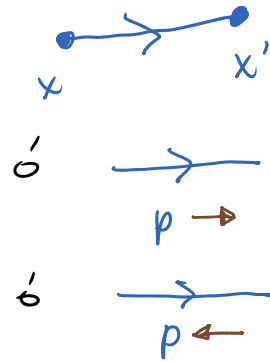


indica (por convención) la dirección en la que se propagará la partícula (opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula).



El resultado para  $G(x', x)$  del campo escalar

complejo es el mismo que vimos ya para el campo real.

Recordar que nuestro campo tiene además otro que describe a un número arbitrario de partículas, podemos interesarnos también calcular la amplitud de probabilidad de empezar con algún número  $n$  de partículas en  $x_1, \dots, x_n$  y terminar con otro número  $n'$  de partículas en  $x'_1, \dots, x'_{n'}$ .

Esta amplitud está codificada en el correlador (o función de correlación, o función de Green) de  $N$  puntos

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_N) \} | 0 \rangle$$

(con  $N = n + n'$  y  $x_{n+j} \equiv x'_j$ ).

← notar que  $G(x', x) \equiv G_2(x', x)$

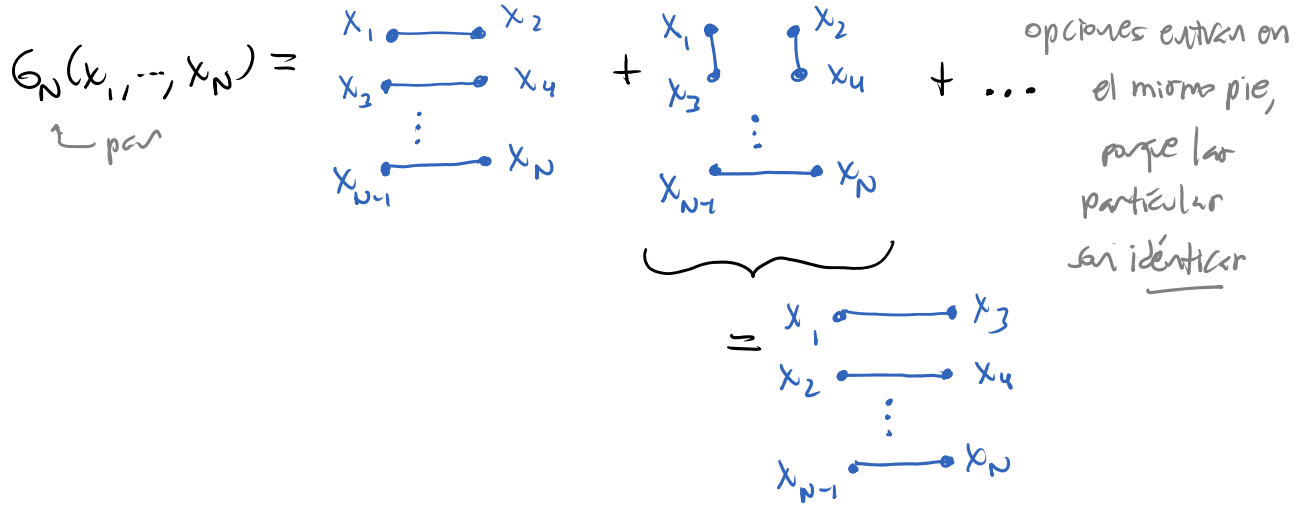
Pero en la teoría libre, las partículas no se interactúan unas a otras, y el número de partículas no cambia ( $n = n' \Rightarrow N$  debe ser par), así que conociendo la

amplitud de propagación de 1 partícula tenemos ya toda la información necesaria para el caso general. Usando el llamado "teorema de Wick" (ver ejercicio 5e), es posible mostrar que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \dots G(x_{N-1}, x_N) \\ + G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) \dots & \text{si } N \text{ es } \underline{\text{par}} \\ + \text{todas las otras permutaciones} \end{cases}$$

que se puede visualizar con dibujitos:

