jueves, 26 de abril de 2007
12:01 a.m.

Si hubiéramos tenido en cambio $t''' < t''$, entonces con un razonamiento análogo, la misma integral

$$\int_{\vec{x}(t)=\vec{x}}^{\vec{x}(t')=\vec{x}'} \mathcal{D}\vec{x}(t)\; x^i(t'')\,x^j(t''')\, e^{i\int_t^{t'} dt\, L} = {}_H\langle \vec{x}', t' |\, \hat{X}^i_H(t'')\, \hat{X}^j_H(t''') \,| \vec{x}, t\rangle_H$$

el operador que queda a la izquierda corresponde a un tiempo mayor.

De manera similar, para operadores arbitrarios $\hat{O}_k$ se puede mostrar el resultado general

$$\int_{\vec{x}(t)=\vec{x}}^{\vec{x}(t')=\vec{x}'} \mathcal{D}\vec{x}(t)\; O_1(t_1)\, O_2(t_2) \cdots O_n(t_n)\, e^{i\int_t^{t'} dt\, L(\vec{x},\dot{\vec{x}})}$$

$$= {}_H\langle \vec{x}', t' |\, T\{ \hat{O}_{1H}(t_1)\, \hat{O}_{2H}(t_2) \cdots \hat{O}_{nH}(t_n) \} \,| \vec{x}, t\rangle_H ,$$

donde T denota el llamado orden temporal, que indica precisamente que los operadores deben ser ordenados de tal manera que los argumentos temporales t_k aumenten de derecha a izquierda.

Encontraremos más ejemplos de integrales de trayectoria más adelante...

jueves, 26 de abril de 2007
12:18 a.m.

Relatividad y Notación Relativista

Estamos acostumbrados a trabajar con vectores 3-dim como $\vec{x}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{E}, \vec{B}$, etc., que, en una base dada, podemos representar como paquetes de 3 componentes:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Sabemos de qué forma se mezclan x^1, x^2, x^3 bajo rotaciones,

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \underset{\sim}{R}\,\vec{x} \quad \longleftrightarrow \quad x'^i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, x^j ,$$

matriz de rotación

y cuando decimos que algún otro objeto $\vec{v}$ es también un vector en $\mathbb{R}^3$, parte de lo que queremos decir es que transforma de la misma manera:

$$\vec{v} \to \vec{v}' = \underset{\sim}{R}\,\vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad v'^i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, v^j .$$

Ahora, ¿qué son las rotaciones? La propiedad que las define es que preservan el producto interno natural en $\mathbb{R}^3$, y $\therefore$ también la norma asociada:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} \equiv \sum_{i=1}^{3} v^i w^i \equiv \vec{v}^{\,T}\vec{w} = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

$$|\vec{v}|^2 \equiv \vec{v}\cdot\vec{v} \equiv \vec{v}^{\,2} \quad (\geq 0,\ =0 \text{ solo si } \vec{v}=0)$$

$$\vec{v}\,' = \underset{\sim}{R}\,\vec{v}\,,\quad \vec{w}\,' = \underset{\sim}{R}\,w \implies \text{si } \underset{\sim}{R} \text{ es rotación,}$$

$$\vec{v}\,'\cdot\vec{w}\,' = \vec{v}\,'^{T}\vec{w}\,' = \vec{v}^{\,T}\underset{\sim}{R}^{T}\underset{\sim}{R}\,\vec{w} = \vec{v}^{\,T}\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} \quad \forall\, \vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$$

$$\implies \boxed{\underset{\sim}{R}^{T}\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{\mathbb{1}}} \leftarrow \text{define al } \underline{\text{grupo}} \text{ que llamamos}$$

