martes, 29 de mayo de 2007
08:04 a.m.

Notemos que en el espacio de estados <u>físicos</u>

$$\hat{\mathbb{1}} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} |p\rangle\langle p| \longrightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \delta(p^2+m^2) \underbrace{\Theta(p^0)}_{} |p\rangle\langle p|$$

función escalón: $\Theta(p^0) \equiv \begin{cases} 1 & p^0 \geq 0 \\ 0 & p^0 < 0 \end{cases}$

y que usando $\delta(f(x)) = \sum_{\substack{\text{raíces} \\ \text{de } f}} \frac{\delta(x-x_r)}{|f'(x_r)|}$,

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \delta(\underbrace{p^2+m^2}_{-(p^0)^2+\vec{p}^{\,2}+m^2}) \Theta(p^0) |p\rangle\langle p| = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta(p^0 - E(\vec{p}))}{|-2p^0|} |p\rangle\langle p|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^{D-1} p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2E(\vec{p})} |E(\vec{p}),\vec{p}\rangle\langle E(\vec{p}),\vec{p}|,$$

que (salvo el cambio de normalización $|\vec{p}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |E(\vec{p}),\vec{p}\rangle$) coincide con lo que teníamos en la opción I), y confirma de paso que la combinación $\frac{d^{D-1}p}{E(\vec{p})}$ es invariante de Lorentz.

Dado que ahora $H=0$, los estados no 'evolucionan' con respecto a τ, $|\psi(\tau)\rangle = \exp(-i\hat{H}\tau)|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle$, pero la evolución temporal relevante (con respecto a algún X^0) se deduce a partir del operador de

martes, 29 de mayo de 2007
08:21 a.m.

translación en el espaciotiempo,

$$\hat{T}(a_\mu) \equiv e^{-i a_\mu \hat{p}^\mu} \quad \text{(covariante de Lorentz).}$$

En particular, $\hat{T}((t,\vec{0})) = e^{-i\hat{p}^0 t}$ da la fase esperada $\exp[-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\, t]$ al actuar sobre $|E(\vec{p}),\vec{p}\rangle$.

Ahora, ¿cómo llevaríamos a cabo la cuantización no por el método canónico, sino a través de la integral de trayectoria?

Tenemos $S[X^\mu(\tau)] = -m\int d\tau\, \sqrt{-\dot{X}^2}$,

así que esperaríamos que la amplitud de que la partícula vaya de x a x' esté dada por

$$G(x' \leftarrow x) \sim \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X^\mu(1)=x'^\mu} \mathcal{D}X^\mu(\tau)\, \exp\left[-im\int_0^1 d\tau\, \sqrt{-\dot{X}^2}\right]$$

↑ Definimos arbitrariamente los límites del intervalo de τ

Pero tenemos aquí 2 problemas. Uno es práctico: no sabemos hacer esta integral funcional, porque no es gaussiana.

martes, 29 de mayo de 2007
08:41 a.m.

Nos conviene por tanto 'reescribir' la acción como una expresión cuadrática en $\dot{X}^\mu(\tau)$, lo cual es posible si nos inventamos una variable auxiliar $g_{\tau\tau}(\tau)$:

$$\tilde{S}[X^\mu, g_{\tau\tau}] \equiv -\frac{m}{2}\int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}}\left(\frac{\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu}{g_{\tau\tau}} + 1\right).$$

Esta acción es <u>equivalente</u> a $S[X^\mu]$, en el sentido de que la ecuación de movimiento para $g_{\tau\tau}(\tau)$,

$$\cancelto{0}{\partial_\tau\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial_\tau g_{\tau\tau})}\right)} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial g_{\tau\tau}} \longleftrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial g_{\tau\tau}}\left(\frac{\dot{X}^2}{\sqrt{-g_{\tau\tau}}} - \sqrt{-g_{\tau\tau}}\right)$$

$$= +\frac{1}{2}(-g_{\tau\tau})^{-3/2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(-g_{\tau\tau})^{-1/2}$$

$$\Longrightarrow \quad g_{\tau\tau}(\tau) = \dot{X}^2 = \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu \eta_{\mu\nu},$$

y tenemos

$$\tilde{S}[X^\mu, g_{\tau\tau} = \dot{X}^2] = \frac{m}{2}\int d\tau\left(\frac{\dot{X}^2}{\sqrt{-\dot{X}^2}} - \sqrt{\dot{X}^2}\right)$$

