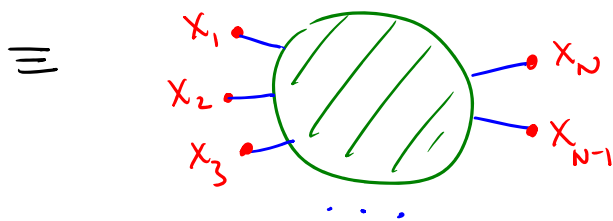


En ambos casos, los diagramas de Feynman tienen una utilidad doble (si  $\lambda \ll 1$ ). Por una parte, nos permiten visualizar el efecto de las interacciones como procesos donde se crean y/o aniquilan partículas (en grupos de 4 para  $\varphi^4$ ).

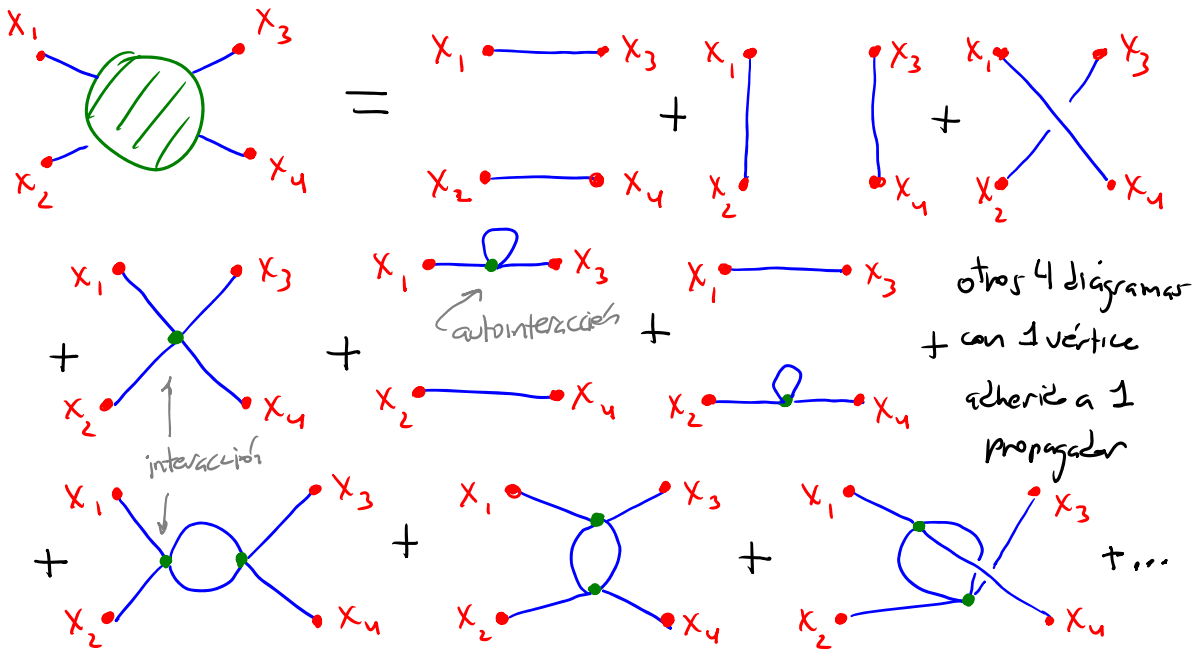
Las que existen solo efímeramente, entre procesos sucesivos de interacción, se conocen como partículas virtuales ( $\leftrightarrow p^2 \neq m^2$ ).

Por otra parte, los diagramas son una herramienta eficiente para hacer cálculos, gracias a las instrucciones explícitas que nos permiten convertir cada diagrama en una fórmula, instrucciones conocidas como reglas de Feynman. Cuando uno mira los detalles, se encuentra que

$G_N(x_1, \dots, x_N) =$  Suma sobre todos los diagramas conexos (es decir, sin burbujas de vacío) topológicamente distintos con  $N$  puntas externas  $x_1, \dots, x_N$



Pej., la función de 4 puntos  $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  está dada por



Resumiendo lo que hemos aprendido, y omitiendo

16

desde ahora en adelante los colores que habíamos usado para distinguir entre puntos externos e internos, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría  $\phi^4$  en espacio de posición son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con  $N$  puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas.

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x' \end{array} \equiv G(x, x') \quad (\text{amplitud de probabilidad de propagación libre}).$$

2) Por cada vértice, asignar un factor de



$$\equiv -i\lambda \int d^4 y$$

(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierte en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).

3) Por cada punto externo, asignar un factor de



$$\equiv 1$$

(~ amplitud de probabilidad de que la partícula que está en  $x$  esté en  $x$ ).

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el "factor de simetría", un numerito que

depende de las propiedades del diagrama, y evita sobrecontar procesos (ver p.ej. pp. 405-9 de mi curso de campo de poigrad).

NO hace falta tal corrección en p.ej. QED o QCD.

Frecuentemente es más fácil trabajar en espacio de momento, cosa que es natural en particular si queremos calcular los propios correladores en espacio de momento,

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^3 x_1 \dots d^3 x_N e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_N x_N} G_N(x_1, \dots, x_N).$$

En este caso los diagramas no tienen puntos externos asociados a las posiciones  $x_n$ , sino patas externas asociadas a los momentos  $p_n$ .



Perfecto: ya tenemos una receta completamente sistemática para cumplir con la aspiración en la vida de los campistas: calcular los correladores  $G_N$  ó  $\tilde{G}_N \forall N$ .  
Ahora, ¿eso para qué nos sirve?

Bueno, antes de contestar eso, debemos primero poder visualizar de algún modo el comportamiento de nuestro campo interactuante. Hasta ahora, la única conexión que conocemos entre una relatividad cuántica y una colección de partículas se refiere a estados  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle$  donde las partículas individuales se identifican / etiquetan por sus momentos  $\vec{p}_n$  y tienen energía  $E_{\vec{p}_n} = \sqrt{\vec{p}_n^2 + m^2}$  (porque eso es lo que llamamos una partícula) ; pero la energía total es  $E = E_{\vec{p}_1} + \dots + E_{\vec{p}_N}$ , lo cual parece restringirnos forzadamente a partículas libres.