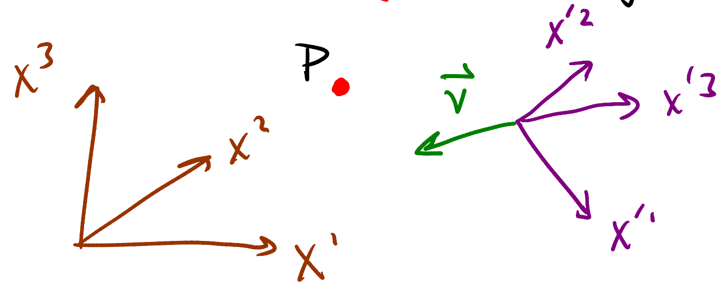
$$O(3) = SO(3)\times\{1,-1\}$$

$\det \underset{\sim}{R} = \pm 1$ (para $O(3)$) $\qquad \det \underset{\sim}{R} = +1$ (para $SO(3)$)

$\therefore$ incluye paridad $\underset{\sim}{P} \equiv -\underset{\sim}{\mathbb{1}}$

L14: 04/10/11

La <u>relatividad especial</u> se concentra en un grupo de transformaciones más grande: aquellas que conectan a 2 <u>sistemas inerciales</u> S y S':



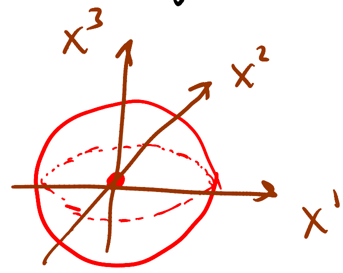
$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}\,' \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\Lambda}\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{x}_0 \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{\Lambda}$: matriz 4×4; $\begin{pmatrix} t_0 \\ \vec{x}_0 \end{pmatrix}$: <u>traslación</u>

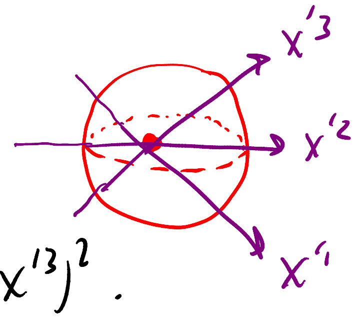
$\leftarrow$ por homogeneidad del espacio, la transformación debe ser <u>lineal</u>

Ignorando las translaciones, los orígenes de S y S' coincidirán al tiempo $t = t' = 0$.

La igualdad de la velocidad de la luz $c = 1$ en S y S'



$$\Rightarrow \begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = t^2 \\ (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 = t'^2 \end{cases},$$



es decir,

$$\underbrace{-t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}_{} = 0 = \underbrace{-t'^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2}_{}.$$

salvo un signo, estas parecen las normas de 2 vectores en $\mathbb{R}^4$

Tomándonos esto en serio, definamos $t \equiv x^0$,

$$\bar{x} \equiv \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

junto con una nueva noción de producto interno

$$\bar{x} \cdot \bar{y} \equiv -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3,$$

o, lo que es lo mismo,

jueves, 26 de abril de 2007
09:24 a.m.

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = \underbrace{(x^0\ x^1\ x^2\ x^3)}_{\bar{x}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \underset{\sim}{\eta}} \underbrace{\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}}_{\bar{y}}$$

$$\equiv \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu \qquad ,$$

Métrica de Minkowski

y la norma asociada

$$\|\bar{x}\|^2 \equiv \bar{x}\cdot\bar{x} \equiv \bar{x}^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 .$$

Notar que esta norma no es positiva definida: hay vectores $\bar{x}$ que tienen $\|\bar{x}\|^2 < 0$, y $\|\bar{x}\|^2 = 0 \not\Rightarrow \bar{x} = 0$.
El espacio 4-dimensional resultante se denota $\mathbb{R}^{3,1}$ $(\neq \mathbb{R}^4)$, y los físicos le llamamos el espacio(tiempo) de Minkowski.
En este lenguaje, lo que vimos arriba respecto a la igualdad de la velocidad de la luz en S y S' es simplemente el enunciado de que las transformaciones

jueves, 26 de abril de 2007
09:41 a.m.

