información, pero coincide para lo que veremos aquí.)

Hablaremos de la cuerda bosónica, donde $X^\mu(\tau, \sigma)$ son los únicos grados de libertad, es decir, el estado de la cuerda está completamente caracterizado por su forma/ubicación en el espaciotiempo. (Para obtener física más realista necesitaríamos estudiar a la súpercuerda, que tiene grados de libertad adicionales.)

En todo lo sucesivo, resultará muy útil notar que el sistema que nos interesa, la cuerda encogida en un espaciotiempo D -dimensional, descrita en primera cuantización,



puede reinterpretarse como una teoría cuántica de D campos escalares (con nombre X^μ en vez de φ_n) que viven en $1+1$ dimensiones (con coordenadas de espaciotiempo τ, σ en vez de t, x). Este sería el punto de vista natural para un observador con domicilio en el espacio morado de la figura, que para nosotros es puramente ficticio/auxiliar, pero que usaremos frecuentemente y llamaremos

la hoja de mundo de la cuerda (en una segunda aproximación).

(De manera similar, la primera cuantización de una partícula puede reinterpretarse como una teoría cuántica de "campos" en 0+1 dimensiones.)

Para proceder, necesitamos conocer la acción que controla la dinámica de la cuerda. En el caso de la partícula relativista, vimos que la acción natural es

$$S_{\text{partícula}} = - \text{masa} \times \left(\begin{array}{l} \text{longitud} \\ \text{propia} \end{array} \right),$$

↖ energía en reposo

así que la generalización obvia para una cuerda relativista es

$$S_{\text{cuerda}} = - \text{tensión} \times \left(\begin{array}{l} \text{Área} \\ \text{propia} \end{array} \right),$$

↖ ≡ energía por unidad de longitud para cuerda en reposo

es decir [ver Tarea 3],

la acción de (Dirac-) Nambu-Goto

$$S_{NG}[X] = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X)}$$

$a, b = 0, 1; \sigma^0 \equiv \tau, \sigma^1 \equiv \sigma$
↗ métrica en el espaciotiempo

$T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$ "pendiente de Regge"
 ≡ $h_{ab}(\tau, \sigma)$

define (con $\hbar=c=1$)

$l_c \equiv \sqrt{\alpha'}$ longitud de cuerdas

$m_c \equiv l_c^{-1}$ escala de cuerdas

Métrica inducida en la hoja de mundo

Notar que

$$-\det h_{ab} = -\det \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} = (\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2,$$

donde $\cdot \equiv \partial_\tau \equiv \partial_0$, $' \equiv \partial_\sigma \equiv \partial_1$ y el producto punto involucra a la métrica en el espaciotiempo,

p.ej., $X' \cdot \dot{X} = X'^\mu \dot{X}^\nu G_{\mu\nu}(X)$.

La acción de Nambu-Goto es invariante bajo:

i) Reparametrizaciones en el espaciotiempo

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu(x), \quad G_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{G}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} G_{\lambda\rho}(x)$$

(lo cual implica

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\tau, \sigma) = \bar{x}^\mu(X(\tau, \sigma)),$$

$$\partial_a X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \partial_a \bar{X}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \partial_a X^\nu(\tau, \sigma).$$

En particular, en un espaciotiempo plano,

$G_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, S_{NG} es invariante bajo

transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones)

$$X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma) + C^\mu$$

↑
quiero decir $\sigma^a \equiv (\tau, \sigma)$

(bajo las cuales $\eta_{\mu\nu}$ no cambia).

ii) Reparametrizaciones en la hoja de mundo

$$\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a(\sigma), \quad X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

↑
 τ, σ

X^μ son
campos
escalares

Estas últimas son 2 simetrías "locales" o "de norma" en la hoja de mundo, que se manifiestan a través de 2 constricciones ("de primera clase")

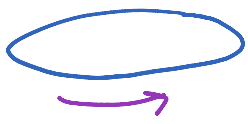
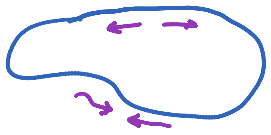
$$\pi_\mu \pi^\mu + T^2 X'_\mu X'^\mu = 0, \quad \pi_\mu X'^\mu = 0,$$

donde $\pi_\mu(\sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu(\sigma)} = T \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - \dot{X} \cdot X' X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$

es el momento canónico conjugado a $X^\mu(\sigma)$.

