Esto implica en particular que, en cada punto dado, la matriz $g_{\mu\nu}(x)$ es invertible. Denotaremos su inverso como $g^{\mu\nu}(x)$ $\left(g^{\mu\nu}(x)\, g_{\nu\lambda}(x) = \delta^{\mu}_{\lambda} = g_{\lambda\nu}(x)\, g^{\nu\mu}(x)\right)$, de tal manera que la relación entre un vector V^{μ} en el punto x y su vector dual V_{μ} es

en gral. $\neq g_{\mu\nu}(x)$

$$V_{\mu} \equiv g_{\mu\nu}(x)\, V^{\nu} \qquad \longleftrightarrow \qquad \underbrace{V^{\mu} = g^{\mu\nu}(x)\, V_{\nu}}$$

Esto funciona porque, como es fácil verificar, $g^{\mu\nu}$ es un tensor de rango $(2,0)$.

Así que, en presencia de una métrica, sí tenemos una relación biunívoca entre vectores y vectores duales (o más en general, entre tensores con índices arriba y abajo).

La métrica en un punto dado, $g_{\mu\nu}(x)$, es una matriz $D\times D$ simétrica, y $\therefore$ se puede diagonalizar. Por ser no degenerada, sus D autovalores son $\neq 0$. El número (p,n) de autovalores positivos y negativos $\left(\underbrace{(-,-,\ldots,-}_{n},\underbrace{+,+,\ldots,+}_{p})\right)$ se conoce como la signatura de la métrica.

$n+p=D$

Una variedad diferenciable V dotada de una métrica con signatura $(D,0)$ (es decir, con todos los autovalores de $g_{\mu\nu}$ positivos, y $\therefore$ un producto interno que es positivo definido) se conoce como una variedad Riemanniana.

Para describir al espaciotiempo, no nos interesa este caso, sino una V en la que la signatura de la métrica es $(D-1,1)$, conocida como una variedad Lorentziana.

En este caso, el producto interno ya no es positivo definido, por lo que la métrica sirve para distinguir entre aquellos vectores con $v^2 \equiv v \cdot v > 0$ ('tipo espacio'), $v^2 \equiv v \cdot v < 0$ ('tipo tiempo') y $v^2 \equiv v \cdot v = 0$ ('tipo luz') en cada punto, información que se conoce como la estructura causal del espaciotiempo.

Por codificar una noción natural de distancia, la métrica nos da también una definición natural de (hiper)volumen: se puede mostrar que la integral

$$\int d^D x \sqrt{|g|} \equiv \int dx^0 dx^1 \cdots dx^{D-1} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|} \, ,$$

que se reduce al volumen usual $\int d^D x$ cuando $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ó $\eta_{\mu\nu}$, es invariante bajo cambios de coordenadas.

(P.ej., podemos describir $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas x^1, x^2, x^3, con métrica $g_{ij} = \delta_{ij}$, o esféricas r, θ, φ, donde la métrica sería

$$g_{rr} = \frac{\partial x^1}{\partial r}\frac{\partial x^1}{\partial r} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial r}\frac{\partial x^2}{\partial r} g_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial r}\frac{\partial x^3}{\partial r} g_{33} = 1 \, ,$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x^1}{\partial \theta}\frac{\partial x^1}{\partial \theta} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \theta}\frac{\partial x^2}{\partial \theta} g_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial \theta}\frac{\partial x^3}{\partial \theta} g_{33} = r^2 \, ,$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial x^1}{\partial \varphi}\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \varphi}\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} g_{22} + \frac{\partial x^3}{\partial \varphi}\frac{\partial x^3}{\partial \varphi} g_{33} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, ,$$

$$g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0 \, ,$$

con lo que podemos verificar que

$$\int dx^1 dx^2 dx^3 = \int dr\, d\theta\, d\varphi \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} = \int dr\, d\theta\, d\varphi\, r^2 \operatorname{sen}\theta$$

coincide con el resultado conocido.)

La métrica nos sirve además para resolver otro problema: en física necesitaremos tomar derivadas de nuestros campos tensoriales, y si bien para un campo escalar $\varphi(x)$ la derivada $\partial_\mu \varphi(x)$ es un tensor de rango $(0,1)$, para un campo tensorial más general $\partial_\mu T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}(x)$ NO transforma como un tensor de rango $(m, n+1)$. Esto es desagradable porque implica que las ecuaciones que escribamos usando directamente $\partial_\mu T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}$ no serán covariantes bajo difeomorfismos: su forma dependerá del sistema de coordenadas elegido.