$$= -m\int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2} = S[X^\mu]$$

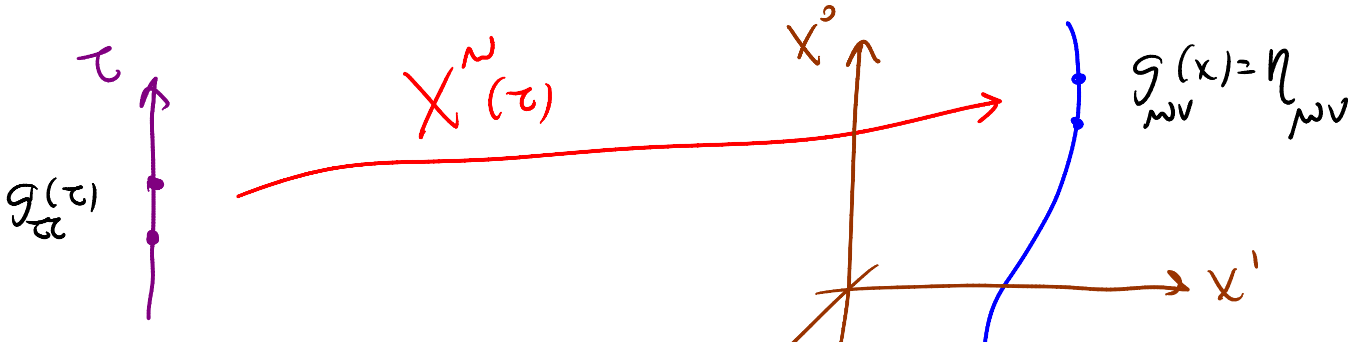
Podemos usar $\therefore$ $\tilde{S}$ en lugar de S.

A partir de su identificación con $\dot{X}^2 = \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu \eta_{\mu\nu}$, vemos que $g_{\tau\tau}(\tau)$ transforma como un tensor de rango $(0,2)$ bajo reparametrizaciones de τ (es decir, debe transformar así para que $\tilde{S}$ sea correctamente invariante bajo estas reparametrizaciones).

De hecho, definiendo $g^{\tau\tau} \equiv 1/g_{\tau\tau}$, vemos a partir de la forma de la acción,

$$\tilde{S}[X^\mu, g_{\tau\tau}] = -\frac{m}{2}\int \underbrace{d\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}}}_{\substack{\text{elemento de}\\ \text{volumen invariante}}}\Big(\underbrace{g^{\tau\tau}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu}_{\substack{\text{Norma de vector}\\ \text{dual } \partial_\tau X^\mu}} + 1\Big),$$

que $g_{\tau\tau}(\tau)$ se puede interpretar como una métrica en el espacio ficticio 1-dimensional:



2 posibles nociones de distancia:

$g_{\tau\tau}(\tau)$ Métrica intrínseca vs. $h_{\tau\tau}(\tau) \equiv \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu \eta_{\mu\nu}$ Métrica inducida

Hemos visto que la ec. de mov. de $g_{\tau\tau}$ es justamente $g_{\tau\tau}(\tau)=h_{\tau\tau}(\tau)$, y requiere ∴ que la métrica intrínseca coincida con la inducida.

(En los libros usualmente uno encuentra $\tilde{S}$ escrita en términos de la 'uno-pata' o 'einbein' $e \equiv \sqrt{-g_{\tau\tau}}$.)

Cambiando de S a $\tilde{S}$, esperaríamos tener

$$G(x' \leftarrow x) \sim \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X^\mu(1)=x'^\mu} \mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau)\,\mathcal{D}X^\mu(\tau)\, e^{i\tilde{S}[X,g]}$$

Aquí hemos logrado nuestro objetivo de que la integral sobre $X^\mu(\tau)$ sea gaussiana. ¡Pero ahora tenemos la integral sobre $g_{\tau\tau}$, que no lo es! Y todavía tenemos otro problema: por ser $\tilde{S}[X,g]$ invariante bajo reparametrizaciones en τ, sabemos que tenemos una redundancia en nuestra descripción:

$$\left(X^\mu(\tau), g_{\tau\tau}(\tau)\right) \quad \text{y} \quad \left(X'^\mu(\tau), g'_{\tau\tau}(\tau)\right)$$

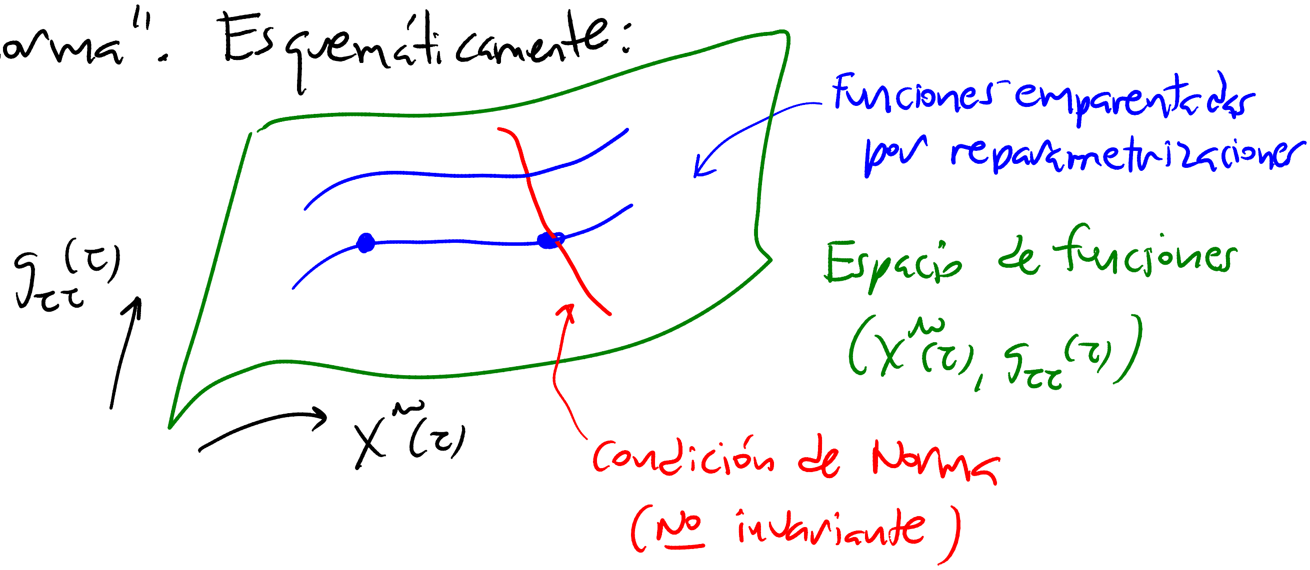
describen la <u>misma</u> trayectoria física si existe una función $\tau'(\tau)$ tal que $X'^\mu(\tau')=X^\mu(\tau)$ y $g'_{\tau\tau}(\tau')=\left(\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\right)^2 g_{\tau\tau}(\tau)$.