← todas las  $\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!}$



= Suma sobre todas las "Diagramas de Feynman" con N puntos  $x_1, \dots, x_N$  conectados por líneas (donde la presencia de más de una línea representa el producto de los G correspondientes)

Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre  $\leftrightarrow$   $\mathcal{L}$  cuadrático (ec. de mov. lineal)

$\leftrightarrow$  Modos de Fourier desacoplados

$\leftrightarrow$  Partículas no interactuantes

Si agregamos a  $\mathcal{L}$  términos cúbicos en  $\varphi$  o más altos,

la ec. de mov. para  $\varphi$  ya no será lineal, y los modos

de Fourier  $\varphi(t, \vec{p})$  no estarán ya desacoplados ( $\therefore$  no serán modos normales). La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las

partículas interactúen entre sí, sino que modifica

incluso la definición misma de lo que es una partícula

$|\vec{p}\rangle$  (y  $\therefore$  también del vacío  $|0\rangle$ ). El punto clave es

que al permitir que las viejas partículas ( $\leftrightarrow$  modos de

Fourier) interactúen una con otra, inevitablemente

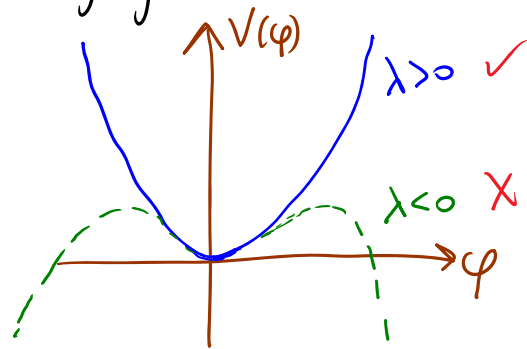
acaban también interactuando  consigo mismos.

La relación entre el campo y las partículas será mucho más sutil.

Para la teoría libre, descubrimos/entendimos la relación entre el campo  $\tilde{\varphi}(x)$  y las partículas asociadas (sus "cuantos" básicos  $\leftrightarrow$  excitaciones más pequeñas posibles) solo después de resolver de forma exacta la ecuación de Klein-Gordon. Y para el caso de un campo interactuante, no seremos capaces de semejante proeza, porque la ecuación de movimiento es no lineal.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término Cinético}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi)} \quad \text{Energía Potencial}$$



El parámetro  $\lambda$ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como constante de acoplamiento, o simplemente acoplamiento.

El momento canónico conjugado a  $\varphi(x)$  sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad \text{y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \quad (\text{en el cuadro de Heisenberg})$$

con las reglas de conmutación usuales

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')}] &= i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}), \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]. \end{aligned}}$$

Pero la ec. de Heisenberg para  $\hat{\varphi}(x)$  (que coincide con la ec. de mpv. clásica)

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!}\hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y  $\therefore \hat{\varphi}(x)$  No puede ya expresarse como una combinación lineal de ondas planas con coeficientes

$$\hat{a}_p \text{ y } \hat{a}_p^\dagger.$$

$\equiv$  teoría débilmente acoplada

Por otro lado, si las interacciones son débiles ( $\Leftrightarrow \lambda \ll 1$ ),

esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar

con una expansión perturbativa en potencias de  $\lambda$ , que tengamos como punto de partida al campo libre ( $\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kb}}$ ).

Notando que podemos separar al Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right]}_{\equiv H_0 \leftarrow \text{libre}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \leftarrow \text{interacción}},$$

nos conviene definir un cuadro en donde el operador de campo (y todos los operadores) evolucionen no con  $\hat{H}$  sino con  $\hat{H}_0$ .

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{O}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson, o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^s t} = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^s t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^s] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t))$$

$$= [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I]$$

↖ si hay dependencia explícita de t

(donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_0^s e^{-i\hat{H}_0^s t} = \hat{H}_0^s = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \hat{\pi}_I^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}_I)^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}_I^2 \right]).$$

Esto es cierto en particular para  $\hat{\phi}_I(x)$ , que satisface entonces la ec. de mov. libre,

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}_I(x) = 0$$

Klein-Gordon.

