jueves, 07 de junio de 2007
07:19 a.m.

$$\hat{H} = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\varphi}^2 \right]$$

$$= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\right) E(\vec{p})$$

$$= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \left(E(\vec{p})\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}]}_{(2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p})} E(\vec{p}) \right)$$

$$\left(\text{cf. } \hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger}) = \omega(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \tfrac{1}{2}) \right)$$

El segundo término en $\hat{H}$ claramente representa la 'energía de punto cero' del oscilador armónico etiquetado por $\vec{p}$, es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado fundamental. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$\boxed{:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} E(\vec{p})\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}} \,,$$

que nos da la energía total del sistema medida por encima de la energía que tiene el campo sin excitar. En esta expresión hemos usado el símbolo : :, que denota lo que se conoce como "ordenamiento normal", el cual consiste en colocar todos los $\hat{a}^\dagger$'s a la izquierda de los $\hat{a}$'s

(p.ej., $:\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}: \equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$, $:\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}: \equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$,

$:\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}: \equiv \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}'} = \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}'}\hat{a}_{\vec{p}}$, etc.).

L21: 27/10/11

Justo como hicimos para 1 oscilador armónico en la tarea 2, podemos construir el espacio de autoestados de $:\hat{H}:$ (y $\hat{H}$) usando los operadores de creación y aniquilación. Identificamos primero al estado base (o fundamental) para el campo como aquel en el que todos los osciladores están sin excitar:

$$|0\rangle \equiv \text{“}|0,0,\dots\rangle\text{”} \text{ tal que } \hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \;\forall\, \vec{p},\; \langle 0|0\rangle = 1.$$

Actuando sobre este estado con un solo operador de creación, obtenemos los estados con 1 solo oscilador excitado:

$$|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E(\vec{p})}\ \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle \qquad \Big(\equiv \text{``}|0,0,\dots 1,0,\dots\rangle\text{''}\Big)$$

oscilador número $\vec{p}$

donde hemos elegido la normalización de tal manera que

$$\langle\vec{p}\,'|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E(\vec{p}\,')}\sqrt{2E(\vec{p})}\underbrace{\left(\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}\,'}\right)\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right)}_{=\langle 0|\underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}\,'},\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}]}_{(2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}\,')}|0\rangle}$$

$$= (2\pi)^{D-1}\underbrace{2E(\vec{p})\,\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}\,')}_{\text{combinación covariante bajo Lorentz}}.$$

¿Cuál es la energía de estos estados?

Usando $:\hat{H}: = \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}E(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}$ vemos que

$$:\hat{H}:|0\rangle = \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}E(\vec{p})\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0\,,$$

$$:\hat{H}:|\vec{p}\rangle = \int\frac{d^{D-1}p'}{(2\pi)^{D-1}}E(\vec{p}\,')\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}\,'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle}_{[\hat{a}_{\vec{p}\,'},\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}]|0\rangle = (2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}\,')|0\rangle}\sqrt{2E(\vec{p})}$$

$$:\hat{H}:|\vec{p}\rangle = E(\vec{p})\sqrt{2E(\vec{p})}\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}|0\rangle = E(\vec{p})|\vec{p}\rangle,$$

es decir, $|0\rangle$ tiene (por construcción) energía 0, y $|\vec{p}\rangle$ tiene energía $E(\vec{p}) \equiv \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$, ¡¡justamente la energía de una partícula relativista libre, con momento espacial $\vec{p}$ y masa m!!

Por esta razón llamamos a $|0\rangle$ $(\neq |\vec{0}\rangle)$ el "vacío" ($\equiv$ estado sin partículas), y a $|\vec{p}\rangle$ el estado con 1 partícula (de momento $\vec{p}$).

Notemos que, si en lugar de trabajar con $:\hat{H}:$ hubiéramos usado directamente el Hamiltoniano completo

$$\hat{H} = :\hat{H}: + \underbrace{\int d^{D-1}p\ \delta^{(D-1)}(\vec{0})\ \tfrac{1}{2}E(\vec{p})}_{\equiv E_{vac}},$$

al vacío $|0\rangle$ le hubiéramos asignado justamente la energía E_{vac}, y al estado de 1 partícula $|\vec{p}\rangle$, $E(\vec{p})+E_{vac}$.