entre sistemas inerciales con orígenes (en el sentido 4-dim) coincidentes, conocidas como **transformaciones de Lorentz**, son precisamente aquellas que preservan el producto interno del espacio de Minkowski:

$$\bar{x}' = \underset{\sim}{\Lambda}\,\bar{x}\ ,\quad \bar{y}' = \underset{\sim}{\Lambda}\,\bar{y} \implies \text{si } \underset{\sim}{\Lambda} \text{ es transf. de Lorentz,}$$

$$\bar{x}'\cdot\bar{y}' = \bar{x}'^{T}\underset{\sim}{\eta}\,\bar{y}' = \bar{x}^{T}\underset{\sim}{\Lambda}^{T}\underset{\sim}{\eta}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\bar{y} = \bar{x}^{T}\underset{\sim}{\eta}\,\bar{y} = \bar{x}\cdot\bar{y}\quad \forall\, \bar{x},\bar{y}\in \mathbb{R}^{3,1}$$

$$\implies \boxed{\underset{\sim}{\Lambda}^{T}\underset{\sim}{\eta}\,\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\eta}} \quad \leftarrow \text{define grupo de Lorentz}$$

$$O(3,1) \supset SO(3,1) \supset SO^{+}(3,1)$$

$\det\underset{\sim}{\Lambda} = \pm 1$

$\therefore$ incluye paridad $\underset{\sim}{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

e inversión temporal $\underset{\sim}{T} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$\det\underset{\sim}{\Lambda} = +1$

$\therefore$ incluye

$\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{T} = -\underset{\sim}{1}$

$\det\underset{\sim}{\Lambda} = +1$

$\Lambda^{0}{}_{0} \geq 0$

("ortócrono")

En componentes, esto es

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,x^{\nu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,x^{\nu}\ ,\qquad y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,y^{\nu}$$

suma implícita sobre índices repetidos arriba y abajo

$$\implies x'^{\mu}\eta_{\mu\nu}\,y'^{\nu} = x^{\mu}\eta_{\mu\nu}\,y^{\nu}$$

jueves, 26 de abril de 2007
10:03 a.m.

Conviene definir

$$x_\nu \equiv x^\mu \eta_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{=0 \text{ a menos que } \mu=\nu} x^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\lambda\nu} x^\lambda = (\underbrace{-x^0}_{\equiv x_0}, \underbrace{+x^1, +x^2, +x^3}_{\equiv x_1, x_2, x_3}),$$

de tal manera que esto se escriba simplemente como

$$\bar{x}' \cdot \bar{y}' = x'_\nu y'^\nu = x_\mu y^\mu = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

(∴ nuestras sumas implícitas son invariantes de Lorentz).

Dicho en otras palabras, x_ν son las componentes del vector dual $\underline{x} \equiv \bar{x}\cdot \equiv \bar{x}^T \underset{\sim}{\eta}$, cuya función en la vida es actuar sobre vectores usuales $\underline{y}$ para formar números: $\underline{x}(\bar{y}) \equiv (\bar{x}\cdot)\bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Notando que $\underset{\sim}{\eta}\,\underset{\sim}{\eta} = +\underline{1} \longleftrightarrow \underset{\sim}{\eta}^{-1} = \underset{\sim}{\eta}$, conviene también escribir a las componentes de $\underset{\sim}{\eta}^{-1}$ como $\eta^{\mu\nu}$ (aunque coinciden numéricamente con $\eta_{\mu\nu}$), de tal modo que al invertir $x_\nu = x^\mu \eta_{\mu\nu}$ tengamos

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu .$$

Es decir, nuestra convención es que los índices se bajan multiplicando por $\eta_{\mu\nu}$, y se alzan multiplicando por $\eta^{\mu\nu}$.

jueves, 26 de abril de 2007
10:19 a.m.