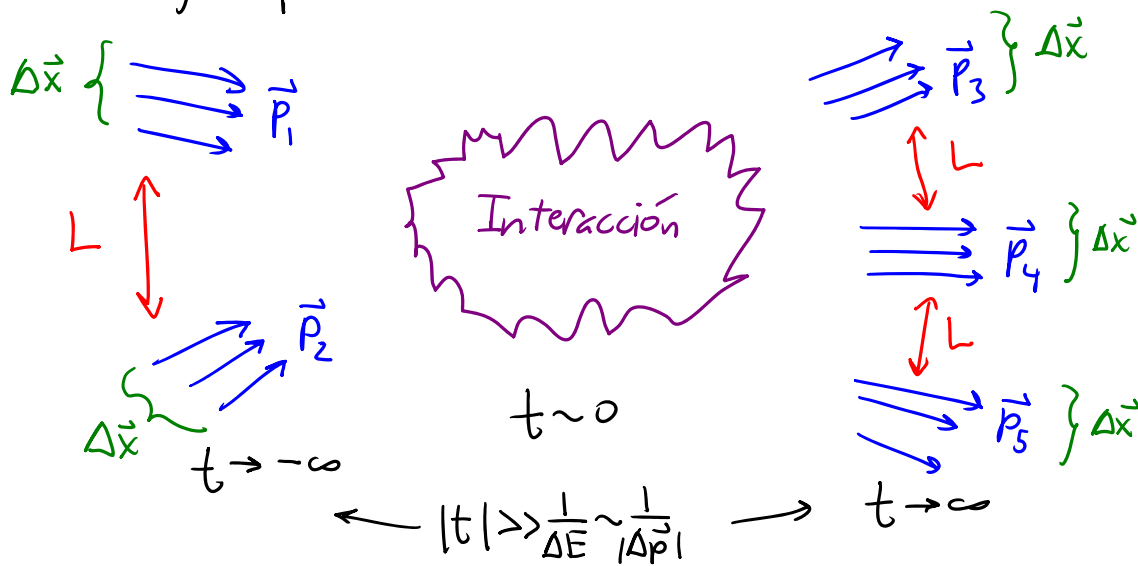
¿Cómo podríamos encontrar entre los estados cuánticos de nuestro campo interactuante partículas que conserven suficiente individualidad como para que podamos identificarlos como tales, pero al mismo tiempo sí interactúan?

Una pista proviene del hecho de que, si bien es cierto

que en el mundo real las partículas en general no son libres, la situación experimental usual se refiere a un proceso de dispersión, donde un cierto número de partículas se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo (cuando " $t \rightarrow +\infty$ "). Si las interacciones entre las partículas son (al menos aproximadamente) locales, entonces disminuyen en intensidad con la distancia, así que cuando " $t \rightarrow \pm\infty$ " tenemos un estado inicial/final en el que las partículas son aproximadamente libres. Son estas partículas las que queremos describir con los estados "multipartículas"  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$ . Esto pudiera sonar confuso, porque las partículas de las que hablamos tienen un momento  $\vec{p}$  completamente definido, y por tanto una posición  $\vec{x}$  completamente incierta, con lo cual no queda claro en que sentido podemos separarlas unas de otras...

Lo que en realidad queremos decir es que cuando

$t \rightarrow \pm\infty$  tenemos paquetes de onda de tamaño  $|\Delta\vec{x}|$  mucho mayor que la longitud de onda asociada al momento promedio  $|\vec{p}|$  del paquete,  $|\Delta\vec{x}| \gg \lambda_{\text{de Broglie}} \sim \frac{1}{|\vec{p}|}$ , pero con una separación  $L$  entre paquetes que es aún mucho mayor que este tamaño:



De esta manera satisficemos por un lado  $|\vec{p}| \gg |\Delta\vec{p}|$ , así que las partículas se pueden aproximar por ondas planas con momento definido, y por otro lado  $L \gg |\Delta\vec{x}|$ , así que las partículas se pueden considerar no interactuantes.

Podemos definir entonces un estado entrante / saliente

$$| \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N ; \pm \rangle$$

asintótico

como que estab en el cuadro de Heisenberg en el cual se detectarán las partículas indicadas si se realiza una medición al tiempo  $t \rightarrow \mp \infty$ .

Para comparar con resultados experimentales, nuestro objetivo principal será entonces calcular los traslapes entre los estados entrantes y los salientes,

$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n ; - | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n ; + \rangle \equiv S_{p', \dots, p} \equiv S_{\mp \mp}$$

que representan la amplitudes de probabilidad de que ocurran los procesos de dispersión señalados, y se conocen como amplitudes de dispersión o (todas juntas) la matriz S (o matriz de dispersión).

Estas amplitudes están muy directamente relacionadas con las cantidades que los físicos experimentales miden directamente: "secciones eficaces" y "tasas de decaimiento".

Ahora que entendemos cómo buscar la información física, tiene por fin sentido preguntarnos cómo extraer física a partir de las cantidades teóricas que ya sabemos calcular, las funciones de correlación.



Y la buena noticia es que hay una relación estrecha entre los conectores en espacio de momentos,  $\tilde{G}_2(p_1, \dots, p_n)$  y los amplitudes de dispersión.