El valor de E_{vac} sólo importa en presencia de la gravedad, donde representa una contribución (¡infinita!) a la

jueves, 07 de junio de 2007
08:19 a.m.

energía del vacío $\longleftrightarrow$ cte. cosmológica $\longleftrightarrow$ energía oscura.

Ahora, hemos visto que $|\vec{p}\rangle$, el estado donde apenas 1 oscilador está en su <u>primer</u> nivel excitado, describe a 1 partícula, ¿pero que significado tienen los estados donde ese mismo oscilador está en un nivel más alto de excitación, o donde excitamos a más de 1 oscilador?

Si definimos $\underbrace{}_{}$ "$|0,0,\ldots,2,0,\ldots\rangle$" ó "$|0,0,\ldots,1,0,\ldots,1,0\ldots\rangle$"

$$|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle \equiv \sqrt{2E(\vec{p})}\sqrt{2E(\vec{p}\,')}\;\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}|0\rangle \qquad \left(=|\vec{p}\,',\vec{p}\rangle\right)$$

tenemos

$$:\hat{H}:|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle = \sqrt{2E(\vec{p})}\sqrt{2E(\vec{p}\,')}\int\frac{d^{D-1}p''}{(2\pi)^{D-1}}E(\vec{p}\,'')\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,''}\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}\,''}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}}|0\rangle$$

$$\underbrace{\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}\,''}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}}+(2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}\,''-\vec{p})\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}\hat{a}_{\vec{p}\,''}+\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}(2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}\,''-\vec{p}\,')$$

$$=\sqrt{2E(\vec{p})}\sqrt{2E(\vec{p}\,')}\left(E(\vec{p})\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}|0\rangle+E(\vec{p}\,')\hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle\right)$$

$$=\left(E(\vec{p})+E(\vec{p}\,')\right)|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle,$$

jueves, 07 de junio de 2007
08:32 a.m.

es decir, $|\vec{p},\vec{p}\,'\rangle$ es 1 estado con 2 partículas relativistas libres (y en particular, desacopladas entre sí), cuyos momentos espaciales son $\vec{p}$ y $\vec{p}\,'$.

De manera similar, podemos comprobar que el estado más general,

$$|\underbrace{\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_1}_{n_1},\underbrace{\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_2}_{n_2},\cdots,\underbrace{\vec{p}_\nu,\cdots,\vec{p}_\nu}_{n_\nu}\rangle \equiv \prod_{j=1}^{\nu}\left[\frac{\left(\sqrt{2E(\vec{p}_j)}\,a^{\dagger}_{\vec{p}_j}\right)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]|0\rangle$$

tiene energía $E=\sum_{j=1}^{\nu} n_j E(\vec{p}_j) = \sum_{j=1}^{\nu} n_j\sqrt{\vec{p}_j^{\,2}+m^2}$, la cual coincide con la energía de una colección de $N\equiv\sum_{j=1}^{\nu} n_j$ partículas relativistas libres que son idénticas, con masa m y momentos espaciales $\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_\nu,\cdots,\vec{p}_\nu$.

En resumen, hemos encontrado que los espacios de Hilbert de 2 sistemas que a primera vista parecerían muy diferentes, un campo escalar y una colección de un número arbitrario ($N=0,1,2,\dots$) de partículas sin espín, en realidad coinciden a la perfección:

206a

lunes, 01 de octubre de 2007
12:24 a.m.

- $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$, con $\langle 0|0\rangle = 1$

Estado con el campo sin excitar (todos los osciladores en su estado base: $|0,0,0,0,\dots\rangle$) $\longleftrightarrow$ Vacío (estado sin partículas)

- $|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle \qquad$ (con $\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\, \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$)

Estado con el oscilador (onda plana) $\vec{p}$ excitado a su primer nivel ("$|0,0,0,1,0,0,\dots\rangle$") $\longleftrightarrow$ Estado con 1 partícula con momento $\vec{p}$

lugar $\vec{p}$

- $|\vec{p}_1,\vec{p}_2\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}}\sqrt{2E_{\vec{p}_2}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_1}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_2}|0\rangle \quad$ (con $\frac{1}{\sqrt{2!}}$ adicional si $\vec{p}_1=\vec{p}_2$)

Estado con 2 osciladores excitados al 1er. nivel ("$|0,0,0,1,0,0,1,0,0\dots\rangle$") o, si $\vec{p}_1=\vec{p}_2$, 1 oscilador en el 2do. nivel ("$|0,0,0,2,0,0,\dots\rangle$") $\longleftrightarrow$ Estado con 2 partículas con momentos $\vec{p}_1, \vec{p}_2$

- etc.