Así que si integramos libremente sobre todas las elecciones de $(X^\mu(\tau), g_{\tau\tau}(\tau))$, ¡estaríamos contando cada trayectoria física un número infinito de veces!

En realidad debemos escribir

$$G(x' \leftarrow x) = \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X^\mu(1)=x'^\mu} \frac{\mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau)\, \mathcal{D}X^\mu(\tau)}{\text{Reparametrizaciones}} \; e^{i\tilde{S}[X,g]}$$

Es decir, necesitamos eliminar la redundancia, "fijar la norma". Esquemáticamente:



Lo interesante es que, ahora que además del parámetro τ nos hemos inventado la variable auxiliar $g_{\tau\tau}(\tau)$, podemos fijar la norma (= especificar τ) de manera covariante bajo Lorentz, imponiendo una condición no sobre una de las $X^\mu(\tau)$, sino sobre $g_{\tau\tau}(\tau)$. Eliminamos la redundancia por completo si pedimos que $g_{\tau\tau}(\tau) = \text{cte}$. (dada cualquier métrica en 1 dim, existe una y solo una reparametrización que la hace independiente de τ). Notar sin embargo que

$$\int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \equiv T$$ es invariante bajo reparametrizaciones

en τ, así que no podemos elegir libremente el valor constante de la métrica: debemos poner $g_{\tau\tau}(\tau) = -T^2$, y, para incluir todas las trayectorias físicas distintas, integrar sobre todos los valores posibles de T.

Es decir,

$$\int \frac{Dg_{\tau\tau}(\tau)\, DX^{\mu}(\tau)}{\text{Reparametrizaciones}} = \int_0^{\infty} dT \underbrace{f(T)}_{\text{función por determinar}} \int DX^{\mu}(\tau)$$

Aquí vemos que, sorprendentemente, nuestros 2 problemas se han cancelado uno al otro: la redundancia en la descripción nos permite no tener que hacer la integral funcional sobre $g_{\tau\tau}(\tau)$. La deducción de $f(T)$ es sutil. Requiere mucho cuidado para definir las "medidas" $DX^{\mu}(\tau)$

jueves, 31 de mayo de 2007
08:39 a.m.

y $\mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau)$ de manera invariante bajo reparametrizaciones en τ

(p.ej., $\int \mathcal{D}_g X^\mu(\tau) \equiv \lim_{N\to\infty} \int \sqrt{g_{N-1,N-1}}\, d^D X_{N-1} \cdots \sqrt{g_{11}}\, dX_1$

$$= \prod_\tau \int d^D X_\tau \left[\sqrt{\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau)}}\,\right]^D \Bigg) ,$$

e involucra el llamado "método de Faddeev-Popov" para fijar la norma dentro de las integrales de trayectoria), pero al final arroja el sencillo resultado $f(T)=1$.

L19: 20/10/11

Llegamos entonces a

$$G(x'\leftarrow x) = \int_0^\infty dT \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X^\mu(1)=x'^\mu} \mathcal{D}X^\mu\, e^{i\frac{m}{2}\int_0^1 d\tau\left(\frac{\dot{X}^2}{T}-T\right)}$$

(Notar que hemos escogido unidades

$[\tau]=L^0 \implies [\dot{X}]=L,\ [g_{\tau\tau}]=L^2,\ [T]=L.$)

La ec. de mov. que se deduce del lagrangiano

$$L=\frac{m}{2}\left(\frac{\dot{X}^2}{T}-T\right) \quad \text{es}$$

$$\partial_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu}\right) = \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial X^\mu}} \implies \ddot{X}^\mu = 0$$

$$\implies X^\mu(\tau) = a^\mu + b^\mu \tau$$ Línea recta en espaciotiempo. ✓

Podemos extraer de la integral funcional $\int \mathcal{D}X^\mu(\tau)$ la dependencia de x^μ y x'^μ haciendo un cambio de variable (función) de integración $X^\mu(\tau) \to Y^\mu(\tau)$, con

$$X^\mu(\tau) \equiv \underbrace{x^\mu + (x'^\mu - x^\mu)\tau}_{\substack{\text{Solución de ec. de mov. que} \\ \text{satisface } X^\mu(0)=x^\mu,\ X^\mu(1)=x'^\mu}} + \underbrace{Y^\mu(\tau)}_{\substack{\text{Función arbitraria} \\ \text{tal que } Y^\mu(0)=0=Y^\mu(1)}}$$

$$\Rightarrow \dot{X}^\mu(\tau) = (x'^\mu - x^\mu) + \dot{Y}^\mu(\tau)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau\, \dot{X}^2 = (x'-x)^2 + \underbrace{2(x'-x)_\mu \cancelto{0}{\int_0^1 d\tau\, \partial_\tau Y^\mu}}_{\text{Se anula porque extremizamos la acción}} + \int_0^1 d\tau\, \dot{Y}^2 .$$