Felizmente, definiendo los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\lambda} \right),$$

podemos formar la derivada covariante

$$\nabla_\mu T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \equiv \partial_\mu T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} + \Gamma^{\mu_1}_{\mu\lambda_1} T^{\lambda_1 \mu_2 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}$$

$$+ \ldots - \Gamma^{\rho_1}_{\mu\nu_1} T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\rho_1 \nu_2 \cdots \nu_n} - \ldots ,$$

que sí transforma como un tensor de rango $(m, n+1)$ (es análoga a la otra derivada covariante que vimos al principio del curso: $\Phi(x) \to \exp[iq\lambda(x)]\,\Phi(x)$

$$\Rightarrow \quad D_\mu \Phi(x) \equiv (\partial_\mu + iqA_\mu(x))\Phi(x) \to \exp[iq\lambda(x)]\, D_\mu \Phi(x),$$

a pesar de que $\partial_\mu \Phi(x) \not\to \exp[iq\lambda(x)]\,\partial_\mu \Phi(x)$),

satisface las propiedades usuales de una derivada (es lineal y obedece la regla de Leibnitz), y es además 'compatible' con la métrica en el sentido de que

$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$, lo cual permite meter o sacar

libremente a $g_{\mu\nu}$ ó $g^{\mu\nu}$ de expresiones diferenciadas covariantemente (p.ej. $\nabla_\mu (v\cdot v) = g_{\nu\lambda}\nabla_\mu (v^\nu v^\lambda) = 2 g_{\nu\lambda} v^\nu \nabla_\mu v^\lambda$).

A partir de la métrica definimos además el tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} \equiv \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu},$$

que codifica la curvatura de nuestro espaciotiempo:

$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}(x) = 0 \quad \forall\, \mu,\nu,\rho,\sigma,x$ solo en el espacio de Minkowski, $\mathbb{R}^{D-1,1}$, que llamamos $\therefore$ plano.

jueves, 17 de mayo de 2007
09:23 a.m.

Actuando con la métrica sobre el tensor de Riemann obtenemos el llamado tensor de Ricci

$$R_{\mu\rho} \equiv R_{\mu\nu\rho}{}^{\nu} \left(= g^{\lambda\nu} R_{\mu\nu\rho\lambda} \right),$$

y el escalar de curvatura

$$R \equiv g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} ,$$

que figuran en la ecuación central de la relatividad general: la ecuación de Einstein

$$\boxed{\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}_{\equiv G_{\mu\nu} \text{ tensor de Einstein}} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}}$$

tensor de energía-momento

Esta ecuación codifica la manera en que el espaciotiempo se curva en presencia de energía, momento, presión o esfuerzos de cualquier tipo. (P.ej., la actual expansión acelerada de nuestro universo requiere que $T_{\mu\nu}$ esté dominado por un término

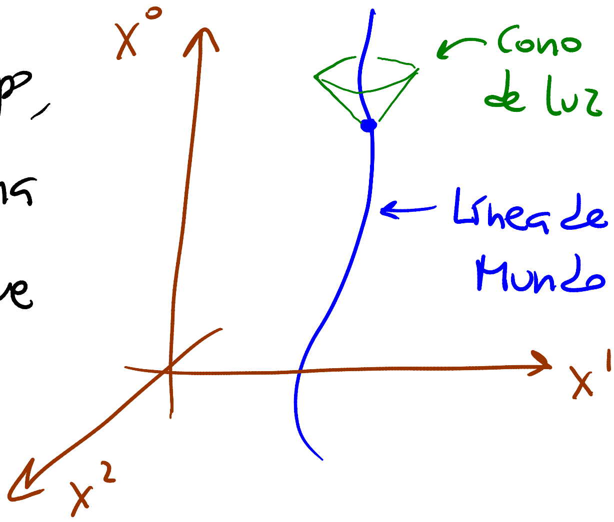
jueves, 17 de mayo de 2007
09:41 a.m.

'de constante cosmológica' $-\Lambda g_{\mu\nu}$, que físicamente corresponde a un fluido con densidad de energía positiva pero presión negativa. Esta sería la 'energía oscura' que mencionamos como problema abierto del Modelo Estándar.)