La correspondencia incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados ($\vec{p}_n$'s), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal.

¡Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles!

(Similarmente, campos no escalares $\longleftrightarrow$ partículas con espín.)

Aprendemos entonces que, como prometimos desde el principio del curso, ¡¡ las partículas son en verdad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo !!

Un punto que vale la pena resaltar es que nuestro campo/gelatina cuántico/a nos da la posibilidad de hablar de un número cualquiera de partículas (el espacio de Hilbert asociado,

$$\mathcal{H} = |0\rangle \oplus \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ partícula} \\ |\vec{p}\rangle \end{matrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{matrix} 2 \text{ partículas} \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \end{matrix} \right\} \oplus \ldots$$

se conoce por su estructura como "espacio de Fock"), tal como habíamos visto que resulta necesario al combinar cuántica con relatividad, dado que el número de partículas puede en general variar (aunque por supuesto no lo hace en el caso libre).

Más aún, los operadores de ascenso/descenso del oscilador armónico número $\vec{p}$, $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$ tienen por definición la función de crear/aniquilar partículas con momento espacial $\vec{p}$ (p.ej., $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|\vec{p}\,',\vec{p}\,''\rangle \propto |\vec{p},\vec{p}\,',\vec{p}\,''\rangle$).

lunes, 07 de noviembre de 2011
10:03 a.m.

Notemos ahora que

$$\hat{\varphi}(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \underbrace{(\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{p}})|0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2E(-\vec{p})}}|-\vec{p}\rangle}$$

$$\overset{\vec{p}'=-\vec{p}}{=} \int \frac{d^{D-1}p'}{(2\pi)^{D-1}2E(\vec{p}')} \underbrace{e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}}}_{\langle\vec{p}'|\vec{x}\rangle} |\vec{p}'\rangle \equiv |\vec{x}\rangle,$$

es decir, $\hat{\varphi}(\vec{x})$ es un operador que crea (o destruye) una partícula localizada en $\vec{x}$.

Pasando al cuadro de Heisenberg, obtenemos

$$\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}(t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}e^{+iE(\vec{p})t}$$

$$\hat{a}_{\vec{p}}(t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{a}_{\vec{p}}e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}_{\vec{p}}e^{-iE(\vec{p})t}$$

← razonable porque en Schrödinger $|\vec{p}\rangle_t = e^{-iE(\vec{p})t}|\vec{p}\rangle_0$

y ∴

$$\hat{\varphi}(x) \equiv \hat{\varphi}(\vec{x},t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{\varphi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}$$

$$= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}e^{\overbrace{ip\cdot x}^{-p^0t+\vec{p}\cdot\vec{x}}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}\right)\Bigg|_{p^0=E(\vec{p})}$$

jueves, 07 de junio de 2007
09:10 a.m.

es el operador que crea o destruye una partícula en $\vec{x}$ al tiempo t: $\hat{\varphi}(x)|0\rangle = |x\rangle$.

Si esto es correcto, el propagador debe ser entonces

$$\langle x'|x\rangle = \left(\langle 0|\hat{\varphi}^\dagger(x')\right)\left(\hat{\varphi}(x)|0\rangle\right) = \langle 0|\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)|0\rangle$$

$$= \int\frac{d^{D-1}p'}{(2\pi)^{D-1}}\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p}\,')2E(\vec{p})}}\underbrace{\langle 0|\hat{a}_{\vec{p}'}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle}_{[\hat{a}_{\vec{p}'},\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}]=(2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}\,')} e^{i(p'\cdot x'-p\cdot x)}$$

$$= \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}2E(\vec{p})}e^{ip\cdot(x'-x)}\Big|_{p^0=E(\vec{p})},$$

que en efecto coincide con el propagador que obtuvimos antes para la partícula relativista libre. ✓

Y a partir de este resultado obtenemos también correctamente el propagador de Feynman

$$G(x',x) \equiv \langle x'|x\rangle\,\Theta(x'^0-x^0) + \langle x|x'\rangle\,\Theta(x^0-x'^0)$$