Llamamos (cuadri) vector ('contravariante') a cualquier colección de 4 números que transforman como x^μ,

$$\bar{V} \to \bar{V}' = \underset{\sim}{\Lambda} \bar{V} \quad \longleftrightarrow \quad V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$$

denotamos con índice arriba

y (cuadri)vector dual (o 'covariante') a 4 números que transforman como x_ν:

por definición de $\underset{\sim}{\Lambda}$

$$\underline{V} \equiv \bar{V}\cdot = \bar{V}^T \underset{\sim}{\eta} \to \underline{V}' \equiv \bar{V}'\cdot = \bar{V}'^T \underset{\sim}{\eta} = \bar{V}^T \underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta} = \bar{V}^T \underset{\sim}{\eta}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} = \underline{V}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{-1}$$

$$\longleftrightarrow \quad V_\mu \to V'_\mu = V^\nu \eta_{\nu\lambda} (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu = V_\lambda (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \,.$$

Queda claro entonces que, por definición, el número que obtenemos cuando cualquier vector dual $\underline{V}$ actúa sobre cualquier vector $\bar{W}$ es invariante de Lorentz (y no es otra cosa que el producto interno entre $\bar{V}$ y $\bar{W}$):

$$\underline{V}'\bar{W}' = (\underline{V}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{-1})(\underset{\sim}{\Lambda} \bar{W}) = \underline{V}\bar{W} = \bar{V}\cdot\bar{W}$$

$$\longleftrightarrow \quad V'_\mu W'^\mu = V_\lambda \underbrace{(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu}_{\delta^\lambda{}_\nu \,\leftarrow\, \text{componentes de } \underset{\sim}{\mathbb{1}}} W^\nu = V_\nu W^\nu \,.$$

miércoles, 02 de mayo de 2007
07:29 p.m.

Para que nuestra discusión sea menos abstracta, conviene pausar para recordar la forma que toman algunos ejemplos bien conocidos de transformaciones de Lorentz.

Claramente cualquier rotación $\underset{\sim}{R} \in SO(3)$ define un elemento de $SO^{+}(3,1)$, porque

$$\underset{\sim}{\Lambda}(\underset{\sim}{R}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \underset{\sim}{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

satisface $\underset{\sim}{\Lambda}^{T} \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\eta}$ (y tiene $\det \underset{\sim}{\Lambda} = +1$, $\Lambda^{0}{}_{0} = +1$).

En particular, la rotación en el plano 1-2,

$$^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12} & -\operatorname{sen}\theta_{12} & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una transformación de Lorentz, y evidentemente también lo son las otras 2 rotaciones independientes $^{(13)}\Lambda(\theta_{13})$ y $^{(23)}\Lambda(\theta_{23})$.

miércoles, 02 de mayo de 2007
07:38 p.m.

Por supuesto, en el grupo de Lorentz ¡también figuran las transformaciones que descubrió Lorentz! P.ej., el 'empujón' en la dirección 1,

$$ {}^{(01)}\Lambda(v_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \gamma_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}, $$

junto con los otros 2 empujones independientes ${}^{(02)}\Lambda(v_2)$ y ${}^{(03)}\Lambda(v_3)$.

Y de hecho, resulta ser el caso que cualquier elemento de $SO^+(3,1)$ se puede expresar como un producto de estas 3 rotaciones y 3 empujones, con cierta elección de los parámetros $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, v_1, v_2, v_3$. El grupo completo $O(3,1)$ resulta de agregar además la paridad $\underset{\sim}{P} = -\underset{\sim}{\eta}$ y la inversión temporal $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\eta}$.

Incluyendo las translaciones (asociadas a 4 parámetros adicionales) se obtiene el llamado grupo de Poincaré.

En nuestra descripción de sistemas físicos, algunas veces necesitamos objetos que transforman bajo Lorentz de manera más complicada. En particular, llamamos (cuadri)tensor de rango (m,n) a cualquier colección de 4^{m+n} números $T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}$ que transforman bajo Lorentz igual que el producto (directo) de m vectores y n vectores duales:

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_m}{}_{\rho_m} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1} \cdots (\Lambda^{-1})^{\sigma_n}{}_{\nu_n} T^{\rho_1 \cdots \rho_m}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}$$

Notar que, así como al hablar de vectores 3-dim nuestras ecuaciones son covariantes bajo rotaciones (= grupo $SO(3)$) solamente si tenemos cuidado de igualar expresiones que transforman de la misma manera (p.ej.,

$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho}_{\text{escalar}}$ ó $\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{\text{vector}}$ son covariantes, pero

$B' = E^2$ ó $\vec{E}\times\vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{E}^2 \\ \vec{E}\cdot\vec{B} \\ \vec{B}^2 \end{pmatrix}$ no lo son, $\therefore$ solo podrían ser ciertas en un marco de referencia específico), al hablar de cuadrivectores y cuadritensores, nuestras ecuaciones serán covariantes bajo Lorentz (= grupo $SO(3,1)$) solo si tenemos cuidado de igualar cantidades que transforman de la misma manera.