SIW invocar la expansión perturbativa (y sin restringir por tanto a la región de acoplamiento débil), se pueden demostrar 2 resultados generales:

I) Mientras que en una teoría libre encontramos que

$$\tilde{G}_2^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad \text{en } m^2 \equiv \partial_\phi^2 V(0),$$

en una teoría interactuante se encuentra que, por cada partícula que exista (estados asintóticos  $|\vec{p}\rangle$  asociados en alguna medida a algún operador de campo,  $\hat{O}|\Omega\rangle \sim |\vec{p}\rangle + \dots$ ), ↖ en cuadro de Heisenberg

↖ no necesariamente un  $\hat{\phi}$  básico (puede ser un operador compuesto como p.ej.  $\hat{\phi}^2$ )

se tiene

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{i Z_0}{p^2 - M^2} + \dots$$

$\equiv |\langle \vec{p} | \hat{O}(0) | \Omega \rangle|^2$  "cte. de renormalización del campo"  
 probabilidad de que  $\hat{O}$  cree  $\frac{1}{2}$  partícula

↖ Fourier de  $\langle \Omega | T \{ \hat{O}(x_1) \hat{O}(x_2) \} | \Omega \rangle$

↖ masa física (o "renormalizada") de la partícula:  $E_p = \sqrt{p^2 + M^2} \Leftrightarrow p^2 = M^2$

$\neq m^2$  "masa desnuda"  
 ( $\lambda=0 \Rightarrow M^2 = m^2, Z=1$ )

(Esto es parte de lo que se conoce como la "representación espectral" de Källén-Lehmann.)

II) Más en general, las partículas (de  $n$  de veces) se detectan siempre como polos en los  $\tilde{G}_N$ , y las amplitudes de dispersión son básicamente el residuo del polo múltiple asociado a todas las partículas involucradas:

$$\langle p'_1 \dots p'_N; - | p_1 \dots p_N; + \rangle = \lim_{\substack{p_n'^2 \rightarrow M_n^2 \\ p_n^2 \rightarrow M_n^2}} (\sqrt{Z})^{-N} \frac{p_1'^2 - M_1^2}{i} \dots \frac{p_N'^2 - M_N^2}{i} \tilde{G}_{N+N}(p'_1, \dots, p'_N, -p_1, \dots, -p_N)$$

↑  
todas las energías  $p_n^0, p_n'^0 > 0$

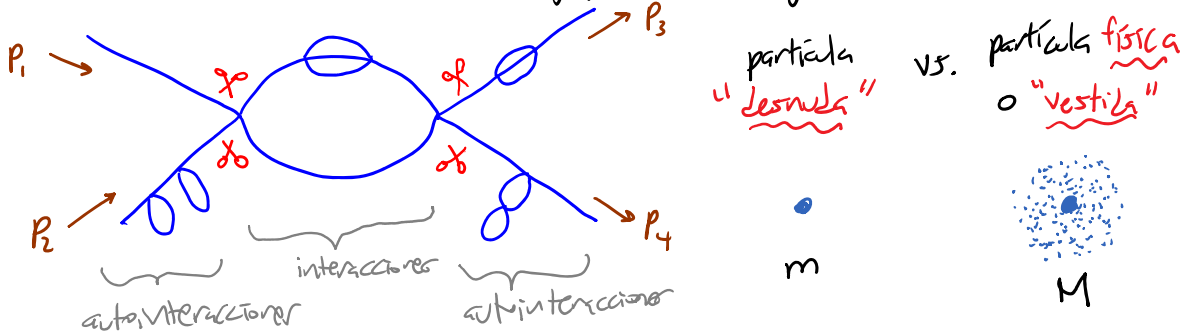
Esto es lo llamado "fórmula de reducción" de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).

Si nos restringimos de nuevo a teorías débilmente acopladas, sabemos calcular  $\tilde{G}_N$  usando diagramas de Feynman, y al implementar a ese nivel la fórmula de LSZ, se acaba encontrando que


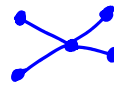
$$\langle p'_1 p'_2 \dots p'_N ; - | p_1 p_2 \dots p_N ; + \rangle =$$

suma sobre diagramas conexos y amputados

donde "amputado" un diagrama significa eliminar las patas externas, cortando cada una de ellas en el lugar más interno posible. P.ej., en el diagrama



habría que cortar en donde aparecen las tijeras: empezando en la punta de cada pata y caminando hacia el centro del diagrama, encontramos el último lugar donde la pata se desconecta del diagrama al conservar 1 sola línea, y cortamos precisamente ahí, descartando incluso el propagador libre asociado a esa última línea (que por esta razón denotaremos por ahora como puntada), y reemplazándolo por un factor de  $\sqrt{z}$  (= 1 a orden más bajo en la expansión). No conviene entonces solo dibujar diagramas ya amputados.

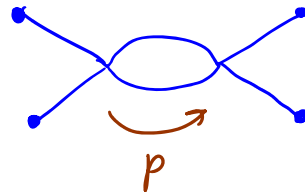
Al hacer cuentas en la práctica, siempre es relativamente fácil obtener resultados explícitos para los diagramas "a nivel árbol" ( $\equiv$  sin lazos, como p.ej.  ó ) , pero más allá de eso nos encontramos genéricamente con 2 problemas:

1) En un diagrama con 1 ó más lazos, la(s) integral(es)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

sobre los momentos

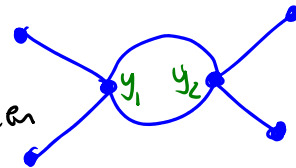
indeterminadas (uno por cada lazo)



en general no convergen para p's grandes,  $p^\mu \rightarrow \pm\infty$

En espacio de posiciones, estas

"divergencias ultravioleta" ( $\equiv$  UV) provienen



del límite de distancias pequeñas donde 2 ó más

vértices coinciden en el espaciotiempo,  $y_1^\mu \rightarrow y_2^\mu$ .

Si la teoría tiene la propiedad de ser "renormalizable",

estas divergencias UV se pueden eliminar ajustando un número finito de parámetros (cuyos valores deducimos

de los datos experimentales). Este procedimiento

se conoce como renormalización, y tiene perfecto sentido

físico: no es más que un cambio de lenguaje, para

reportar nuestros resultados No en términos de los parámetros "de nudos" que figuran en  $\mathcal{L}$  ( $m, \lambda, \dots$ ), sino de parámetros físicos ( $M, \Lambda, \dots$ ), relacionados con cantidades medibles.

[ En teorías con partículas sin masa, como QED, por los propagadores  $\propto \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$  pueden aparecer además "divergencias infrarrojas" ( $\equiv IR$ ), que corresponden a bajas energías,  $p^M \rightarrow 0$ , o lo que es lo mismo, distancias grandes,  $|y_1^M - y_2^M| \rightarrow \infty$ . ]

2) El número de diagramas que se obtienen a  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  crece muy rápidamente — típicamente  $\sim n!$  —, de tal manera que  $G_N^{(n)} \sim \lambda^n n!$  y  $\therefore$  la serie perturbativa NO converge.