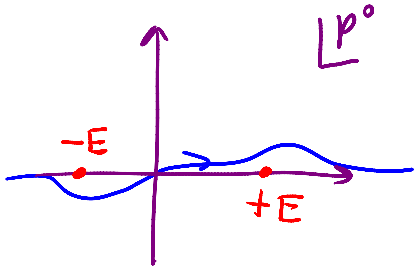
$$= \langle 0|\left(\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)\Theta(x'^0-x^0)+\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\Theta(x^0-x'^0)\right)|0\rangle$$

$$\equiv \langle 0|\,T\{\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)\}\,|0\rangle$$

↑ orden temporal

lunes, 11 de junio de 2007
07:26 p.m.

$$= -i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip\cdot(x'-x)}}{p^2+m^2}$$



Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre $\longleftrightarrow$ $\mathcal{L}$ cuadrático (ec. de mov. lineal)

$\longleftrightarrow$ Modos de Fourier desacoplados

$\longleftrightarrow$ Partículas no interactuantes

Si agregamos a $\mathcal{L}$ términos cúbicos en φ o más altos, la ec. de mov. para φ ya no será lineal, y los modos de Fourier $\varphi(\vec{p},t)$ no estarán ya desacoplados ($\therefore$ no serán modos normales). La situación se vuelve bastante confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula $|\vec{p}\rangle$ (y $\therefore$ también del vacío $|0\rangle$). P.ej., en este nuevo contexto se encuentra que $\hat{\varphi}$ no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\varphi}(\vec{p})|0\rangle \sim \alpha_1 |\vec{p}\rangle + \int \frac{d^{D-1}p'}{(2\pi)^{D-1} 2E(\vec{p}')} \alpha_2(\vec{p}') |\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \ldots$$

lunes, 11 de junio de 2007
07:40 p.m.

Si los términos no cuadráticos en $\mathcal{L}$ son 'pequeños', esperaríamos tener partículas 'no muy distintas' a las que encontramos antes, interactuando ahora débilmente entre sí. Es razonable entonces intentar avanzar usando un tratamiento perturbativo, donde partimos de las partículas libres como una primera aproximación, y tratamos a las interacciones como pequeñas correcciones.

Tomemos, p.ej.

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2}_{\equiv \mathcal{L}_0} \underbrace{- \frac{1}{3!}\lambda\varphi^3}_{\equiv \mathcal{L}_I}, \quad \text{con } \lambda \text{ pequeña}$$

Lagrangiano libre — Lagrangiano de interacción

Si ignoramos $\mathcal{L}_I$ para empezar (como si $\lambda=0$), tenemos un campo libre, y podemos descomponer a $\hat{\varphi}(x)$ como hicimos antes, en términos de operadores de creación y aniquilación $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}$.

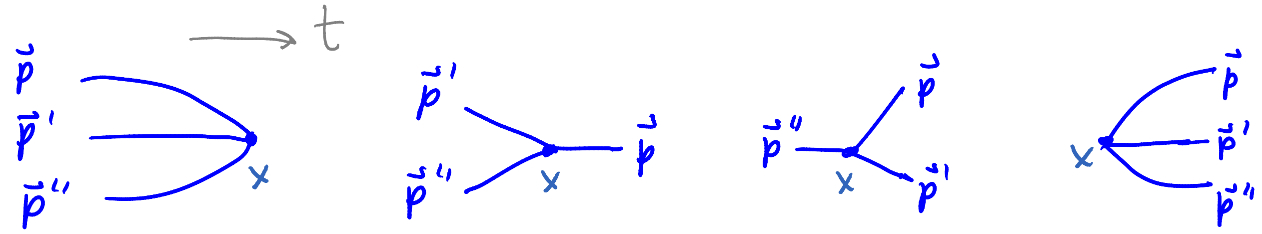
Notamos entonces que

$$\hat{\mathcal{L}}_I \sim \lambda \hat{\varphi}^3 \sim \lambda \left(\hat{a}_{\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}\,'}\, \hat{a}_{\vec{p}\,''} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\, \hat{a}_{\vec{p}\,'}\, \hat{a}_{\vec{p}\,''} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}\,'}\, \hat{a}_{\vec{p}\,''} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\, \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}\,'}\, \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}\,''} \right)$$

términos que al aparecer en el operador de evolución

$$\exp\left[-i(\hat{H}_0 + \hat{H}_I)t\right] \simeq \exp\left[-i\hat{H}_0 t\right]\left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{i\lambda}{3!}\int d^4x\, \hat{\varphi}^3(x) + \ldots\right)$$

conducen a la aniquilación/creación de un total de 3 partículas, en procesos que podemos representar como



(con $\vec{p}+\vec{p}\,'+\vec{p}\,''=0$ $\quad$ $\vec{p}\,'+\vec{p}\,''=\vec{p}$ $\quad$ $\vec{p}\,''=\vec{p}+\vec{p}\,'$ $\quad$ $0=\vec{p}+\vec{p}\,'+\vec{p}\,''$),

y cuya amplitud de probabilidad estará controlada por λ.