En nuestras convenciones, tenemos 2 tipos de índices: los llamados índices 'mudos', que aparecen repetidos (uno arriba y otro abajo) de un mismo lado de la ecuación, implicando en automático una suma sobre sus posibles valores, y los índices restantes, llamados índices 'libres', sobre los cuales no sumamos. Hemos visto que los primeros transforman (después de la suma) como una cantidad escalar,

$$\underbrace{T^{\mu_1\cdots\mu_r\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\mu_r\cdots\nu_n}}_{\text{tensor de rango }(m-1,n-1)} \longrightarrow \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\cdots\Lambda^{\mu_r}{}_{\rho_r}\cdots\Lambda^{\mu_m}{}_{\rho_m}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_r}{}_{\mu_r}\cdots(\Lambda^{-1})^{\sigma_n}{}_{\nu_n}\,T^{\rho_1\cdots\rho_r\cdots\rho_m}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_r\cdots\sigma_n},$$

$$= \delta^{\sigma_r}{}_{\rho_r}$$

así que para tener ecuaciones covariantes lo que importa es que los índices libres estén 'balanceados', es decir que

miércoles, 02 de mayo de 2007
07:22 p.m.

en ambos lados de la ecuación aparezcan igual número y valores de índices libres alzados y bajados. P.ej.,

$$T^{\mu}{}_{\nu} S^{\nu\lambda\rho} = R^{\alpha\beta} U_{\beta}{}^{\lambda\mu} V^{\rho}{}_{\alpha}$$ es covariante, pero

$$T^{\alpha}{}_{\gamma} S^{\gamma}{}_{\rho} = U^{\mu\gamma} V_{\alpha}{}^{\rho}$$ no lo es.

Entre las cantidades físicas que ejemplifican estas definiciones tenemos a

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad x_{\mu} = (-x^0, \vec{x}) \quad ; \quad d\tau^2 \equiv -dx^{\mu} dx_{\mu} \; ;$$

tiempo propio

$$\partial_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right), \quad \partial^{\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x^0} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} ;$$

la cuadrivelocidad

$$u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dx^0} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{con } \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \quad (\leftrightarrow \vec{u}^2 = -1);$$

el cuadrimomento

$$p^{\mu} \equiv m u^{\mu} = m\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (\leftrightarrow \vec{p}^2 \equiv -E^2 + \vec{p}^2 = -m^2);$$

el tensor de energía-momento (o energía-esfuerzos)

$$T^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \vec{\wp} \\ \vec{\wp}^T & T^{ij} \end{pmatrix}$$

ε = densidad de energía
$\vec{\wp}$ = densidad de momento
T^{ij} = tensor de esfuerzos $(d\vec{F} = \underset{\sim}{T}\, d\vec{A})$;

miércoles, 02 de mayo de 2007
10:15 p.m.

el cuadripotencial o campo de norma electromagnético ;

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

← potencial escalar : $\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|}$ para carga estática Q en sistema de unidades 'Gaussiano' [ver Jackson]

potencial vectorial : $\vec{A}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ ← densidad de corriente estática

la intensidad de campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

– que condensa al campo eléctrico usual $\vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla}\Phi$

y el magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$;

así como la cuadricorriente $J^\mu \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$ ← densidad de carga ← densidad de corriente

En esta notación, la ec. de continuidad (que expresa la conservación de la carga) es $\partial_\mu J^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, y las ecs. de Maxwell adoptan la forma

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu , \\ \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 . \end{cases}$$

La 2da. ecuación se puede escribir también en la forma

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 ,$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$, con