L16: 11/6/11

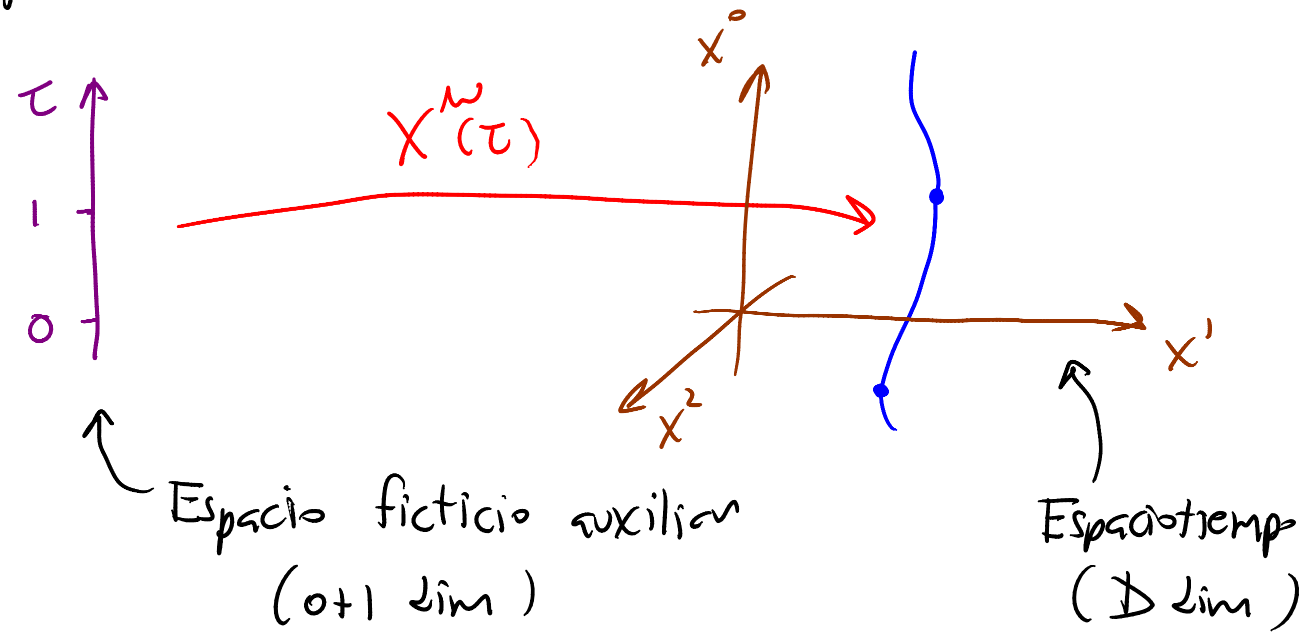
2. La Partícula Cuántica y Relativista

Conforme transcurre el tiempo, una partícula clásica traza una curva en el espaciotiempo que se conoce como su **línea de mundo**.



Podemos describirla especificando la función $\vec{X}(x^0)$ en un sistema de coordenadas dado (p.ej., inercial), pero esta descripción no es covariante bajo cambios de coordenadas (p.ej., bajo transformaciones de Lorentz), porque trata a x^0 de manera distinta a $\vec{x}$

Podemos obtener una descripción manifiestamente covariante si nos inventamos un parámetro auxiliar (arbitrario) τ para etiquetar a los distintos puntos a lo largo de la línea de mundo, y especificamos la trayectoria de la partícula dando $X^\mu(\tau)$: $\leftarrow 0,1,\ldots,D-1$



En este lenguaje, ¿cuál debería ser la acción que determine la dinámica de una partícula libre?