Dado que

$$\mathcal{D}X^\mu(\tau) \propto \lim_{N\to\infty} \int d^D X(\tau_1) \cdots d^D X(\tau_{N-1}) ,$$

$$\mathcal{D}Y^\mu(\tau) \propto \lim_{N\to\infty} \int d^D Y(\tau_1) \cdots d^D Y(\tau_{N-1}) ,$$

y en cada τ_n dado, $X^\mu(\tau_n)$ y $Y^\mu(\tau_n)$ difieren solo por una <u>constante</u>,

$$X^\mu(\tau_n) = (x'^\mu - x^\mu)\tau_n + Y^\mu(\tau_n) ,$$

tenemos $\mathcal{D}X^\mu(\tau) = \mathcal{D}Y^\mu(\tau)$ (el jacbiano es 1).

jueves, 31 de mayo de 2007
09:13 a.m.

Llegamos entonces a

$$G(x'\leftarrow x) = \int_0^\infty dT\, e^{i\frac{m}{2T}(x'-x)^2 - i\frac{m}{2}T} \underbrace{\int_{Y(0)=0}^{Y(1)=0} DY^{\mu}(\tau)\; e^{i\frac{m}{2T}\int_0^1 d\tau\, \dot{Y}^2}}_{\text{Nos interesa solo dependencia de } T}$$

Recordando incluir en $DY^{\mu}(\tau)$ los factores necesarios para preservar la invariancia bajo reparametrizaciones $\left((-g_{\tau\tau}(\tau))^{1/4}\right)$, se encuentra que la integral gaussiana $\propto T^{-D/2}$, así que

$$G(x'\leftarrow x) = \int_0^\infty dT\; T^{-D/2}\; e^{i\frac{m}{2T}(x'-x)^2 - i\frac{m}{2}T}$$

$$\overset{t\equiv T/m}{\propto} \int_0^\infty dt\; t^{-D/2}\; e^{i\frac{(x'-x)^2}{2t} - \frac{i}{2}m^2 t}$$

Completar cuadrado y hacer D integrales gaussianas

$$\propto \int_0^\infty dt \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{-\frac{i}{2}(m^2+p^2)t + ip\cdot(x'-x)}$$

y haciendo la integral sobre t, obtenemos finalmente

$$\boxed{G(x'\leftarrow x) = -i\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \frac{e^{ip\cdot(x'-x)}}{p^2+m^2}}$$

(hemos fijado a mano la constante de proporcionalidad; confirmaremos que es correcta un poco más abajo).

lunes, 04 de junio de 2007
08:34 p.m.

Notemos que este propagador $\underline{\underline{\text{no}}}$ coincide con el resultado que obtuvimos por cuantización canónica,

$$\langle x'|x\rangle = \langle \vec{x}'|\, e^{-i\hat{H}(x'^0 - x^0)}|\vec{x}\rangle$$

$$= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}\, 2E(\vec{p})}\, e^{ip\cdot(x'-x)}\Big|_{p^0 = E(\vec{p})}$$

La razón es algo sutil: el punto es que en la integral de trayectoria usamos $X^\mu(0) = x^\mu$, $X^\mu(1) = x'^\mu$ y

$$S[X] = -m\int_0^1 d\tau\, \sqrt{(\dot{X}^0)^2 - \dot{\vec{X}}^2} = -m\int_0^1 d\tau\, |\dot{X}^0|\sqrt{1-\vec{v}^2}$$

$$= \begin{cases} -m\displaystyle\int_{x^0}^{x'^0} dx^0\sqrt{1-\vec{v}^2} & \text{si } x'^0 > x^0 \\[2ex] -m\displaystyle\int_{x'^0}^{x^0} dx^0\sqrt{1-\vec{v}^2} & \text{si } x^0 > x'^0 \end{cases}.$$

Es decir, si bien la integral funcional siempre calcula una amplitud de "evolución en τ desde $\tau = 0$ hasta $\tau = 1$", con respecto al verdadero tiempo x^0 nos da $\langle x'|x\rangle$ si $x'^0 > x^0$, pero $\langle x|x'\rangle = \langle x'|x\rangle^*$ si $x^0 > x'^0$.

lunes, 04 de junio de 2007
08:49 p.m.