Esta es una señal clara de que el método perturbativo NO contiene toda la física: existen efectos NO perturbativos (típicamente  $\sim \exp(-1/\lambda)$ : no desarrollables en Taylor), que son pequeños si el acoplamiento es débil.

Con lo anterior tenemos ya completo el paquete básico de ideas para un campo escalar débilmente acoplado. Debemos tener siempre presente que cuando el acoplamiento es fuerte ( $\lambda \sim 1$ , o peor aún,  $\lambda \gg 1$ ), la expansión perturbativa es completamente inútil: ¡no nos sirve ni como método de cálculo ni de visualización!

Para entender a y hacer cálculos en campos no escalares, las ideas y herramientas básicas son las mismas, aunque en cada caso surgen novedades interesantes.

Algunos comentarios:

- Para describir partículas con espín 1, se utiliza un campo vectorial  $A_\mu(x)$ : una colección de 4 números en cada lugar, que bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu,$$

↪ matriz 4x4 tal que  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

se mezclan de acuerdo con

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$$

↑ nuevo nombre del punto  
↑ nuevas funciones características

"representación vectorial  
del grupo de Lorentz"

Si nuestro campo vectorial es No medido, como es el caso del potencial electromagnético, hay una novedad importante: la existencia de "transformaciones de normas" (gauge). En el caso de electro, también la forma

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Theta(x)$$

en  $\Theta(x)$  una función arbitraria, y tienen la peculiaridad de que no producen ningún cambio en el sistema físico: las configuraciones  $A_{\mu}(x)$  y  $A'_{\mu}(x)$  son completamente equivalentes:  $A'_{\mu}(x) \simeq A_{\mu}(x) \forall \Theta(x)$ !  
Es decir, no solo es que la ecuación de Maxwell

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con } F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

no cambia (como es el caso por una simetría), sino que los propios estados físicos no cambian:

$|A_{\mu}(x)\rangle$  y  $|A'_{\mu}(x)\rangle$  son el mismo vector en el espacio de Hilbert físico.

En otras palabras, la invariancia de norma (más llamada simetría de norma) nos indica que nuestra descripción es redundante: tenemos más variables que grado de libertad físicos.

En el caso familiar de electrodinámica esto en realidad nos debería resultar obvio:  $A_\mu(x)$  tiene **4** componentes, pero los fotones (o las ondas electromagnéticas clásicas) tienen solo **2** estados de polarización independientes.

Esta redundancia complica un poco el proceso de cuantización, y subsanar teniendo básicamente 2 opciones:

- 1) Eliminar la redundancia ("fixar la norma") por completo ANTES de cuantizar, pero solo promover las variables físicas a operadores (p.ej., podemos usar la "norma de Coulomb"  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, A_0 = 0$ , donde únicamente  $\vec{A}_\perp \rightarrow \hat{\vec{A}}_\perp$ .)  $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right.$  no invariante bajo Lorentz
- 2) Cuantizar PRIMERO,  $A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu$ , obteniendo una descripción cuántica redundante, donde el espacio de Hilbert es demasiado grande (existen estados que no son físicos), y DESPUÉS eliminar



la redundancia (p.ej., en la "norma de Lorentz",  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , identificamos cuáles estados son físicos exigiendo que  $(\partial_\mu \hat{A}^\mu)_+ |0\rangle = 0$ ).

↑ parte de frecuencia positiva ( $\sim \hat{a}$ )

Un punto muy interesante es que, si tenemos un campo complejo  $\Phi(x)$  y un campo de norma ( $\equiv$  vectorial sin masa)  $A_\mu(x)$ , la simetría interna

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Phi(x) \quad \leftarrow \text{transformación global (la rotación es la misma en todo el espaciotiempo)}$$

↖ grupo U(1)

puede generalizarse a un conjunto de rotaciones internas locales  $\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \Phi(x)$ ,  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$

↖ rotación diferente en cada lugar

con el simple truco de reemplazar en el término cinético a la derivada usual por una derivada covariante,

$$D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + i A_\mu) \Phi$$

↖  $D_\mu \Phi$  transforma igual que  $\Phi$ :  
 $\Phi \rightarrow e^{i\theta(x)} \Phi \Rightarrow D_\mu \Phi \rightarrow e^{i\theta(x)} D_\mu \Phi$

P.ej.  $\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$  para Klein-Gordon.

↖ contiene  $\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi$  y términos de interacción  $\sim A \Phi^\dagger \Phi, A^2 \Phi^\dagger \Phi$

¡Y está en LA manera en que el potencial electromagnético se acopla a los campos con cargas eléctricas ("acoplamiento mínimo")!

El Modelo Estándar entero está basado en este principio de invariancia de normas, utilizando

a campo de normas matriciales  $A_{IJ}^{\mu}(x)$   $\leftarrow 1, \dots, N$   
 asociado a la "simetría" local  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$   
 en lugar del  $U(1)$  que tenemos en electrodinámica.  
 grupo no abeliano: Matrices No conmutan

En un poquito más de detalle: este campo matricial  $A_{IJ}^{\mu}(x)$ , en lugar de transformarse como el potencial electromagnético,

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\theta(x) \\ = e^{-i\theta(x)} (A_{\mu}(x) - i\partial_{\mu}) e^{i\theta(x)},$$

"matrices"  $1 \times 1$

Cambian de acuerdo con "generadores" del grupo no abeliano  
 parámetro  $(\alpha=1, \dots, d) \rightarrow$  p.ej.  $SU(N)$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = \exp(-i\theta(x)T_{\alpha}) (A_{\mu}(x) - i\partial_{\mu}) \exp(i\theta(x)T_{\alpha})$$

Matrices  $N \times N$

La intensidad de campo  $F_{IJ}^{\mu\nu}(x)$  se define en este caso como

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + i[A_{\mu}, A_{\nu}]$$

$\neq 0$  en general

$F_{\mu\nu}(x)$  no es invariante de norma, sino que transformamos de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(-i\theta^\alpha(x)T_\alpha) F_{\mu\nu}(x) \exp(i\theta^\beta(x)T_\beta).$$

La densidad lagrangiana es una generalización de la de Maxwell,  $\leftarrow$  incluye interacciones  $\sim A^3, A^4$

$$\mathcal{L}_{YM}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)) = -\frac{1}{4} \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)].$$

Lagrangiano  
de  
Yang-Mills

Un ejemplo de un campo de Yang-Mills es el campo gluónico (responsable de la interacción fuerte), asociado a transformaciones de norma con grupo  $SU(3)$  (matrices complejas  $3 \times 3$  unitarias y con determinante = 1).