(Análogamente, para la partícula tenemos 1 simetría local, $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$, asociada a 1 restricción $p^2 + m^2 = 0$.)

Esto expresa la redundancia existente en nuestra descripción covariante: tenemos D variables $X^\mu(\sigma)$, pero solo $D-2$ grados de libertad físicos. Tal como en el caso de la partícula, $X^\mu(\sigma)$ no es un grado de libertad verdadero, pero aquí tampoco lo es la dirección longitudinal sobre la cuerda, $\frac{X'_\mu(\sigma)}{\sqrt{X'^2(\sigma)}} X^\mu(\sigma)$.

p.ej., la rotación rígida , o la compresión/expansión con forma constante . No son movimientos físicos, puesto que nuestra cuerda pretende ser fundamental (elemental): a diferencia de un mecate, no está hecho de partículas a las cuales les podríamos seguir la pista individualmente.

Justo como hicimos para la partícula, conviene eliminar la raíz cuadrada de $S_{NG}[X]$. Para ello nos inventamos como campo auxiliar a una métrica intrínseca en la hoja de mundo, $g_{ab}(\sigma)$, y escribimos la acción de Polyakov (-Brink-Di Vecchia - Howe - Deser - Zumino)

$$S_p[X, g] = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X)$$

Métrica inducida $h_{ab}(\sigma)$

Es fácil mostrar que la ecuación de movimiento de $g_{ab}(\sigma)$ implica que $g_{ab}(\sigma) = h_{ab}(\sigma)$ (para ser más

preciso, $g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) h_{ab}(\sigma)$, con $\lambda(\sigma)$ arbitraria), y

$$\begin{aligned} S_p [X, g_{ab} = h_{ab}] &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} \underbrace{h^{ab} h_{ab}}_{\delta_a^a = 2} \\ &= -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} = S_{\text{NG}} [X], \end{aligned}$$

Traza de la matriz identidad

así que las 2 acciones son equivalentes. ✓

Con $g_{ab}(\sigma)$ nuestra descripción es aún más redundante, y como expresión de esto, S_p , además de ser invariante bajo i) y ii), lo es también bajo iii) Transformaciones de Weyl

$$g_{ab}(\sigma) \rightarrow \bar{g}_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma) \quad (\sigma^a \text{ y } X^\mu(\sigma) \text{ no cambian})$$

$$\left(\Rightarrow \sqrt{-\det \bar{g}_{ab}} \bar{g}^{ab} = \sqrt{-\det g_{ab}} \cancel{\Omega^{2^2}} \cancel{\Omega^{-1}} g^{ab} \quad \checkmark \right).$$

25: 15/11/11

Ahora tenemos entonces un total de 3 simetrías locales (2 reparametrización + 1 Weyl), y como esto coincide con el número de componentes independientes de $g_{ab}(\sigma)$ (matriz 2×2 simétrica), podemos eliminar (casi) toda la redundancia (es decir, "fijar la norma") de manera

covariante especificando la métrica intrínseca. Elegiremos

$$g_{ab}(\sigma) = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{"Normal plane"}$$

La acción se describe entonces simplemente con

$$S_p[X] = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X)$$

mas la ecuación de movimiento para g_{ab} (que como vimos, es crucial para mantener la equivalecia con $S_{NG}[X]$, y ahora debe ser impuesta a mano)

$$0 = \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}} \equiv -\frac{T}{2} \sqrt{-\det g_{ab}} T_{ab}$$

Tensión

tensor de energía-momento en los q de mundo

Es decir, al utilizar $S_p[X]$ en vez de $S_p[X, g]$, deberas imponer las construcciones adicionales

$$T_{ab} = \partial_a X \cdot \partial_b X - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_c X \cdot \partial^c X = 0,$$