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

↑ independientes de t

y las relaciones de conmutación implican necesariamente que

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_0^{\mathbb{I}}: = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p.$$

Todo esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de  $\hat{H}_{int}$ !

Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se ve ahora en la evolución de los estados,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\mathbb{I}} &= e^{i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t} |\psi(t)\rangle_{\mathbb{S}} = e^{i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_{\mathbb{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\mathbb{I}} t'} |\psi(t')\rangle_{\mathbb{I}} \\ &\equiv \hat{U}_{\mathbb{I}}(t, t') \end{aligned}$$

←  $\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$

Operador de evolución  
(en el cuadro de interacción)

Felizmente, este objeto aparentemente horrendo puede ser reescrito puramente en términos de  $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x)$ :

orden temporal (p. 37)

definido por Taylor

Hamiltoniano de interacción, en el cuadro de interacción

misma  $\hat{U}$ , con misma condición inicial

$$\hat{U}_I(t, t') = \mathcal{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau) \right] \right\}$$

$$= \mathcal{T} \left\{ \exp \left[ -\frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_I^4(y) \right] \right\}$$

$\sim \hat{a} + \hat{a}^\dagger$

$$= \mathcal{T} \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int_{t'}^t d^4 y \hat{\phi}_I^4(y) + \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int_{t'}^t d^4 y_1 \hat{\phi}_I^4(y_1) \int_{t'}^t d^4 y_2 \hat{\phi}_I^4(y_2) + \dots \right\}$$

serie de Taylor en  $\lambda$ , tal como describimos

Ahora, ¿qué queríamos calcular? No es nada otro, porque la jugada ha cambiado por completo:

- El estado  $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$   
No es (no tendría por qué ser) el vacío, el estado con menor energía en la teoría, que denotaremos  $|\Omega\rangle$ .
- El estado  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$  No es el estado de 1 partícula, que seguiremos denotando  $|\vec{p}\rangle$ .
- la masa de las partículas asociadas al campo ya No es  $m$ . No tiene por qué serlo:



La conexión que encontramos entre  $m^2 \equiv \partial_\varphi^2 V(\phi)$  y la masa de las partículas la descubrimos como resultado (inesperado) de un cálculo en el caso espectral del campo libre.

• El operador  $\hat{\phi}$  ya no solo crea 1 partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|\Omega\rangle \sim f_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^{3-1} 2E_{\vec{p}'}} f_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

Ante esta falta de claridad, como paso intermedio podemos primero identificar cantidades que estén nítidamente definidas a nivel del lenguaje de la teoría, y después preocuparnos de cómo extraer física de ellas.

Una elección que resulta muy útil es plantearnos la meta de determinar las correlaciones (o funciones de correlación, o funciones de Green) de  $N$  puntos:

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

orden  $\nearrow$   
temporal

$\nearrow$  operador en  
campo de Heisenberg

$\nearrow$  vacío verdadero  
(con dependencia  
temporal completa)

que en el caso libre eran directamente amplitudes de propagación (pp. 40-41), y aquí más o menos las

podemos pensar como algo similar; aunque lo que exploran directamente es el patrón de correlaciones entre los valores del campo en los distintos puntos  $x_1, \dots, x_N$ , en el vacío  $|\Omega\rangle$ . (Justo como para un oscilador armónico los estados  $|n\rangle$  con energía definida no tienen valor definido para  $\hat{x}$ , en un campo (incluso si es libre), los estados con energía definida, incluso en particular el vacío  $|\Omega\rangle$ , NO tienen valor definido para  $\hat{\phi}$ .)

Aunque no evoluciona, quizá resultando ser el caso que toda la información física de cualquier teoría de campos se puede extraer de los correladores  $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$ .

¡Así que la meta en la vida de cualquier campista es poder calcular estas funciones!