Tenemos a nuestra disposición la "(D-)velocidad"

$\dot{X}^\mu(\tau) \equiv \partial_\tau X^\mu(\tau)$, que es un vector bajo cambios de coordenadas en el espaciotiempo D-dimensional

$$\left(x^\mu \to x'^\mu(x) \implies \partial_\tau X^\mu \to \partial_\tau X'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\partial_\tau X^\nu\right),$$

martes, 22 de mayo de 2007
07:56 a.m.

y un <u>vector dual</u> bajo cambios de coordenadas en el espacio ficticio 1-dimensional

$$\left(\tau \to \tau'(\tau) \quad \Longrightarrow \quad X'^{\mu}(\tau') = X^{\mu}(\tau) \quad : \ X^{\mu} \text{ es } \underline{\text{escalar}} \right.$$

$$\left. \partial_\tau X^{\mu}(\tau) \to \partial_{\tau'} X'^{\mu}(\tau') = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \partial_\tau X^{\mu}(\tau) \right),$$

y queremos construir una acción (real)

$$S[X^{\mu}(\tau)] \equiv \int d\tau \, L\left(X^{\mu}(\tau), \dot{X}^{\mu}(\tau)\right) \quad \text{tal que}$$

1) L (y $\therefore S$) sea <u>invariante</u> (= escalar) bajo cambios de coordenadas en el espaciotiempo;

2) S sea <u>invariante</u> bajo reparametrizaciones del espacio ficticio: $S' \equiv \int d\tau' \, L' = \int d\tau \, L \equiv S$ (lo cual requiere que $L' = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} L$);

3) Si el espaciotiempo es <u>plano</u>, tengamos

$$S \simeq \int dX^0 \, L_{NR} \equiv \int dX^0 \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{X}}{dX^0} \right)^2 + \text{cte.} \right]$$

en el límite <u>no relativista</u> $\left| \frac{d\vec{X}}{dX^0} \right| << 1$.

La única acción que satisface estos 3 requisitos es

martes, 22 de mayo de 2007
08:11 a.m.

$$\boxed{S[X^\mu(\tau)] = -m\int d\tau\sqrt{-\dot{X}^2} = -m\int d\tau\sqrt{\underbrace{-g_{\mu\nu}(X(\tau))\partial_\tau X^\mu(\tau)\partial_\tau X^\nu(\tau)}_{}}}\;.$$

Escalar en espaciotiempo y tensor (0,2) en espacio ficticio

Podemos verificar explícitamente la invariancia bajo cambios de coordenadas en el espacio auxiliar 1-dim:

bajo $\tau \to \tau'(\tau)$, tenemos

$$d\tau' = \frac{d\tau'}{d\tau}d\tau\,, \quad X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau) \quad (\text{escalar}),$$

$$y \quad \partial_{\tau'}X'^\mu(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\partial_\tau X^\mu(\tau) \quad (\text{vector dual}),$$

así que

$$S'[X'] = -m\int d\tau'\sqrt{-g_{\mu\nu}(X'(\tau'))\partial_{\tau'}X'^\mu\partial_{\tau'}X'^\nu}$$

$$= -m\int d\tau\left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right)\sqrt{-g_{\mu\nu}(X(\tau))\left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)\partial_\tau X^\mu\left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)\partial_\tau X^\nu}$$

$$= -m\int d\tau\,\cancel{\left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right)}\cancel{\left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)}\sqrt{-g_{\mu\nu}(X(\tau))\partial_\tau X^\mu\partial_\tau X^\nu} = S[X] \quad \checkmark$$

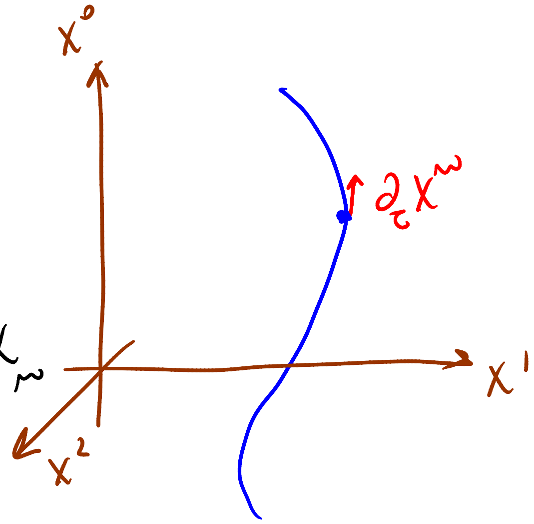
De manera similar, es fácil comprobar que el modo en que transforma $g_{\mu\nu}(X(\tau))$ bajo reparametrizaciones en el espacio tiempo $x^\mu \to x'^\mu(x)$ compensa la manera en que transforma $\partial_\tau X^\mu\partial_\tau X^\nu$.

viernes, 21 de octubre de 2011
08:03 a.m.