← expresión exterior para campo escalar

o, en más detalle,

$$T_{00} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \quad (\Rightarrow T_{11} = -T_{00} = 0),$$

par Weyl

$$T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0 \quad (\Rightarrow T_{10} = T_{01} = 0).$$

(Notar que ahora $\Pi_\mu(\tau, \sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^\mu(\tau, \sigma)} = T \dot{X}_\mu$,

así que estas construcciones coinciden con las que teníamos ya en Σ_{NS} ,

$$\Pi^2 + T^2 \dot{X}'^2 = 0, \quad \Pi \cdot \dot{X}' = 0. \quad \checkmark$$

Estas 2 construcciones son importantes, puesto que son ellas las que nos recuerdan que, aún después de haber eliminado $g_{ab}(\sigma)$, tenemos todavía 2 de las $X^\mu(\sigma)$ que NO son físicas.

Pero si tenemos todavía redundancia, entonces todavía NO hemos eliminado las simetrías locales ("fijada la norma") por completo. La razón es que existen "reparametrizaciones conformes" $\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a(\sigma)$ tales que

$$\bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \bar{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \bar{\sigma}^b} g_{cd}(\sigma) = \lambda(\sigma) g_{ab}(\sigma),$$

cuyo efecto puede revertirse en una transformación de Weyl

$$\bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) \rightarrow \bar{\bar{g}}_{ab}(\bar{\sigma}) = \Omega(\sigma) \bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) \quad \text{con} \quad \Omega(\sigma) = \lambda^{-1}(\sigma).$$

La combinación se conoce como una transformación conforme,
y al no afectar a $g_{ab}(\sigma)$, es una simetría local que sobrevive aún después de fijar $g_{ab} = \eta_{ab}$.

Explícitamente, si definimos $\sigma^+ \equiv \tau + \sigma$, $\sigma^- \equiv \tau - \sigma$,
las transformaciones conformes son

$$\sigma^+ \rightarrow \bar{\sigma}^+(\sigma^+) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{sin dependencia} \\ \text{de } \sigma^- \end{array}, \quad \sigma^- \rightarrow \bar{\sigma}^-(\sigma^-) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{sin dependencia} \\ \text{de } \sigma^+ \end{array},$$

$$X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma), \quad g_{ab}(\sigma) \rightarrow \bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) = g_{ab}(\sigma) = \eta_{ab}.$$

Por simplicidad, de ahora en adelante trabajaremos en un espaciotiempo plano, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, de modo que

$$S_p[X] = -\frac{T}{2} \int d\sigma^2 \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu \eta_{\mu\nu} = -\frac{T}{2} \int d\sigma^2 (-\dot{X}^2 + X'^2)$$

es simplemente la acción de D campos escalares libres
(\leftrightarrow Klein-Gordon) y sin masa en $1+1$ dimensiones!

La ecuación de movimiento es

$$\partial_a \partial^a X^\mu = -\ddot{X}^\mu + X''^\mu = 0$$

Klein-Gordon = Ec. de ondas
sin masa

que debemos imponer junto con las condiciones

239a

jueves, 17 de noviembre de 2011
05:33 a.m.

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad \dot{X} \cdot X' = 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\Pi^2 + T X'^2 = 0, \quad \Pi \cdot X' = 0.$$

Análogamente, en el caso de la partícula teníamos (a partir de la sección "de Polyakov" después de fijar la métrica intrínseca $g_{\tau\tau}(z)$, pp. 184-188,) la ec. de movimiento $\ddot{X}^\mu = 0$ junto con la restricción $\dot{X}^2 = -(\text{tiempo propio total})^2$

o, lo que es lo mismo,

$$p^2 + m^2 = 0 \quad \text{condición de masa de capa.}$$

Justo como vimos allá, para cuantizar tenemos

2 opciones:

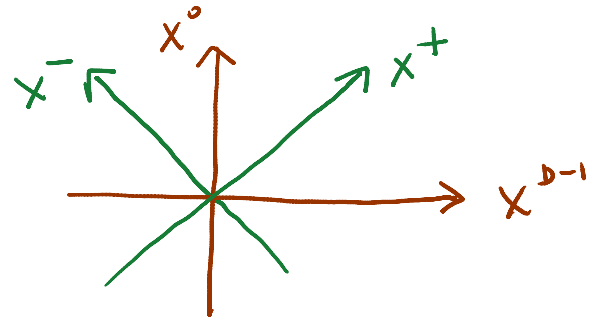
I) Eliminar la redundancia ("fijar la norma") por completo a nivel clásico, y cuantizar solo los grados de libertad físicos.