L22: 03/11/11

Resulta más fácil deducir los detalles de esta historia en el formalismo de cuantización por integral de trayectoria. Regresemos primero al caso $\lambda = 0$.

¿Cómo calcularíamos el propagador de Feynman $G(x', x)$ a través de una integral funcional?

lunes, 11 de junio de 2007
08:24 p.m.

La amplitud de evolución del campo estaría dada por

$$\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle \sim \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathcal{D}\varphi(x)\, e^{i\int d^D x\, \mathcal{L}}$$

← integral múltiple definida a través de discretización de tiempo y espacio: $\mathcal{D}\varphi(x) \equiv \prod_{t,\vec{x}} d\varphi_{t,\vec{x}}$

Aprendimos antes (pp. 140-141) que las funciones insertadas en el integrando de la integral de trayectoria corresponden en el formalismo canónico a operadores en orden temporal, así que

$$G(x',x) \equiv \langle 0 | T\{\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)\} | 0 \rangle$$

$$\propto \int \mathcal{D}\varphi(x)\, \varphi(x')\varphi(x)\, e^{i\int d^D x\, \mathcal{L}}.$$

← en principio debemos imponer condiciones inicial/final para $\varphi(x)$ que correspondan al vacío $|0\rangle$, pero más adelante veremos que esto no resulta crucial...

En la teoría libre tenemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, por lo que el propagador de Feynman libre es

miércoles, 13 de junio de 2007
07:35 p.m.

$$G_0(x',x) \equiv \langle 0 | \mathrm{T}\{\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x)\} | 0 \rangle$$

$$\propto \int \mathcal{D}\varphi(x)\ \varphi(x')\varphi(x)\ \underbrace{e^{i\int d^D x \frac{1}{2}(-\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)}}_{\overset{\text{partes}}{=} e^{i\int d^D x \frac{1}{2}\varphi \underbrace{(\partial^2 - m^2)}_{\equiv \Delta_x}\varphi}}$$

Esta integral es análoga a la integral múltiple

$$\int d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_N\ \ \varphi_n\ \varphi_{n'}\ \ \exp\Big[-\sum_{m,m'} \varphi_m A_{mm'} \varphi_{m'}\Big]$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_n}\frac{\partial}{\partial J_{n'}} \underbrace{\Big[\int d\varphi_1 \cdots d\varphi_N\ e^{-\sum_{m,m'} \varphi_m A_{mm'}\varphi_{m'} + \sum_m \varphi_m J_m}\Big]}_{\text{Integral gaussiana (que sabemos hacer completando el cuadrado)}}\Bigg|_{J_m = 0\ \forall m}$$

De manera similar podemos reescribir

$$G_0(x',x) \propto \frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\Big[\int \mathcal{D}\varphi(x)\ e^{\int d^D x\,\left(\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi + J(x)\varphi(x)\right)}\Big]_{J(x)=0}\ ,$$

donde $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ denota una derivada funcional definida a través de

$$\frac{\delta J(x')}{\delta J(x)} = \delta^{(D)}(x-x') \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta J(x)}\left[\int d^D y\, J(y)\varphi(y)\right] = \varphi(x)$$

(en completa analogía con

$$\frac{\partial J_m}{\partial J_n} = \delta_{m,n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial J_n}\left[\sum_m J_m \varphi_m\right] = \varphi_n \quad).$$

Tenemos entonces que hacer la integral funcional gaussiana

$$\int \mathcal{D}\varphi(x)\, \exp\left[\int d^D x \left(\frac{i}{2}\varphi \Delta_x \varphi + J\varphi\right)\right]$$

Para completar el cuadrado, correremos la variable de la integración funcional,

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \int d^D x'\, \Delta^{-1}(x,x') J(x') \quad (\Rightarrow \mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\tilde{\varphi}),$$

con $\Delta^{-1}(x,x')$ la 'función de Green' tal que

$$\Delta_x \Delta^{-1}(x,x') = \left(\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - m^2\right)\Delta^{-1}(x,x') = i\delta^{(D)}(x-x')$$

(determinaremos $\Delta^{-1}(x,x')$ un poco más adelante).