La receta para acoplar un campo de Yang-Mills a un campo de materia es la misma que antes. Necesitamos que el campo de materia tenga para empezar una simetría global bajo el grupo de norma en cuestión. P.ej.,  $N$  campos escalares complejos  $\Phi_I(x)$  que transforman de acuerdo con  $\leftarrow I=1, \dots, N$

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) = e^{i\theta^\alpha T_\alpha} \Phi(x) \quad \leftarrow \text{misma rotación } \forall x$$

$\leftarrow$  los  $N$  campos empacotados en una columna

Tal como en el caso electromagnético (p.68), si definimos la derivada covariante

$$\boxed{D_\mu \Phi \equiv (\partial_\mu + iA_\mu) \Phi}$$

y reemplazamos en el lagrangiano de  $\Phi$  a  $\partial_\mu \Phi$  por  $D_\mu \Phi$  (p.ej.,  $\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$  en Klein-Gordon), entonces la simetría global que también se convierte en una simetría local,

$$\Phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) \Phi(x)$$

$$(y \quad D\Phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) D\Phi(x) ).$$

- Para describir a partículas de espín 1/2, como el electrón, usamos un campo espinorial.

← un espinor de Dirac (= 2 espinores de Weyl = 4 números complejos) en cada punto

$$\boxed{\Psi_a(x)} \quad \leftarrow = 1, 2, 3, 4 \text{ índice que normalmente no se muestra explícitamente}$$

$$\text{Bajo } x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + c^\mu, \quad \Psi_a(x) \rightarrow \Psi'_a(x') = M_{ab}(\Lambda) \Psi_b(x)$$

Para que esto tenga sentido, debe ser cierto que

$$M(\Lambda_2) M(\Lambda_1) = M(\Lambda_2 \Lambda_1), \text{ pues de otro modo obtendríamos}$$

un distinto resultado para el nuevo espínor  $\psi'_a$  dependiendo de si hacemos una transformación de Lorentz de un jalón o por pivote.

Para decir con total precisión qué es un espínor, necesitamos entonces especificar quééer son las  $M(\Lambda)$ , es decir, dar una regla para asociar a cada transformación de Lorentz  $\Lambda^\mu_\nu$  una matriz compleja  $4 \times 4$   $M_{ab}(\Lambda)$ , de tal modo que las  $M$ 's satisfagan la misma "tabla de multiplicación" que las  $\Lambda$ 's. Matemáticamente, esto significa que las  $M$ 's deben formar una representación del grupo de Lorentz.

Por ende entonces recordo primero un poco más sobre la estructura del grupo de Lorentz. Las  $\Lambda^\mu_\nu$  (que en si mismas forman la representación vectorial del grupo de Lorentz) se definen como todas aquellas matrices reales  $4 \times 4$  tales que  $(x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Rightarrow x' \cdot y' = x \cdot y, y \cdot z)$

$$\Lambda^\lambda_\mu \Lambda^\rho_\nu \eta_{\lambda\rho} = (\Lambda^T)^\lambda_\mu \eta_{\lambda\rho} \Lambda^\rho_\nu = \eta_{\mu\nu},$$

es decir,

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta}$$

← grupo  $O(3,1)$

← grupo  $O(3)$

(cf. rotaciones:  $R^T \mathbb{1} R = \mathbb{1}$ ).

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}$$

Alemás de las transformaciones discretas

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Paridad (inversión espacial),}$$

$$P^2 = \mathbb{1}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Inversión temporal,}$$

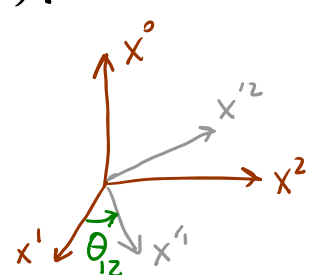
$$T^2 = \mathbb{1}, \quad PT = TP$$

Las  $\Lambda$ 's incluyen 6 transformaciones continuas independientes:

- Rotaciones en el plano 1-2 (ó 1-3, ó 2-3):

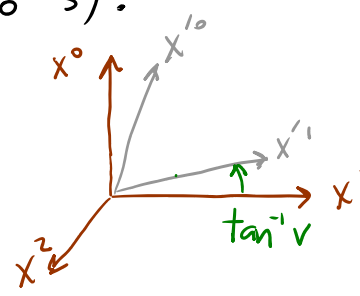
$${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ 0 & -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$0 \leq \theta_{12} < 2\pi$



(Estas 3 rotaciones y sus productos forman el subgrupo más familiar  $SO(3) \subset SO^+(3,1) \subset SO(3,1) \subset O(3,1)$ .)

- Empujones en la dirección 1 (ó 2 ó 3):

$${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & -\sinh\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha_1 & \cosh\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


"rapidez"  $\left\{ \begin{array}{l} \cosh\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma \\ \sinh\alpha_1 = \gamma v \quad (-1 \leq v \leq 1) \end{array} \right.$

$-\infty < \alpha_1 < \infty$

(Los 3 empujones y sus productos no forman un subgrupo.)

Cualquier transformación de Lorentz ( $\Lambda \in O(3,1)$ ) puede entenderse como una combinación de rotaciones y empujones,  $\Lambda \in SO^+(3,1)$ , el llamado grupo de Lorentz restringido, con (posiblemente)  $\mathbb{Z}_2$  y/o  $\mathbb{I}$ .