Y en efecto, podemos verificar que

$$G(x',x) = \underbrace{\theta(x'^0-x^0)}_{\text{función escalón}}\langle x'|x\rangle + \theta(x^0-x'^0)\langle x|x'\rangle$$

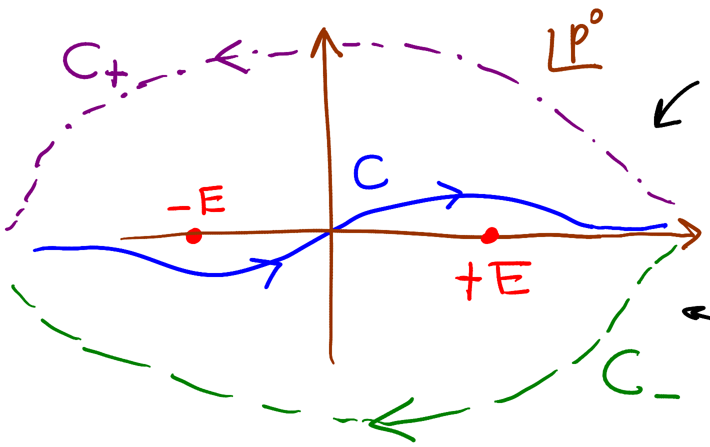
$$= \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}2E(\vec{p})}\, e^{-iE(x'^0-x^0)+i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\,\theta(x'^0-x^0) + \underbrace{\int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}2E(\vec{p})}\, e^{-iE(x^0-x'^0)+i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,\theta(x^0-x'^0)}_{\int\frac{d^{D-1}(-p)}{(2\pi)^{D-1}2E(-\vec{p})}\, e^{+iE(x'^0-x^0)+i(-\vec{p})\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\,\theta(x^0-x'^0)}$$

$$= \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\left[\frac{e^{-iE(x'^0-x^0)}}{2E}\theta(x'^0-x) + \frac{e^{+iE(x'^0-x^0)}}{2E}\theta(x^0-x'^0)\right]$$

que usando el teorema de Cauchy, $\oint\frac{dz\, f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$,

se puede reescribir en la forma

$$G(x',x) = \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\left[-\int_C\frac{dp^0}{2\pi i}\,\frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E)(p^0+E)}\right],$$



Cuando $x^0 > x'^0$, podemos agregar C_+ (porque $\exp[ip^0(x^0-x'^0)]\to 0$ ahí) y obtenemos residuo en $p^0=-E$.

Cuando $x'^0 > x^0$, agregamos C_- y obtenemos residuo en $p^0=+E$.

lunes, 04 de junio de 2007
10:30 p.m.

es decir,

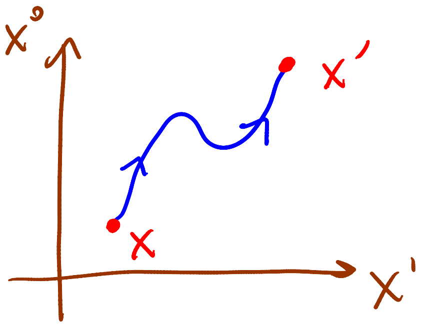
$$G(x',x) = i\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \frac{e^{ip\cdot(x'-x)}}{\underbrace{(p^0)^2 - \overbrace{E^2}^{\vec{p}^{\,2}+m^2}}_{-p^2-m^2}} = -i\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \frac{e^{ip\cdot(x'-x)}}{p^2+m^2}$$

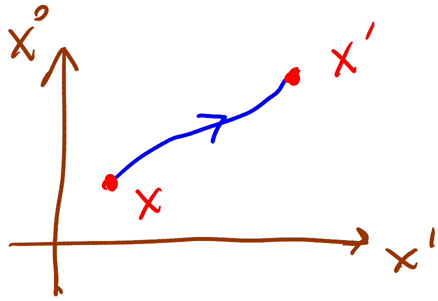
Este es el llamado propagador de Feynman.

Vale la pena resaltar que en

$$S[X] = -m\int_0^1 d\tau\, |\dot{X}^0(\tau)|\, \sqrt{1-\vec{v}^{\,2}}\ ,$$

el valor absoluto es realmente necesario, porque la integral $\int DX^\mu(\tau)$ incorpora todas las trayectorias que conectan al punto inicial con el final, incluyendo a aquellas que no son monotónicas con respecto a x^0, las cuales efectivamente deben estar pesadas por un exponencial distinto a las que sí lo son.





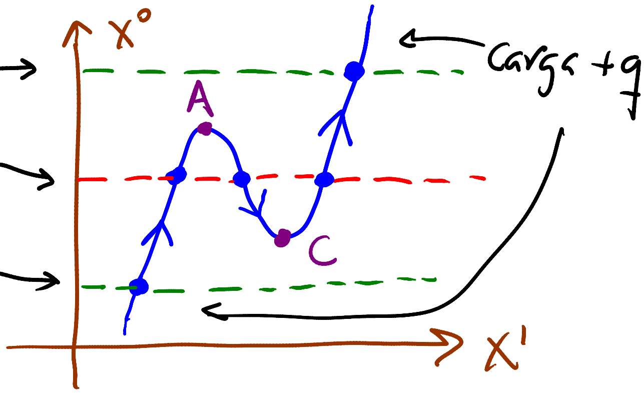
Pero, ¿cuál sería la interpretación física de trayectorias que retroceden en el tiempo?

martes, 05 de junio de 2007
07:24 a.m.

Aquí vemos 1 partícula →

¡¡ Aquí vemos $\underline{\underline{3}}$ partículas !! →

Aquí vemos 1 partícula →



Dado que la carga total debe conservarse, el tramo AC de la trayectoria, donde la partícula "se mueve hacia atrás en el tiempo", debe describir a un objeto con carga $-q$: es en realidad una antipartícula, moviéndose, como Dios manda, hacia adelante en el tiempo. El evento C en el diagrama corresponde por tanto a la creación de un par partícula-antipartícula; el evento A describe la aniquilación de un par.