Usando $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + \int d^D x'\, \Delta^{-1}(x,x') J(x')$ tenemos

$$\Delta_x \varphi(x) = \Delta_x \tilde{\varphi}(x) + \int d^D x' \underbrace{\Delta_x \Delta^{-1}(x,x')}_{i\delta^{(D)}(x-x')} J(x') = \Delta_x \tilde{\varphi}(x) + iJ(x),$$

de modo que

$$\frac{i}{2}\int d^D x\, \varphi \Delta_x \varphi = \frac{i}{2}\int d^D x \left(\tilde\varphi(x) + \int d^D x' \Delta^{-1}(x,x')J(x')\right)\left(\Delta_x \tilde\varphi(x) + i J(x)\right)$$

$$= \frac{i}{2}\int d^D x \Big[\tilde\varphi(x)\Delta_x\tilde\varphi(x) + i\int d^D x'\, J(x)\Delta^{-1}(x,x')J(x')$$

$$+ i\tilde\varphi(x)J(x) + \underbrace{\int d^D x'\, \Delta_x\tilde\varphi(x)\,\Delta^{-1}(x,x')J(x')}_{\tilde\varphi(x)\int d^D x'\, i\delta^{(D)}(x-x')J(x') = i\tilde\varphi(x)J(x)}\Big]$$

partes

$$= \int d^D x \left[\frac{i}{2}\tilde\varphi(x)\Delta_x\tilde\varphi(x) - \frac{1}{2}\int d^D x' J(x)\Delta^{-1}(x,x')J(x') - \tilde\varphi(x)J(x)\right],$$

y

se cancelan los términos lineales en $\tilde\varphi$ ✓

$$\int d^D x\, \varphi J = \int d^D x\left[\tilde\varphi(x)J(x) + \int d^D x' J(x)\Delta^{-1}(x,x')J(x)\right].$$

Vemos entonces que

$$\int \mathcal{D}\varphi(x)\, e^{\int d^D x\left[\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi + J\varphi\right]} = \underbrace{e^{\frac{1}{2}\int d^D x\, d^D x' J(x)\Delta^{-1}(x,x')J(x')}}_{1+\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J\right)^2 + \dots}\ \underbrace{\int \mathcal{D}\tilde\varphi(x)\, e^{\int d^D x\left[\frac{i}{2}\tilde\varphi\Delta_x\tilde\varphi\right]}}_{\propto \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det}\Delta_2}}},$$

, pero no nos importa...

a partir de lo cual podemos deducir que

jueves, 14 de junio de 2007
07:55 a.m.

$$\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x')\, e^{\int d^Dx\left(\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi\right)} = \frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\left[\int \mathcal{D}\varphi\, e^{\int d^Dx\left(\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi + J\varphi\right)}\right]_{J=0}$$

$$= \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\left[\cancelto{0}{1} + \frac{1}{2}\int d^Dy\, d^Dy'\, J(y)\Delta^{-1}(y,y')J(y') + \cancelto{0}{\ldots}\right]_{J=0}}_{\frac{\delta}{\delta J(x)}\left[\frac{1}{2}\int d^Dy\, d^Dy' \underbrace{\left(\delta^{(D)}(y-x')\Delta^{-1}(y,y')J(y') + J(y)\Delta^{-1}(y,y')\delta^{(D)}(y'-x')\right)}_{\frac{1}{2}\int d^Dy'\,\Delta^{-1}(x',y')J(y') + \frac{1}{2}\int d^Dy\, J(y)\Delta^{-1}(y,x')}\right]} \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}\, e^{\int d^Dx\left(\frac{i}{2}\tilde{\varphi}\Delta_x\tilde{\varphi}\right)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int d^Dy'\,\Delta^{-1}(x',y')J(y') + \frac{1}{2}\int d^Dy\, J(y)\Delta^{-1}(y,x')}_{\frac{1}{2}\Delta^{-1}(x',x) + \frac{1}{2}\Delta^{-1}(x,x') = \Delta^{-1}(x,x')}$$

$$= \Delta^{-1}(x,x')\int \mathcal{D}\varphi\, e^{\int d^Dx\left(\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi\right)}$$