Es posible entender a  $SO^+(3,1)$  con base en transformaciones que difieren sób infinitesimalmente de la identidad:

$$\Lambda = \mathbb{1} + \omega \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \text{con } |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1.$$

El punto es que haciendo muchas transformaciones infinitesimales sucesivas obtendríamos una transformación finita. En el caso infinitesimal, la condición  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  implica que

$$(\delta^\mu{}_\lambda + \omega^\mu{}_\lambda) \eta_{\mu\nu} (\delta^\nu{}_\rho + \omega^\nu{}_\rho) = \eta_{\lambda\rho}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\eta_{\lambda\rho} + \omega_{\rho\lambda} + \omega_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\omega^2)} = \eta_{\lambda\rho}$$

es decir,  $\boxed{\omega_{\rho\lambda} = -\omega_{\lambda\rho}}$ .

Una matriz  $4 \times 4$  real y antisimétrica tiene 6 componentes independientes, justo el número de parámetros continuos

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

independientes que antes dijimos que especifican una transformación de Lorentz general: 3 ángulos de rotación  $\theta_{ij}$  + 3 parámetros de rapidez  $\alpha_i$ . ✓

De hecho, podemos ver la propiedad de antisimetría directamente en las matrices de rotaciones  ${}^{(ij)}\Lambda(\theta_{ij})$  y empujones  ${}^{(0i)}\Lambda(\alpha_i)$  si tomamos  $\theta_i, \alpha_i \ll 1$ .

Por ejemplo, p.ej.,  ${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) = \mathbb{1} + {}^{(12)}\omega(\theta_{12})$ , con

$${}^{(12)}\omega \equiv \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12}-1 & \sin\theta_{12} & 0 \\ 0 & -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}_{\theta_{12} \ll 1}$$

↙ índices  $\mu, \nu$

$$= \theta_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \theta_{12} i J^{(12)} \equiv -\theta_{12} i J^{(21)}$$

↖ Especifica magnitud de transformación

↗ Especifica tipo de transformación

↘ Generador de rotación en el plano 1-2 (índices  $\mu, \nu$ )

y de manera similar,  ${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) = \mathbb{1} + {}^{(01)}\omega(\alpha_1)$ , con

$${}^{(01)}\omega = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \alpha_1 i J^{(01)} \equiv -\alpha_1 i J^{(10)}$$

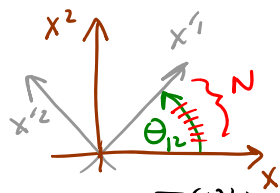
↘ Generador de empujón en la dirección 1

El resultado general es

$$i J_{\mu\nu}^{(p\lambda)} = -\delta_{\mu}^p \delta_{\nu}^{\lambda} + \delta_{\nu}^p \delta_{\mu}^{\lambda}$$



Las matrices de rotaciones/empujones se pueden reconstruir a partir de estos generadores:



pej.,  ${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + i \frac{\theta_{12}}{N} J^{(12)} \right)^N \equiv \exp(i \theta_{12} J^{(12)})$ ,

no infinitesimal

y más en general,

$$\Lambda(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1} + \frac{1}{N} \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{(\mu\nu)} \right) \right]^N = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{(\mu\nu)}\right).$$

cualquier matriz  $4 \times 4$   $\omega_{\mu\nu}$  antisimétrica

porque hay 2 términos iguales

antisimétrica en  $\mu, \nu$   
antisimétrica en  $\lambda, \rho$

generadores del grupo de Lorentz

Claramente las propiedades de los  $\Lambda$ 's provienen enteramente de las propiedades de las  $J$ 's. En particular, la

tabla de multiplicación de los  $\Lambda$ 's resulta estar completamente codificada en las relaciones de conmutación de las  $J$ 's,

$$[J^{(\mu\nu)}, J^{(\rho\sigma)}] = i(\eta^{\mu\sigma} J^{(\nu\rho)} + \eta^{\nu\rho} J^{(\mu\sigma)} - \eta^{\mu\rho} J^{(\nu\sigma)} - \eta^{\nu\sigma} J^{(\mu\rho)})$$

Álgebra de Lorentz (las  $\Lambda$ 's forman lo que se conoce como un "grupo de Lie"; las  $J$ 's son una base para el "álgebra de Lie" correspondiente).

Habiendo entendido lo anterior, vemos que la tarea que tenemos pendiente para definir un espinores, especificar

← infinitas opciones

matrices  $M_{ab}(\Lambda)$  que satisfagan la misma tabla de multiplicación que las  $\Lambda$ 's, se reduce a especificar 6 matrices que satisfagan las mismas reglas de conmutación que las 6  $J$ 's.

Lo que descubrió Dirac (y Cartan, 15 años antes) es que esto puede lograrse definiendo la llamada representación espinorial

$$M(\Lambda) \equiv \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \leftarrow \text{rep del grupo } SO^+(3,1)$$

con  $\uparrow$  caracterizada por  $\omega$   $\uparrow$  matriz  $N \times N$  (con  $N$  que depende de la dimensión del espaciotiempo)

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \leftarrow \text{rep del álgebra } so(3,1)$$

$\uparrow$  matriz  $N \times N$   $[S^{\mu\nu}, S^{\lambda\rho}] = i(\eta^{\mu\rho} S^{\nu\lambda} + \dots)$

donde las matrices de Dirac  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  son

4 matrices  $N \times N$  que satisfacen

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}}$$

$\uparrow$  anticomutador

Álgebra de Clifford  
(o de Dirac)

o, más explícitamente

$$\sum_{b=1}^N \left( (\gamma^\mu)_{ab} (\gamma^\nu)_{bc} + (\gamma^\nu)_{ab} (\gamma^\mu)_{bc} \right) = 2\eta^{\mu\nu} \delta_{ac}.$$

Si la dimensión del espaciotiempo es 4, se puede mostrar que  $N=4$ : las matrices  $\gamma^\mu, S^{\mu\nu}, M$  son matrices complejas  $4 \times 4$ .