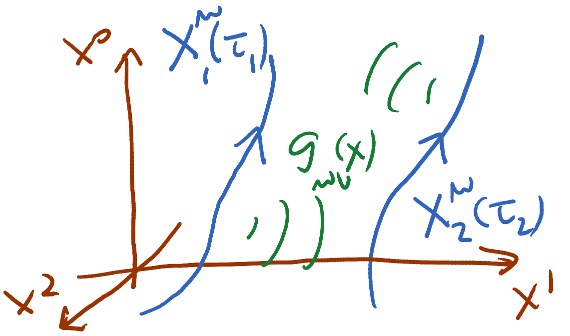
Con esto comenzamos a vislumbrar un resultado más general: al combinar a la mecánica cuántica con la relatividad especial, ¡¡nos vemos forzados a considerar procesos en los cuales el número total de partículas cambia!!

L^{20}: 25/10/11

Ahora, ¿cómo podemos describir a partículas <u>interactuantes</u>?

Sabemos, p.ej., como acoplar a una partícula al campo gravitacional (= métrica) $g_{\mu\nu}(x)$, así que podemos describir a 2 partículas que interactuan a través de este campo usando la acción

$$S[X_1^\mu(\tau_1), X_2^\mu(\tau_2), g_{\mu\nu}(x)] = \sum_{n=1}^{2}\left(-m_n\int d\tau_n \sqrt{-\dot X_n^\mu \dot X_n^\nu g_{\mu\nu}(X_n(\tau_n))}\right)$$



$$+\underbrace{\frac{1}{16\pi G_N}\int \overbrace{d^Dx\sqrt{-g}}^{\text{volumen invariante}}\, \underset{\text{escalar de curvatura}}{R}}_{\text{Acción de Einstein-Hilbert}}$$

Otro ejemplo más sencillo sería el de partículas acopladas al campo electromagnético $A_\mu(x)$. La ecuación de Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$ se obtiene al variar la acción

$$S_{\text{Maxwell}}[A_\mu] + S_{\text{int}}[A_\mu, J^\nu] = -\frac{1}{8\pi}\int d^Dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int d^Dx\, A_\mu(x) J^\mu(x),$$

y la corriente electromagnética asociada a una carga puntual

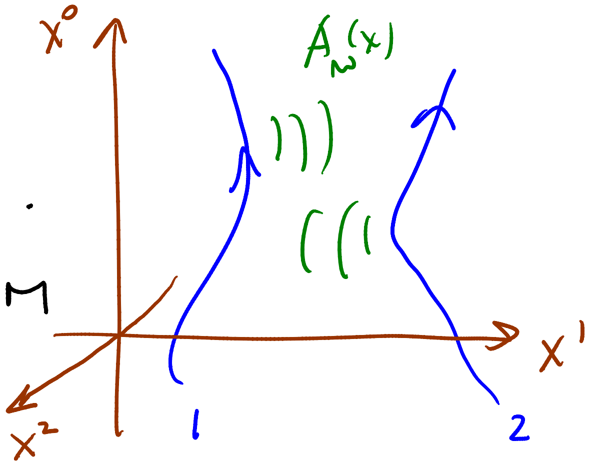
$$J^\mu(x) = q\int d\tau\, \dot X^\mu(\tau)\, \delta^{(D)}(x^\mu - X^\mu(\tau)) = q\cancel{\int dX^0}\begin{pmatrix}1\\ \vec v\end{pmatrix}\cancel{\delta(x^0 - X^0)}\,\delta^{(D-1)}(\vec x - \vec X(x^0))$$

martes, 05 de junio de 2007
08:14 a.m.

así que el acoplamiento entre una partícula y $A_\mu(x)$ es

$$\int d^D x\, A_\mu(x)\, q \int d\tau\, \partial_\tau X^\mu(\tau)\, \delta^{(D)}(x - X(\tau))$$

$$= q \int d\tau\, A_\mu(X(\tau))\, \partial_\tau X^\mu(\tau) .$$



Dos partículas con interacción EM se cuantizan entonces usando

$$S[X_1^\mu(\tau_1), X_2^\mu(\tau_2), A_\mu(x)] = S_{part} + S_{int} + S_{Maxwell}$$

$$= \sum_{n=1}^{2} \left(-m_n \int d\tau_n \sqrt{-\dot{X}_n^2} + q_n A_\mu(X_n(\tau_n)) \dot{X}^\mu(\tau_n) \right) - \frac{1}{8\pi} \int d^D x\, F^2$$

e integrando sobre $\mathcal{D}X_1^\mu(\tau_1)\, \mathcal{D}X_2^\mu(\tau_2)\, \mathcal{D}A_\mu(x)$

(de hecho, fue así como Feynman formuló primero QED).

Pero por otro lado, sabemos que $A_\mu(x)$ posee también algunos aspectos corpusculares ($\leftrightarrow$ fotones), así que es natural preguntarse si existe algún formalismo más simétrico. Y efectivamente, es posible hablar solo de partículas ("primera cuantización"), o solo de campos ("segunda cuantización"). Aunque a primera vista no es obvio por qué, la descripción con campos ha resultado ser en general la más poderosa.