Sabemos que el propagador de Feynman en la teoría libre,

$$G_0(x,x') \equiv \langle 0|T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\}|0\rangle = -i\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{e^{ip\cdot(x-x')}}{p^2+m^2},$$

es proporcional a este resultado. Pero notando que

$$\Delta_x G_0(x,x') = -i(\partial^2 - m^2)\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{e^{ip\cdot(x-x')}}{p^2+m^2} = -i\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{(-p^2-m^2)e^{ip\cdot(x-x')}}{p^2+m^2}$$

$$= i\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}e^{ip\cdot(x-x')} = i\,\delta^{(D)}(x-x'),$$

Vemos que de hecho

$$G_0(x,x') = \Delta^{-1}(x,x'),$$

así que conocemos la constante de proporcionalidad, y en conjunto hemos mostrado entonces que, en la teoría libre,

$$G_0(x,x') \equiv \langle 0| T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\} |0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x')\varphi(x)\, e^{i\int d^D x\, \mathcal{L}_0}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^D x\, \mathcal{L}_0}}.$$

(Notar que las condiciones inicial/final para $\int \mathcal{D}\varphi$, que determinan el ket y el bra entre los cuales estamos 'ensandwichando', se cancelan en el cociente de la derecha.)

En la teoría interactuante, donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, se puede mostrar el resultado análogo

$$\boxed{G(x,x') \equiv \langle \Omega| T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\} |\Omega\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x')\, e^{i\int d^D x\, (\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I)}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^D x\, (\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I)}}}$$

propagador interactuante — campo interactuante — vacío en teoría interactuante

Este resultado es exacto. Pero si "$\mathcal{L}_I \ll \mathcal{L}_0$", las integrales funcionales se pueden aproximar con una expansión perturbativa.

jueves, 14 de junio de 2007
08:40 a.m.

P.ej., si $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{3!}\varphi^3$, entonces

$$e^{i\int d^Dx(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I)} = e^{i\int d^Dx\,\mathcal{L}_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^Dy\,\varphi(y)^3\right)^n$$

y para λ pequeña parecería razonable retener solo los primeros términos en la suma sobre n.

Utilizando de nuevo el truco de diferenciación funcional, tenemos entonces

$$\int\mathcal{D}\varphi\,\varphi(x)\varphi(x')\,e^{i\int d^Dx(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\mathcal{D}\varphi\,\varphi(x)\varphi(x')\left(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^Dy\,\varphi(y)^3\right)^n e^{i\int d^Dx\,\mathcal{L}_0}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\left(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^Dy\frac{\delta^3}{\delta J(y)^3}\right)^n\underbrace{\left[\int\mathcal{D}\varphi\,e^{\int d^Dx\left(\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi+J\varphi\right)}\right]_{J=0}}_{e^{\frac{1}{2}\int d^Dz\,d^Dz'\,J(z)\underbrace{\Delta^{-1}(z,z')}_{G_0(z,z')}J(z')}\int\mathcal{D}\varphi\,e^{i\int d^Dx\,\mathcal{L}_0}}$$

Veamos ahora que forma tienen los primeros términos en esta serie en potencias de λ.

$$n=0: \qquad \lambda^0 \Delta^{-1}(x,x') = \lambda^0 G_0(x,x') \qquad \left(\times \int D\varphi\, e^{iS_0}\right)$$

$$n=1: \qquad \lambda^1 \cdot 0 = 0$$

$$n=2: \qquad \lambda^2 \frac{1}{2!(3!)^2} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left(-i\int d^D y \frac{\delta^3}{\delta J(y)^3}\right)\left(-i\int d^D y' \frac{\delta^3}{\delta J(y')^3}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{4!\,2^4}\left(\int d^D z_1 d^D z_1' J(z_1)\Delta^{-1}(z_1,z_1')J(z_1')\right)\left(\int d^D z_2 d^D z_2' J(z_2)\Delta^{-1}(z_2,z_2')J(z_2')\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int d^D z_3 d^D z_3' J(z_3)\Delta^{-1}(z_3,z_3')J(z_3')\right)\left(\int d^D z_4 d^D z_4' J(z_4)\Delta^{-1}(z_4,z_4')J(z_4')\right)\right]_{J=0}$$

$$= \frac{1}{4}(-i\lambda)^2 \int d^D y\, d^D y'\, G_0(x,y)\, G_0(y,y')^2 G_0(y',x')$$

$$+ 1\cdot(-i\lambda)^2 \int d^D y\, d^D y'\, G_0(x,y) G_0(y,y)\cdot G_0(y',y') G_0(y',x')$$

$$+ \frac{1}{12}(-i\lambda)^2 \int d^D y\, d^D y'\, G_0(y,y')^3 \cdot G_0(x,x')$$