Afortunadamente, usando la conexión entre el cuadro de Heisenberg y el cuadro de interacción se puede mostrar que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \dots \hat{\phi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}.$$

Recordando que  $\int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t) = -\frac{\lambda}{4!} \int_{-T}^T d^4y \hat{\phi}_I^4(y)$ , ¡venmos que esta fórmula reduce el cálculo de cada correlador

$G_N$  de la teoría interactuante al cálculo de correladores para un campo libre,  $G_N^{(0)}$  (fundamentalmente  $N' \geq N$ )!

Y estos últimos de hecho mencionamos en la p. 41 que son muy fáciles de calcular: son simplet sumas de productos de propagadores libres  $G_2^{(0)}(x, x') = G(x, x')$  (pp. 38-39)

que pueden resumirse con diagramas de Feynman. P.ej.

$$G_4^{(0)}(x_1, \dots, x_4) = \text{diagrama con 4 puntos y un círculo sombreado} = \text{diagrama con 4 puntos y líneas} + \text{diagrama con 4 puntos y líneas} + \text{diagrama con 4 puntos y líneas}$$

$\uparrow \equiv$  suma sobre todos  
 las maneras de conectar los  
 4 puntos con líneas ( $\leftrightarrow$  propagadores)

$$= G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4)G(x_2, x_3).$$

La novedad en la teoría interactuante es que, por la presencia de

$$T \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y) + \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 y_1 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_1) \int d^4 y_2 \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y_2) + \dots \right\},$$

tendremos que calcular términos como

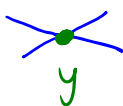
$$\langle 0 | T \left\{ \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_1) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_2) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_3) \hat{\phi}_{\mathbb{I}}(x_4) \left( \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 y \hat{\phi}_{\mathbb{I}}^4(y) \right) \right\} | 0 \rangle,$$

donde 4 inserciones de  $\hat{\phi}_{\mathbb{I}}$  coinciden en el mismo punto

$y_1$  que además (a diferencia de  $x_1, \dots, x_4$ ) no está fijo, sino que se integra sobre todo el espaciotiempo.

En los diagramas correspondientes, el punto  $y_1$  donde se produce el efecto de la interacción será un sitio donde 4 líneas confluyen, un vértice de 4 pines,

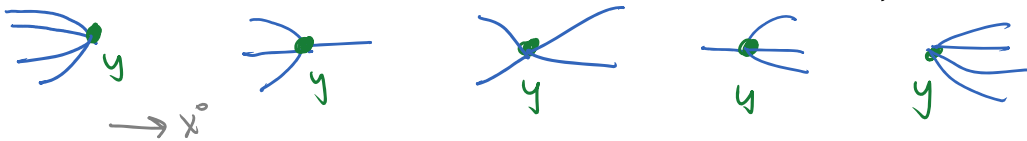
que es entonces un nuevo ingrediente para nuestro

repertorio gráfico:   $\equiv -i\lambda \int d^4y$  (el factor de 4! se cancela)


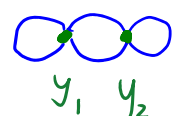
Físicamente, el efecto de la interacción

$$\hat{\mathcal{L}}_I^4(y) \sim (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 \sim \hat{a}^4 + 4\hat{a}^3\hat{a}^\dagger + 6\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 4\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a}^4$$

es permitir pasar donde el número de partículas cambia de 4 a 0, de 3 a 1, de 2 a 2, de 1 a 3, o de 0 a 4



Usando líneas y estos vértices, se arman combinaciones

como , que sí están conectados en los puntos externos ( $\leftrightarrow$  argumentos de  $G_N$ ), y como , que no lo están.

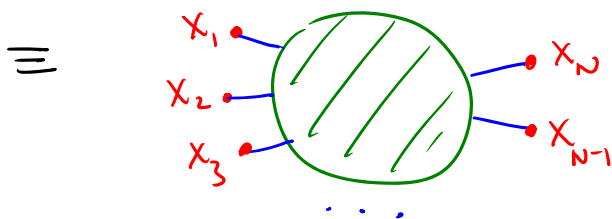
Los primeros describen correcciones a la amplitud de propagación de las partículas; los segundos, conocidos como "burbujas de vacío", describen correcciones a la definición del vacío (de  $|0\rangle$  a  $|\Omega\rangle$ ).