3. Teoría Cuántica de Campos

Como vimos al principio del curso, un campo puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio:

$$\varphi(x) = \varphi(\vec{x}, t) \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{índice continuo}}}{\varphi_{\vec{x}}}(t) \qquad \left(\text{análogo a } \underset{\substack{\uparrow \\ 1,2,\dots,N}}{\vec{x}_n}(t)\right)$$

índice continuo: sistema con un número infinito de grados de libertad

Nos interesa un campo relativista (covariante bajo cambios de coordenadas en el espaciotiempo, que tomaremos plano). Por simplicidad consideraremos aquí el caso más sencillo: un campo escalar ($\varphi(x)$ es un solo número en cada x, tal que $x \to x'(x) \Rightarrow \varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x)$) real ($\varphi(x)^* = \varphi(x)$) y, para empezar, libre ($\equiv$ ec. de mov. lineal $\leftrightarrow$ Lagrangiano cuadrático). Semejante campo está descrito por la acción

$$S[\varphi(x)] \equiv \int dx^0\, L[\varphi(x)] \equiv \int dx^0 \int d^D x\, \underbrace{\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}_{\text{densidad Lagrangiana}}$$

escalar

$$= -\int d^D x \left(\frac{1}{2} \underbrace{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}_{-\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2} + \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parámetro}}}{m^2} \varphi^2 \right)$$

Acción de Klein-Gordon

(Densidad de) Momento canónico conjugado a $\varphi(x)$:

$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \qquad \left(\text{análogo a } \vec{p}_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_n}\right)$$

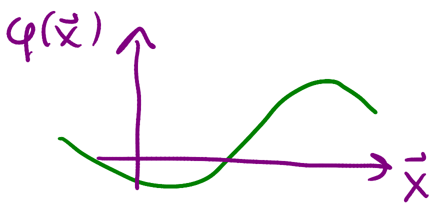
$\Longrightarrow$ Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^{D-1}x \, \underbrace{\left(\Pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}\right)}_{\equiv \mathcal{H} \text{ Densidad Hamiltoniana}} \qquad \left(\text{análogo a } H = \sum_n \vec{p}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n - L\right)$$

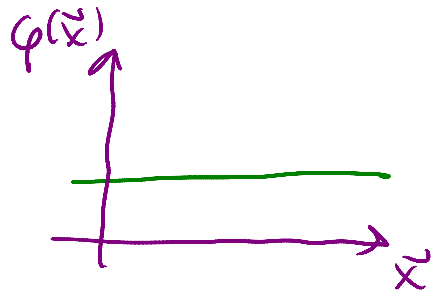
$$= \int d^{D-1}x \left[\underbrace{\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2}_{\text{costo energético por variación espacial}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}m^2\varphi^2}_{\text{costo energético incluso por tomar un valor constante}} \right]$$

energía cinética

costo energético por variación espacial: cada $\varphi_{\vec{x}}$ está acoplado a sus vecinos:



costo energético incluso por tomar un valor constante:



energía potencial

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Longrightarrow \boxed{(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0}$$

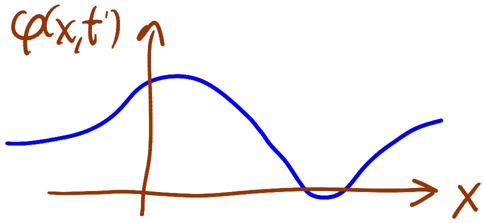
Ecuación de Klein-Gordon

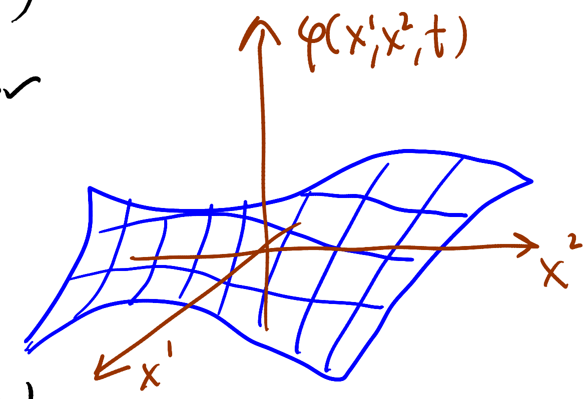
viernes, 28 de octubre de 2011
04:53 p.m.

Igual que en el Hamiltoniano, en esta ecuación vemos que cada variable $\varphi_{\vec{x}}(t)$ está acoplada a sus vecinos:

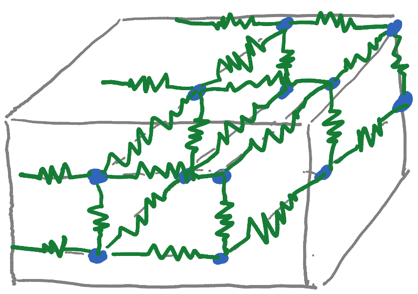
$$\partial_t^2 \varphi(\vec{x},t) - \underbrace{\vec{\nabla}^2}_{\partial_i \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\varphi_{\vec{x}+\epsilon\vec{x}^i}(t) - \varphi_{\vec{x}}(t)\right]} \varphi(\vec{x},t) + m^2 \varphi(\vec{x},t) = 0 .$$

Nuestro campo es análogo a una cuerda de violín (que es descrita por un campo en 1+1 dim) o a la membrana de un tambor (campo en 2+1 dim).