Esta acción de hecho calcula la longitud total de la línea de mundo (multiplicada por la masa),

$$S = -m\int d\tau \sqrt{-\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu} = -m\int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu},$$

cantidad que conocemos como el tiempo propio total de la partícula.



En otras palabras,

$$h_{\tau\tau}(\tau) \equiv \underbrace{\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu g_{\mu\nu}}_{\text{"Retracción" (=pullback)}} = \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu$$

es la métrica natural inducida sobre la línea de mundo, y el elemento invariante de 'volumen' es por tanto

$$\int d\tau \sqrt{|\det h_{\tau\tau}|} = \int d\tau \sqrt{|h_{\tau\tau}|} = \int d\tau \sqrt{-\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu}.$$

Desde ahora en adelante nos restringiremos por simplicidad al caso en el que el espaciotiempo es plano, donde (en coordenadas cartesianas) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, y por tanto

$$S[X^\mu(\tau)] = -m\int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} = -m\int d\tau \sqrt{(\dot{X}^0)^2 - (\dot{\vec{X}})^2}.$$

$\cdot \equiv \partial_\tau$

Notemos que esto se puede reescribir en la forma

$$S = -m\int d\tau\, |\partial_\tau X^0| \sqrt{1 - \left(\frac{\partial_\tau \vec{X}}{\partial_\tau X^0}\right)^2} = -m\int dX^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial X^0}\right)^2},$$

que en el límite no relativista $\left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial X^0}\right| \ll 1$ efectivamente se reduce a

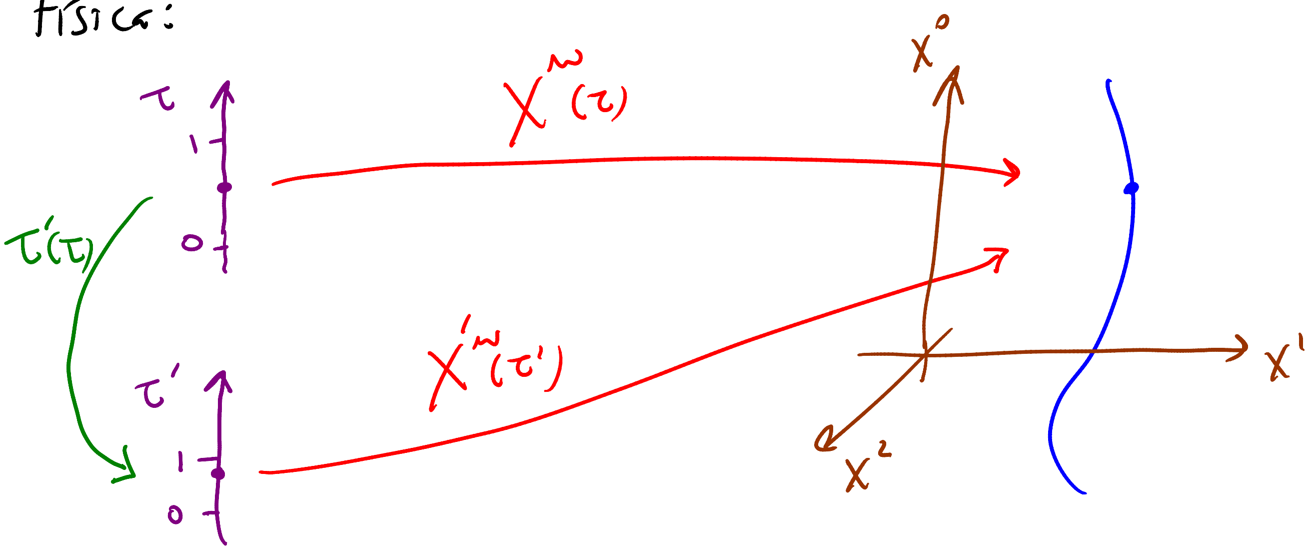
$$S \simeq -m \int dX^0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial X^0}\right)^2\right].$$