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } \geq 2 \text{ índices coinciden} \\ +1 & \text{si } (\mu\nu\lambda\rho) = (0123) \text{ o permutación } \underline{\text{par}} \\ -1 & \text{si } (\mu\nu\lambda\rho) = \text{permutación } \underline{\text{impar}} \text{ de } (0123) \end{cases}$$

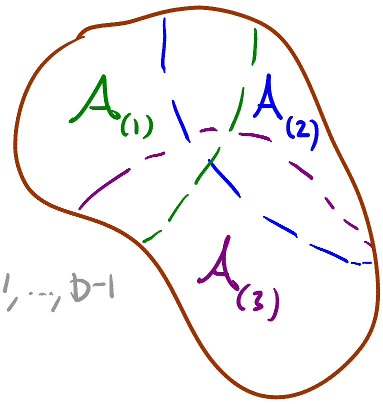
es la llamada intensidad de campo dual, debido a que la traducción $F^{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$ corresponde a $(\vec{E}, \vec{B}) \leftrightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$.

Las ecs. de Maxwell ilustran la utilidad de la notación relativista: al escribirlas en términos de $F^{\mu\nu}$ en vez de $\vec{E}, \vec{B}$, no solo se vuelven más compactas, sino que además su covariancia bajo Lorentz queda manifiesta.

Para formular la relatividad general, contemplamos la posibilidad de que el espaciotiempo esté curvado y difiera $\therefore$ del espaciotiempo de Minkowski.

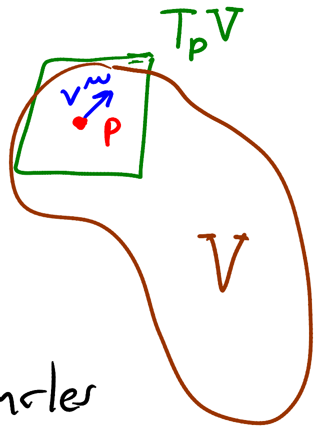
Definimos primero una variedad diferenciable D-dimensional V como un espacio que se parece 'por cachos' a $\mathbb{R}^D$, de tal manera que podemos asignarles coordenadas $x^\mu_{(r)}$ a puntos en distintas regiones abiertas $A_{(r)}$, $r=1,2,\ldots$, asegurándonos de que todos los mapeos $x^\mu_{(r)} \mapsto x^\mu_{(s)}$ definidos en las regiones de traslape $A_{(r)} \cap A_{(s)}$ sean diferenciables.

$\mu = 0,1,\ldots,D-1$



Con esto logramos tener la noción usual de derivada en cada punto, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Pero es importante notar que V no es un espacio vectorial: no incorpora una definición natural de la suma de 2 puntos. Así que, a diferencia de lo que sucede en $\mathbb{R}^D$, las propias coordenadas x^μ NO son vectores.

lunes, 07 de mayo de 2007
07:26 p.m.



Por otro lado, en la vecindad inmediata de cualquier punto $p \in V$, el espacio es por definición una copia de $\mathbb{R}^D$, así que debe existir alguna noción de vectores pensados intuitivamente como desplazamientos infinitesimales en torno a p. Esto se implementa definiendo a un vector ←omitir (contravariante) en el punto p, como una colección $\bar{V}$ de D números v^μ que bajo un cambio de coordenadas ('difeomorfismos') $x^\mu \to x'^\mu(x^\nu)$, se mezclan de acuerdo con

$$v^\mu \to v'^\mu = \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p v^\nu .$$

Recordando que las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y las transformaciones de Lorentz en $\mathbb{R}^{3,1}$ son cambios de coordenadas lineales, vemos que esta definición coincide con la ya conocida en esos casos. Claramente el conjunto de todos los vectores definidos en un punto dado sí forman un espacio vectorial (que se denota T_pV, y se conoce como el 'espacio tangente a V en p'), pero nuevamente es importante resaltar que no hay de

lunes, 07 de mayo de 2007
07:50 p.m.

entrada una manera de sumar vectores definidos en distintos puntos $p, p' \in V$.