$\vdots$

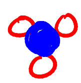
La idea general se puede representar de manera diagramática:

denotando $\Delta^{-1}(x,x') = G_0(x,x') \equiv$ 

,

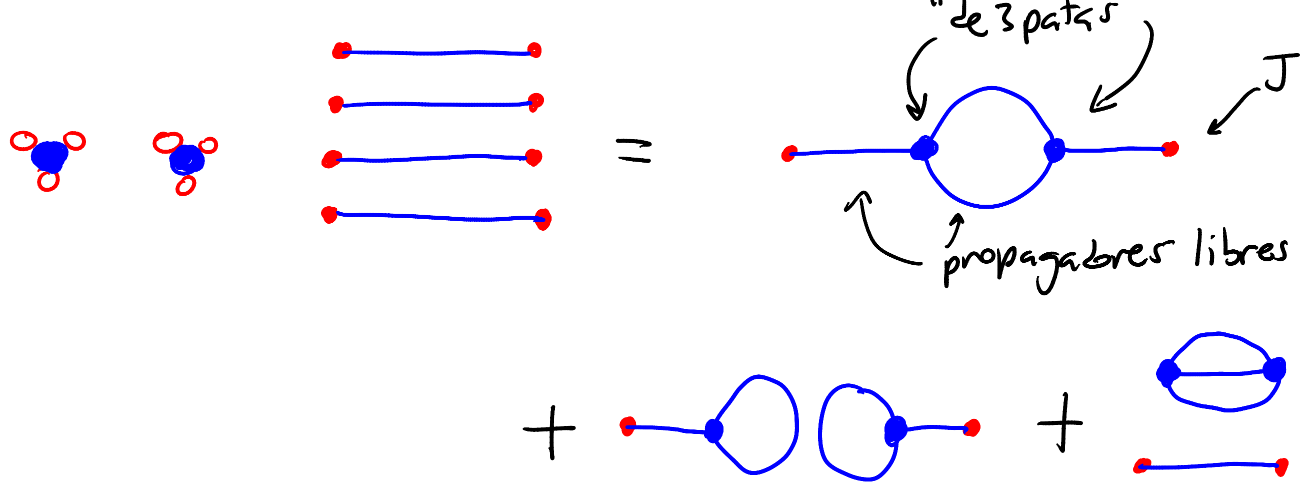
$J\cdot\Delta^{-1}\cdot J \equiv \int d^D z\, d^D z'\, J(z) G_0(z,z') J(z') \equiv$ 

,

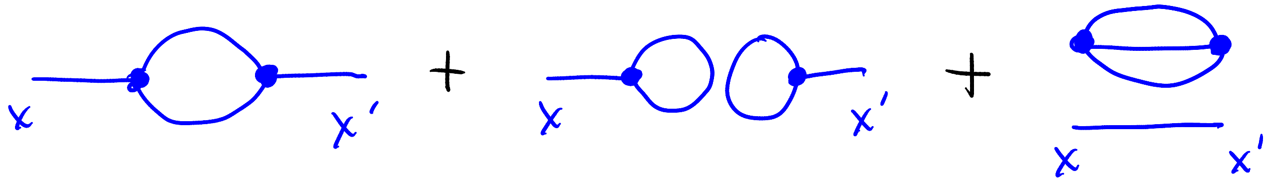
$-i\lambda \int d^D y \frac{\delta^3}{\delta J(y)^3} \equiv$ 
,

lunes, 18 de junio de 2007
08:14 p.m.

donde el efecto de cada "o" ($\equiv$ derivada funcional $\delta/\delta J$) es pegarse a y eliminar una "•" ($\equiv J$),
vemos que el término de orden λ^2 es $\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}$
actuando sobre



Al tomar las últimas 2 derivadas $\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')} \equiv \underset{x}{\circ}\ \ \underset{x'}{\circ}$,
obtenemos los 3 diagramas



,

que representan precisamente a los 3 términos que escribimos más arriba (notar que hemos adoptado la convención de que cualquier posición no etiquetada debe integrarse sobre todo el espaciotiempo).