Notemos que nuestra acción en el espaciotiempo plano,

$$S[X^\mu(\tau)] = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}$$

es invariante de Lorentz. Esto era de esperarse a partir de la propiedad 1), puesto que las transformaciones de Lorentz son precisamente aquellos cambios de coordenadas que dejan a $\eta_{\mu\nu}$ invariante. Es importante también enfatizar que la invariancia de S bajo reparametrizaciones $\tau \to \tau'(\tau)$ (propiedad 2)) es una simetría local desde el punto de vista del espacio ficticio, y $\therefore$ tenemos una teoría de norma, es decir, una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicos. El punto aquí es simplemente que $X^\mu(\tau)$ y $X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau)$ son

2 funciones diferentes que describen la misma trayectoria física:



Que tengamos esta redundancia por supuesto NO es sorprendente: es el precio que pagamos por habernos inventado el parámetro τ para lograr una descripción covariante. (Como vimos al principio del curso, QED y QCD son también teorías de norma, y esto ocurre por la misma razón: para tener una descripción covariante bajo Lorentz, queremos tratar a todas las componentes del campo vectorial $A_\mu(x)$ en el mismo pie.)

La redundancia que vemos en $S[X^\mu(\tau)]$ es simplemente un recordatorio de que, entre las D funciones $X^\mu(\tau)$ que usamos, sólo D-1 representan grados de libertad físicos.

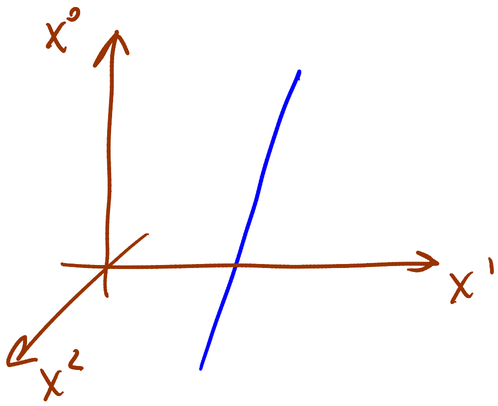
martes, 22 de mayo de 2007
09:06 a.m.

La ecuación de movimiento (Euler-Lagrange) que obtenemos a partir de S es

$$\partial_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot X^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial X^\mu} \quad \longleftrightarrow \quad \partial_\tau\left(\frac{\dot X_\mu}{\sqrt{-\dot X^2}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot X_\mu}{\sqrt{(\dot X^0)^2 - (\dot{\vec X})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\partial \vec X}{\partial X^0}\right)^2}}\frac{\dot X_\mu}{|\dot X^0|} = \underbrace{\gamma \frac{dX_\mu}{dX^0}}_{\equiv u_\mu \text{ (D-velocidad)}} = \text{cte.},$$

que implica que la línea de mundo debe ser recta, como esperaríamos dado que estamos hablando de una partícula libre.



L17: 13/10/11

Calculemos ahora el Hamiltoniano (que necesitaremos en particular para la cuantización canónica):

$$L = -m\sqrt{-\dot X^\mu \dot X_\mu} \qquad \text{cf.} \qquad L_{NR} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec x}{dx^0}\right)^2$$

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot X^\mu} = +\frac{m\dot X_\mu}{\sqrt{-\dot X^2}} = m\gamma\frac{dX_\mu}{dX^0} \checkmark \qquad p_i \equiv \frac{\partial L_{NR}}{\partial\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)} = m\frac{dx^i}{dx^0} \checkmark$$

martes, 22 de mayo de 2007
09:20 a.m.

$$H \equiv p_\mu \dot{X}^\mu - L \qquad \text{cf.} \qquad H_{NR} \equiv \sum_i p_i \left(\frac{dx^i}{dx^0}\right) - L_{NR}$$

$$= m\frac{\dot{X}^2}{\sqrt{-\dot{X}^2}} - \left(-m\sqrt{-\dot{X}^2}\right) \qquad = m\left(\frac{d\vec{x}}{dx^0}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dx^0}\right)^2$$

$$= -m\sqrt{-\dot{X}^2} + m\sqrt{-\dot{X}^2} \qquad = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \quad \checkmark$$

$$= 0 \qquad !?!$$

Este curioso resultado está relacionado con el hecho de que τ es un parámetro arbitrario, y $\therefore$ la evolución 'temporal' con respecto a τ no está determinada de manera única. Como mencionamos antes, 2 funciones diferentes pueden describir la misma trayectoria física — p.ej.,

$$\begin{cases} X^0(\tau) = \tau \\ X^1(\tau) = a\tau^2 + v\tau \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} X'^0(\tau) = \tau^3 \\ X'^1(\tau) = a\tau^6 + v\tau^3 \end{cases}.$$

Si no en H, ¿en dónde está entonces la información sobre la energía y la evolución física? La encontramos en el hecho de que

$$p_\mu = \frac{m\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \implies \boxed{p^2 \equiv p_\mu p^\mu = \frac{m^2\dot{X}^2}{\left(\sqrt{-\dot{X}^2}\right)^2} = -m^2}$$

que es lo que llamamos una constricción: es una relación que expresa el hecho de que no todas las variables canónicas $X^\mu(\tau)$, $p_\mu(\tau)$ son independientes.