En ambos casos, los diagramas de Feynman tienen una utilidad doble (si  $\lambda \ll 1$ ). Por una parte, nos permiten visualizar el efecto de las interacciones como procesos donde se crean y/o aniquilan partículas (en grupos de 4 para  $\varphi^4$ ).

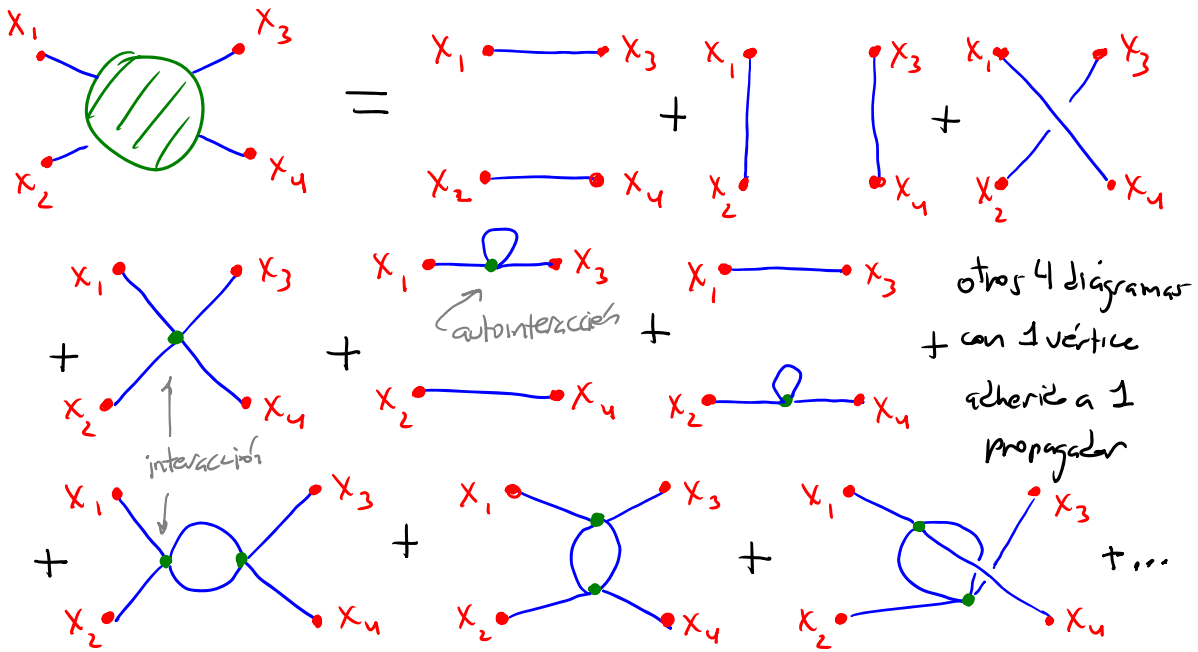
Las que existen solo efímeramente, entre procesos sucesivos de interacción, se conocen como partículas virtuales ( $\leftrightarrow p^2 \neq m^2$ ).

Por otra parte, los diagramas son una herramienta eficiente para hacer cálculos, gracias a las instrucciones explícitas que nos permiten convertir cada diagrama en una fórmula, instrucciones conocidas como reglas de Feynman. Cuando uno mira los detalles, se encuentra que

$G_N(x_1, \dots, x_N) =$  Suma sobre todos los diagramas conexos (es decir, sin burbujas de vacío) topológicamente distintos con  $N$  puntas externas  $x_1, \dots, x_N$



P.ej., la función de 4 puntos  $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  está dada por



Resumiendo lo que hemos aprendido, y omitiendo

16

desde ahora en adelante los colores que habíamos usado para distinguir entre puntos externos e internos, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría  $\phi^4$  en espacio de posición son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con  $N$  puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas.

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x' \end{array} \equiv G(x, x')$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).