De manera similar, llamamos vector dual (o vector covariante, covector, o uno-forma) en $p \in V$ a una colección $\underline{\omega}$ de D números ω_μ que transforman de acuerdo con

omitir

$$\omega_\mu \to \omega'_\mu = \left.\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right|_p \omega_\nu \,,$$

y más en general, llamamos tensor de rango (m,n) en $p \in V$ a una colección $\underset{\sim}{T}$ de D^{m+n} números tales que

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \longrightarrow T'^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\lambda_m}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\lambda_1 \cdots \lambda_m}{}_{\rho_1 \cdots \rho_n} .$$

Utilizaremos también la noción de campo tensorial, $T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n}(x)$, que se refiere a la elección de un tensor en cada $p \in V$.

Notemos que los ω_μ en verdad son 'vectores duales', en el sentido de que mapean vectores v^μ a números:

$\underline{\omega}(\bar{v}) \equiv \omega_\mu v^\mu$ es un escalar (un tensor de rango $(0,0)$), invariante bajo cambios de coordenadas.

(Más en general, la 'contracción'

$T^{\mu_1 \cdots \lambda \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \lambda \cdots \nu_n}$ es un tensor de rango $(m-1, n-1)$.)

Pero es importante nuevamente resaltar que NO existe de entrada ninguna identificación natural entre los elementos del espacio de vectores en un punto dado (el 'espacio tangente', $T_p V$) y el espacio de vectores duales en ese mismo punto (el llamado 'espacio cotangente', $T_p^* V$), es decir, una manera (invariante bajo 'difeos') de saber cuál $\underline{\omega}$ le corresponde a un $\bar{V}$ dado.

Recordemos que en el espacio de Minkowski sí teníamos tal identificación biunívoca, $V^\mu \leftrightarrow V_\mu = (-V^0, V^1, V^2, V^3)$, pero para establecerla utilizamos la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, cuyo propósito en la vida era precisamente permitirnos establecer esta relación entre vectores y vectores duales ($V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu$), o, de manera equivalente, definir un producto interno (y $\therefore$ una norma) para vectores ($\underline{V} \cdot \underline{W} \equiv V^\mu \eta_{\mu\nu} W^\nu = V_\nu W^\nu = V^\mu W_\mu$).

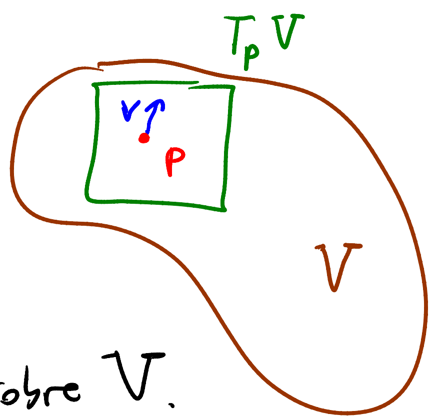
martes, 08 de mayo de 2007
08:32 a.m.

Necesitamos ∴ extender este concepto al caso de una variedad más general: definimos una métrica en V como un campo tensorial de rango $(0,2)$, $\boxed{g_{\mu\nu}(x)}$, que es simétrico $\left(g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)\right)$ y 'no degenerado' (ver abajo).

Este objeto nos define un producto interno

$$\bar{V}\cdot\bar{W} \equiv \underset{\sim}{g}(\bar{V},\bar{W}) \equiv g_{\mu\nu}\big|_p V^\mu W^\nu \quad (=\bar{W}\cdot\bar{V}),$$

y ∴ una norma $V^2 \equiv V\cdot V = g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ (no necesariamente positiva definida). Dado que los vectores en cada $p\in V$ representan intuitivamente desplazamientos infinitesimales, la métrica, al fijar su tamaño (y producto interno), nos está dando una noción de distancia (y ángulos) sobre V.



El que sea 'no degenerada' se refiere a que tengamos

$$\underline{V}\cdot\underline{W} = g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = 0 \quad \forall\, \underline{V} \quad \text{solo si} \quad \underline{W}=0.$$