Vale la pena resaltar de pasada que el signo en $p^2 = -m^2$ se debe a que hemos elegido la convención $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, que es la habitual para los relativistas. Los particuleros normalmente definen en cambio $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, y escriben $\therefore\ p^2 = +m^2$. En ambos casos, lo que se está diciendo es que $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$ ← determina la energía

En general, por cada simetría local (= invariancia de norma) encontramos 1 constricción (y viceversa, si se trata de una constricción 'de primera clase').

Hasta aquí hemos estudiado a la partícula libre relativista a nivel clásico. Para hacer la cuantización canónica, tenemos 2 opciones respecto a cómo lidiar con la invariancia de norma $\leftrightarrow$ redundancia $\leftrightarrow$ constricción:

I) Podemos eliminar la redundancia antes de cuantizar, imponiendo una condición no invariante bajo la simetría local (paso que se conoce como "fijar la norma").

Una posibilidad obvia es pedir que $X^0(\tau)=\tau$.

Leído al revés, $\tau = X^0$ elige una parametrización específica de la línea de mundo. En esta 'norma',

$$S=-m\int dx^0\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{X}}{dX^0}\right)^2} \quad \longleftarrow \text{solo } D-1 \text{ variables} \quad \checkmark$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{p}=\frac{m\frac{d\vec{X}}{dX^0}}{\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{X}}{dX^0}\right)^2}} = m\gamma\vec{v} \quad \left(\leftrightarrow \vec{v}=\frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \leftrightarrow \gamma=\frac{1}{m}\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right), \quad \checkmark$$

de donde

$$H\equiv \vec{p}\cdot\frac{d\vec{X}}{dX^0}-L=\frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}-\left(-m\sqrt{1-\vec{v}^2}\right)=\frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$$

$$=\sqrt{\vec{p}^2+m^2} \quad \checkmark$$

Generador de evolución en X^0

lunes, 28 de mayo de 2007
08:31 p.m.

Aquí no tenemos ya redundancia alguna, ni $\therefore$, constricción. Podemos entonces cuantizar de la manera habitual, convirtiendo a las variables canónicas $\vec{x}, \vec{p}$ en operadores $\hat{\vec{X}}, \hat{\vec{p}}$, e imponiendo las relaciones de conmutación usuales

$$[\hat{X}^i, \hat{p}^j] = i\,\delta^{ij}, \qquad [\hat{X}^i, \hat{X}^j] = 0 = [\hat{p}^i, \hat{p}^j].$$

El Hamiltoniano es $\hat{H} = \sqrt{\hat{\vec{p}}^{\,2} + m^2}$, de modo que los autoestados de $\hat{\vec{p}}$, $\{|\vec{p}\rangle\}$, son también autoestados de $\hat{H}$ con energía $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$.

Conviene definir a mano la normalización de estos estados a través de

$\simeq m = \text{cte.}$ en caso no relativista

$$\langle \vec{p}\,'|\vec{p}\rangle = (2\pi)^{D-1}\, 2E(\vec{p})\, \delta^{(D-1)}(\vec{p}-\vec{p}\,'),$$

que implica la relación de completez

$$\hat{\mathbb{1}} = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}\, 2E(\vec{p})} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|,$$

porque, como veremos más abajo, las combinaciones $E(\vec{p})\,\delta^{(D-1)}(\vec{p})$ y $\frac{d^{D-1}p}{E(\vec{p})}$ son invariantes bajo Lorentz.

lunes, 28 de mayo de 2007
08:48 p.m.