En el caso de la partícula era natural elegir $X^0(\tau) \propto \tau$.

Para la cuerda, resulta que es más conveniente definir primero las "coordenadas del cono de luz"

$$X^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 + X^{D-1})$$

$$X^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 - X^{D-1})$$



y eliminar la redundancia imponiendo la condición

$$X^+(\tau, \sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0(\tau, \sigma) + X^{D-1}(\tau, \sigma)) \propto \tau.$$

Usando las restricciones, esto permite determinar

$X^-(\tau, \sigma)$ en términos de las $D-2$ variables

"transversales" $X^i(\tau, \sigma)$ $i=1, 2, \dots, D-2$,

que son entonces los verdaderos grados de libertad físicos que procederíamos a cuantizar.

Este método se conoce como la "norma del

cono de luz". Tiene la desventaja de no ser manifestamente covariante bajo Lorentz (y de hecho, si se puede mostrar que la covariancia de Lorentz es violada a menos que $D=26$!!),

239c

jueves, 17 de noviembre de 2011
08:47 a.m.

y no lo discutiremos más aquí [ver, p.ej.,
Zwiebach].

II) Ignorar temporalmente las constricciones,
cuantizar todas las X^μ en el mismo pie,
obteniendo un espacio de Hilbert manifiestamente
covariante bajo Lorentz pero demasiado grande, y
al final, eliminar la redundancia a nivel cuántico,
utilizando a las constricciones como herramientas
para distinguir cuáles estados son físicos.
Este es el método que preferiremos seguir.

Nuestra primera tarea es entonces cuantizar a
los $\mathbb{D} X^\mu(\tau, \sigma)$, que son campos escalar libres
y no masivos en $1+1$ dimensiones.

Aprender a cuantizar este sistema (relativo oscilante
unidimensional) en el capítulo anterior: sabemos que
cada modo de Fourier está etiquetado por un momento
espacial (unidimensional) p^1 y evoluciona como un
oscilador armónico. Entonces entonces la misma

expansión (tanto a nivel clásico como cuántico) que
vimos para el campo de Klein-Gordon,

$$\hat{\varphi}(\sigma, \sigma') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d p_1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{p_1}}} \left[\hat{a}_{p_1} e^{i p_1 \sigma} + \hat{a}_{p_1}^\dagger e^{-i p_1 \sigma} \right]_{p_1^0 = \varepsilon_{p_1}},$$

es decir,

$$\text{con } \varepsilon_{p_1} \equiv \sqrt{p_1^2 + 0} = |p_1|,$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\tau, \sigma) = & \int_0^{\infty} \frac{d p_1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2 p_1}} \left[\hat{a}_{p_1} e^{i p_1 (-\tau + \sigma)} + \hat{a}_{p_1}^\dagger e^{-i p_1 (-\tau + \sigma)} \right] \\ & + \int_{-\infty}^0 \frac{d p_1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{-2 p_1}} \left[\hat{a}_{p_1} e^{i p_1 (+\tau + \sigma)} + \hat{a}_{p_1}^\dagger e^{-i p_1 (+\tau + \sigma)} \right], \end{aligned}$$

que es la superposición de ondas izquierdas (función de $\sigma^+ \equiv \tau + \sigma$) y derechas (función de $\sigma^- \equiv \tau - \sigma$), que sabemos es la solución más general a las ecuaciones de onda.

Solo debemos discutir una novedad. Si queremos que las funciones $X^\mu(\sigma)$ en verdad describan a una cuerda cerrada, entonces σ debe parametrizar un círculo $\sigma \cong \sigma + 2\pi\mathbb{R}$,