(En  $D$  dimensiones espaciotemporales, con  $D$  par,  $N=2^{D/2}$ .

Si  $D$  es impar, basta con tener  $N=2^{(D-1)/2}$ , usando las  $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-2}$  que se construirían para dimensión  $D-1$ , junto con

$$\gamma^{D-1} \equiv (i)^{\frac{D-1}{2}} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{D-2}, \text{ que, según se puede mostrar, tiene las propiedades deseadas } \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 0, (\gamma^{D-1})^2 = -1.$$

Lo único que nos resta entonces es construir 4 matrices  $4 \times 4$   $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  que satisfagan  $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}$ , lo lo que es lo mismo

$$\boxed{(\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -\mathbb{1}, \\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = -\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \quad \text{si } \mu \neq \nu}$$

Aquí se las presento:

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},}$$

con  $\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  las matrices de Pauli (que satisfacen  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$ ), es decir,

$$\boxed{\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \sigma^{\mu} \equiv (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \text{ y } \bar{\sigma}^{\mu} \equiv (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) = \sigma_{\mu}.$$

Por supuesto, dada esta  $\gamma^\mu$ , ustedes pueden encontrar otras mediante un cambio de base:  $\gamma^\mu \rightarrow \gamma'^\mu = B \gamma^\mu B^{-1}$   
 $\Rightarrow \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$ .

La elección de base no cambia nada sustancial, pero algunos aspectos pueden ser más fáciles de ver en una base que en otra. Nos quedaremos con la elección indicada arriba, que se conoce como la base de Weyl.

Junta todo lo anterior, entendamos por fin que

un espinor de Dirac no es ni más ni menos que un paquete de 4 números complejos  $\psi_a$  ( $a=1, \dots, 4$ ) tal como bajo una transformación de Lorentz  $\Lambda = \exp(\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} J^{\lambda\rho})$  se mezcla de acuerdo con  $\psi \rightarrow \psi' = \exp(\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}) \psi$ , es decir,

$$\psi_a \rightarrow \psi'_a = \left[ \exp(\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}) \right]_{ab} \psi_b$$

con  $S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ,  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ .

← siempre implícito

Y un campo de Dirac es simplemente una función que asigna un espinor de Dirac a cada punto,  $\psi(x)$ .

← índice espinorial  $a$   
 así siempre queda implícito  
 (como en  $x \equiv x^\mu$ )

En la base de Weyl, los generadores de Lorentz toman la forma

$$S^{ij} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}$$

para rotaciones y

$$S^{0i} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\sigma^i - \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i + \sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{pmatrix}$$

para empujones.

Podemos notar que las matrices  $S^{ij}$  son hermitianas, mientras que las  $S^{0i}$  son antihermitianas.

Y vemos, además, que la rep de Dirac es, en cuanto al grupo de Lorentz restringido  $SO^+(3,1)$ , una rep reducible: los generadores  $S^{mn}$  (y  $\therefore$  también los elementos del grupo,  $M(\underline{\Lambda}) = \exp(\frac{i}{2} \omega_{mn} S^{mn})$ ) son diagonales por bloques, de tal manera que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  NO se mezclan con  $\psi_3$  y  $\psi_4$ . (Esto es cierto a pesar de que las matrices  $4 \times 4$   $\gamma^m$  sí constituirían una rep irreducible del álgebra de Clifford.) En la base de Weyl podemos descomponer entonces a los espinores de Dirac  $\Psi$  en 2 subpaquetes  $\Psi_I \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\Psi_D \equiv \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

conocidas como espinores de Weyl:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_D \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{espinor izquierdo (= de 'quiralidad' negativa)} \\ \text{espinor derecho (= de 'quiralidad' positiva)} \end{array}$$

que transforman por separado bajo Lorentz, con generadores

$$S_I^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \sigma^k / 2, \quad S_I^{oi} \equiv -i \sigma^i / 2, \quad \text{y}$$

$$S_D^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \sigma^k / 2, \quad S_D^{oi} \equiv +i \sigma^i / 2, \quad \text{respectivamente.}$$

↖ sobre todo al hablar de "supersimetría"

Otra notación común para los espinores de Weyl es

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha = 1, 2, \text{ conocida como notación de van der Waerden.}$$

La razón por la cual muchas veces empacotamos a los espinores de Weyl  $\Psi_I$  y  $\Psi_D$  en un solo espinor de Dirac  $\Psi$ , en lugar de considerarlos por separado, es que la transformación de paridad,  $\mathbb{P} \notin \text{So}^+(3,1)$ ,

se implementa con  $Y^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  intercambia espacial

bajo  $x^\mu = \mathbb{P}^\mu_\nu x^\nu$  se tiene  $\Psi' = Y^0 \Psi$ ,

y esto intercambia  $\Psi_\pm \leftrightarrow \Psi_D$ .

(Otra razón es que cuando en ordenamos partículas de espín

$1/2$  con masa, el término de masa es del tipo  $\sim m(\Psi_\pm^\dagger \Psi_D)$ .)

Conviene definir a la matriz de quiralidad

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

que satisface

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = +\mathbb{1} ,$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = 0$$

$$(\Rightarrow [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0) .$$

En la base de Weyl se encuentra que  $\gamma^5$  es diagonal,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} ,$$

así que  $\begin{cases} \begin{pmatrix} \psi_I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix} \end{cases}$  tienen quiralidad  $\begin{cases} \text{negativa} \\ \text{positiva} . \end{cases}$

De hecho, dado un espinor de Dirac en cualquier base,

podemos definir

$$\psi_I \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)\psi , \quad \psi_D \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi$$

↙ relevante para el subespacio del Modelo Estándar

y tendremos entonces la descomposición  $\psi = \psi_I + \psi_D$

$$\text{con } \gamma^5 \psi_I = \frac{1}{2}(\gamma^5 - \mathbb{1})\psi = -\psi_I ,$$

$$\gamma^5 \psi_D = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \mathbb{1})\psi = +\psi_D .$$

Dado un espinores de Dirac  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$  ( $\psi \xrightarrow{\Lambda} M(\Lambda)\psi$ ),

puede mostrarse que su conjugado de Dirac

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

transforma como  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} M^{-1}$

$$\curvearrowright (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \psi_3^* \ \psi_4^*)$$

así que  $\bar{\psi}\psi = \psi_a^* \gamma_{ab}^0 \psi_b$  (o más en general,  $\bar{\chi}\psi$ ) es un escalar.