La evolución en el tiempo está dada por

$$|\psi(x^0)\rangle_s = e^{-i\hat{H}x^0}|\psi(0)\rangle_s \quad , \quad \hat{O}_s$$

en el cuadro de Schrödinger, ó

$$|\psi\rangle_H \equiv |\psi(0)\rangle_s \quad , \quad \hat{O}_H(x^0) = e^{i\hat{H}x^0}\underbrace{\hat{O}_H(0)}_{\equiv \hat{O}_s}e^{-i\hat{H}x^0}$$

en el cuadro de Heisenberg.

En particular, podemos calcular el propagador

$$_H\langle x'^\mu | x^\mu\rangle_H = {}_s\langle \vec{x}'| e^{-i\sqrt{\hat{\vec{p}}^2+m^2}(x'^0-x^0)} \underbrace{|\vec{x}\rangle_s}_{\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|}$$

$$= \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}2E(\vec{p})}\underbrace{e^{-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}(x'^0-x^0)}}_{e^{-iE(\vec{p})(x'^0-x^0)}}\underbrace{\langle\vec{x}'|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{x}\rangle}_{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}}$$

$$= \int\frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}2E(\vec{p})}\, e^{ip\cdot(x'-x)}\Big|_{p^0=E(\vec{p})} .$$

II) Podemos cuantizar la descripción redundante, y eliminar la redundancia después, utilizando la constricción para distinguir los estados físicos. Este camino nos permite preservar la covariancia manifiesta de nuestra descripción. Lo que hacemos es ignorar la constricción $p^2+m^2=0$, y promover las 2D variables canónicas $X^\mu(\tau)$, $P_\mu(\tau) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu}$ a operadores $\hat{X}^\mu$, $\hat{P}_\mu$ que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}_\nu] = i\delta^\mu_\nu \quad (\longleftrightarrow [\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}),$$

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = 0 = [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu].$$

Tenemos entonces autoestados de momento $|p\rangle \equiv |p^\mu\rangle$, $\hat{P}_\nu |p\rangle = p_\nu |p\rangle$, que normalizamos covariantemente de acuerdo con

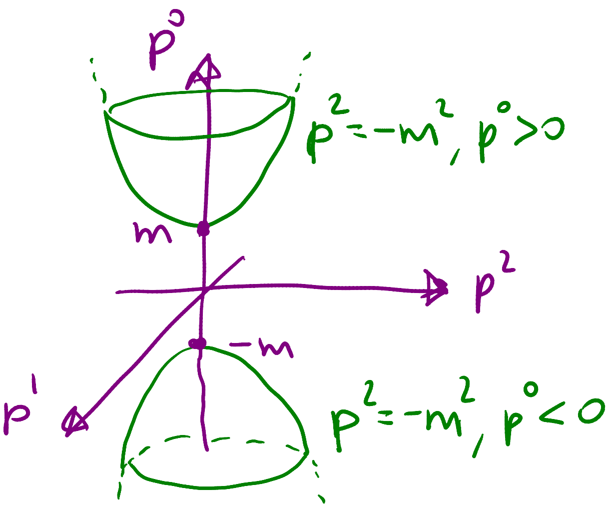
$$\langle p'|p\rangle = (2\pi)^D \delta^{(D)}(p^\mu - p'^\mu) \longleftrightarrow \hat{\mathbb{1}} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} |p\rangle\langle p|$$

Estos estados nos dan una base para nuestro espacio de Hilbert completo. Notemos, sin embargo, que en la inmensa mayoría de ellos la partícula tendría una energía equivocada, $p^0 \neq E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Esto era de esperarse: al haber cuantizado variables que son redundantes y no representan grados de libertad físicos, obtenemos un espacio de Hilbert que es demasiado grande, e incluye estados irrelevantes desde el punto de vista físico. Podemos identificar los estados que sí son relevantes utilizando la constricción: decimos que $|\psi\rangle$ es un estado físico solo si satisface

$$\boxed{(\hat{p}^2 + m^2)|\psi\rangle = 0}, \qquad \left(\not\Rightarrow \hat{p}^2 + m^2 = 0\right)$$

es decir, solo si es superposición de estados $|p\rangle$ tales que $(\hat{p}^2 + m^2)|p\rangle = (p^2 + m^2)|p\rangle = 0$



$$\Longrightarrow \quad p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv E(\vec{p})$$

escogemos a mano

(condición invariante de Lorentz)

Condición de 'Capa de Masa'

L18: 18/10/11