Podemos visualizar a $\varphi(\vec{x},t)$ como una gelatina que llena todo el espacio y es capaz de vibrar, o lo que es lo mismo,



como una colección de muchas pelotitas conectadas por resortes, en el límite donde el espaciamiento tiende a cero.

Si bien el comportamiento de cada $\varphi_{\vec{x}}(t)$ (como el de cada pelotita individual) no es sencillo, podemos

martes, 05 de junio de 2007
09:04 a.m.

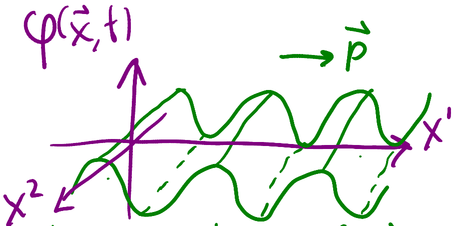
hacer un cambio de variables a los modos normales del campo (comportamientos colectivos que oscilan armónicamente). Son simplemente los modos de Fourier:

$$\varphi_{\vec{x}}(t) \equiv \varphi(\vec{x},t) \longrightarrow \varphi_{\vec{p}}(t) \equiv \varphi(\vec{p},t) \equiv \int d^{D-1}x \, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{x},t)$$

$$\left(\longleftrightarrow \varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^D} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{p},t) \right),$$

La ec. de mov. $(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi(\vec{x},t) = 0$ se convierte en

$$(\partial_0^2 + \underbrace{\vec{p}^{\,2} + m^2}_{\equiv E(\vec{p})^2})\varphi(\vec{p},t) = 0,$$



onda plana en dirección $\vec{p}$

es decir, $\ddot{\varphi}(\vec{p},t) = -E^2\varphi(\vec{p},t)$: cada $\varphi(\vec{p},t)$ es un oscilador armónico con frecuencia $\omega = E(\vec{p})$,

y nuestro campo libre $\varphi(\vec{x},t)$ no es entonces más que una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados (un sistema completamente análogo a una cuerda de violín o la membrana de un tambor).

Con esto entendemos perfectamente la manera en que $\varphi(\vec{x},t)$ evolucionará a nivel clásico.

martes, 05 de junio de 2007
09:15 a.m.

Para cuantizar este sistema por el método canónico, convertimos al campo $\varphi(\vec{x},t)$ y a su momento canónico conjugado $\Pi(\vec{x},t) = \dot{\varphi}(\vec{x},t)$ en operadores en el cuadro de Schrödinger, $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$, o en el de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(\vec{x},t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{\varphi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{\Pi}(\vec{x},t) \equiv e^{i\hat{H}t}\hat{\Pi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}t},$$

e imponemos las relaciones de conmutación habituales:

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x}')] = i\delta^{(D-1)}(\vec{x}-\vec{x}') \left(= [\hat{\varphi}(\vec{x},t), \hat{\Pi}(\vec{x}',t)]\right),$$

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\varphi}(\vec{x}')] = 0 = [\hat{\Pi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x}')].$$

(análogas a $[x_n^i, p_{n'}^{i'}] = i\delta^{ii'}\delta_{nn'}$, $[x_n^i, x_{n'}^{i'}] = 0 = [p_n^i, p_{n'}^{i'}]$).

Esto implica que los operadores $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ satisfacen

$$[\hat{\varphi}(\vec{p}), \hat{\Pi}(\vec{p}')] = i(2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$[\hat{\varphi}(\vec{p}), \hat{\varphi}(\vec{p}')] = 0 = [\hat{\Pi}(\vec{p}), \hat{\Pi}(\vec{p}')].$$

Sabemos que $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ son análogas a $\hat{x}$ y $\hat{p}$ para un oscilador armónico, y en la tarea 2 vimos que al cuantizar este último sistema resulta muy útil definir los llamados operadores de creación y aniquilación

martes, 05 de junio de 2007
09:37 a.m.

(o de subida y de bajada) $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$.

Por analogía, conviene también definir aquí

$$\hat{\varphi}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}}\left(\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\right) \qquad \left(\text{cf. } \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\right)$$

signo tal que $\hat{\varphi}(\vec{p})^\dagger = \hat{\varphi}(-\vec{p})$

$\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^\dagger = \hat{\varphi}(\vec{x})$ (campo real)

y

$$\hat{\Pi}(\vec{p}) = -i\sqrt{\frac{E(\vec{p})}{2}}\left(\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\right) \qquad \left(\text{cf. } \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)\right)$$

A partir de las relaciones de conmutación para $\hat{\varphi}(\vec{p})$ y $\hat{\Pi}(\vec{p})$ es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^{D-1}\delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}') \qquad \left(\text{análogo a } [\hat{a}_i, \hat{a}^\dagger_j] = \delta_{ij}\right)$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}]$$

Tenemos entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\varphi}(\vec{x}) &= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E(\vec{p})}}\left(\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\right), \\ \hat{\Pi}(\vec{x}) &= \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}(-i)\sqrt{\frac{E(\vec{p})}{2}}\left(\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{-\vec{p}}\right), \end{aligned}}$$