Puede mostrarse también que

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  es un vector,  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi$  un tensor (2,0), etc.

$$\psi_a^* \gamma_{ab}^0 \gamma_{bc}^\mu \psi_c$$

En esta información entendemos de inmediato que el Lagrangiano natural para un campo de Dirac libre es

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

Lagrangiano de Dirac

$\curvearrowright$  necesario para que la acción sea real

$$= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi$$

$$\curvearrowright \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$$

operador (diferencial) de Dirac



conviene considerar a  $\Psi$  y  $\bar{\Psi}$  (en lugar de  $\Psi^\dagger$ ) como variables independientes, es decir,

$$\mathcal{L}_D(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}) = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi.$$

Al calcular la ecuación de Euler-Lagrange para  $\bar{\Psi}$ , claramente obtendremos como ecuación de movimiento

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0$$

$\leftarrow m \uparrow$

Ecuación de Dirac

Y la ec. de E-L para  $\Psi$  arroja  $-i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu - m \bar{\Psi} = 0$ , que no es otra cosa que la versión conjugada de la ec. de Dirac. Podemos ver ahora que si actuamos sobre la ec. de Dirac con el operador diferencial  $(-i\gamma^\nu \partial_\nu - m)$  desde la izquierda, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\nu \partial_\nu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \\ &= (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\Psi \\ &= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} \partial_\nu \partial_\mu + m^2\right)\Psi \\ &= (\eta^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\Psi, \\ &= (\partial^2 + m^2)\Psi \end{aligned}$$

¡Klein-Gordon!

Así que las soluciones a la ecuación de Dirac son automáticamente también soluciones a la ecuación de Klein-Gordon (tal como esperáramos para dar lugar a las ondas planas que estarán asociadas a partículas libres en masa  $m$ );

$$\gamma^{\mu} \partial_{\mu}$$

$$\Rightarrow \psi_{\pm}(x) = \frac{i}{m} \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_0(x)$$

pero satisfacen demás  $(i\cancel{\partial} - m) \psi(x) = 0$  como restricción adicional: éstas son 4 condiciones impuestas sobre los 4 números complejos ( $\leftrightarrow 8$  reales) que tenemos en cada lugar, de modo que el número de grados de libertad se reduce a la mitad.

Esto es importante físicamente: el campo de Dirac por p.ej. el electrón debe describir 4 grados de libertad  $\Rightarrow 2$  estados de espín por el electrón + 2 por el antieletrón, no 8. (Notar que estas eliminaciones de variables es impuesta en automática por la ec. de movimiento, y es por tanto cualitativamente distinta a la redundancia que tenemos por campo de norma  $A_{\mu}$  como el potencial electromagnético -pp. 66-68.)

Al cuantizar el campo de Dirac, estas restricciones (visibles p.ej. en el hecho de que  $\pi_{\psi} \equiv \partial \mathcal{L}_0 / \partial \dot{\psi} = 0$ ) implican una pequeña modificación del procedimiento de cuantización canónica (debemos promover a conmutadores no a los parentés de Poisson, sino a los "parentés de Dirac").

Pero la principal novedad es que, después de descomponer en ondas planas y obtener las operaciones de creación/anniquilación

operadores,

$s=1,2$  etiquetas estado de espín

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

↑ operadores solución ↓  
de Dirac

$$\hat{\bar{\Psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1}^2 \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

con  $\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ ,  $\hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$  respectivamente operadores de creación de partícula (p.ej. electrón) y antipartícula (antielectrón), uno descubre que existen estados con energía arbitrariamente negativa, a menos de que uno efectúe la cuantización canónica imponiendo relaciones de anticonmutación en lugar de cuantización,

$$\{\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1},$$

$$\{\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}(\vec{x}', t)\} = 0$$


$$\iff \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\},$$

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = 0 = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} \right\} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger} \right\}$$

Es decir, descubrir que las partículas de espín 1/2  
 ( $\Leftrightarrow$  propiedades de transformación bajo Lorentz) deben ser  
necesariamente fermiones ( $\Leftrightarrow \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle = -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$ ),  
 y con ello explicar el principio de exclusión de Pauli  
 ( $\{ \hat{a}_{\vec{p}_s}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}_s}^\dagger \} = (\hat{a}_{\vec{p}_s}^\dagger)^2 = 0 \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}_s}^\dagger | \vec{p}_s \rangle = 0$ ).

Con todo lo anterior, tenemos ya suficientes elementos  
 para acoplar campos de norma (Maxwell o Yang-Mills) a  
 a campo de Dirac, y con ello entender en particular  
 a la electrodinámica cuántica (QED),

$$\mathcal{L}_{QED} \equiv \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\Psi, \not{D}_\mu \Psi, \bar{\Psi})$$

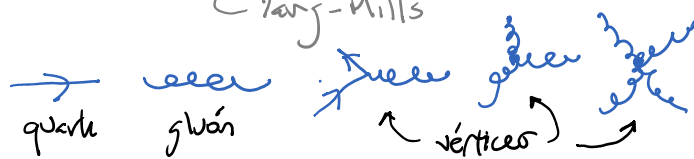


electrón      fotón      vértice

$\mathcal{L} \equiv \partial_\mu \bar{\Psi} i A_\mu \Psi$   
 $\Rightarrow$  invariancia local U(1)

y visualizar la  Cromodinámica cuántica (QCD)

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{YM} (A_{\mu IJ}, \partial_\mu A_{\nu IJ}) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} (\Psi_I, (\not{D}_\mu \Psi)_I, \bar{\Psi}_I)$$



quark      gluón      vértice

$\mathcal{L} \equiv \partial_\mu \bar{\Psi}_I i A_{\mu IJ} \Psi_I$   
 $\Rightarrow$  invariancia local SU(3)