

## 0. Motivación

La teoría cuántica de campos es a la vez:

- Un formalismo interesante desde el punto de vista teórico.
- Una herramienta útil en la práctica, en áreas muy diversas: física teórica de altas energías, fenomenología de partículas, física nuclear, física de materia condensada, matemáticas ¡y finanzas!
- Un lenguaje altamente exitoso para describir a nuestro universo a distancias  $\sim 10^{-10} - 10^{-20}$  m (¡o quizás deberíamos decir  $\sim 10^{26} - 10^{-35}$  m !)

A pesar de ello, creemos por diversas razones (la principal es la necesidad de cuantizar a la gravedad) que es apenas una aproximación más a la realidad, y que existe un lenguaje aún más fundamental.

- Un tema que resulta extraño en un primer encuentro (similar a la mecánica cuántica). Incorpora solo a la cuántica habitual, pero con diferente enfoque.
- Un tema de investigación actual, buscando entender su

naturaleza más profunda, alcances y métodos de cálculo.

Un punto que resulta muy nebuloso al principio es: si nuestro universo está hecho de partículas, y lo que queremos entonces es describir partículas cuánticas relativistas, ¿para qué demonios hablamos de campos?

Una manera de intentar responder esta pregunta (el camino más socorrido en los libros de texto) es simplemente tomar un campo y mostrar que al cuantizarlo obtenemos, sorprendentemente, ¡partículas! Por supuesto haremos esto más adelante en este curso; pero para empezar, seguiremos otro camino.

Trataremos de explicar por qué, en cierto sentido,

Partículas + Mecánica Cuántica + Relatividad Especial  $\Rightarrow$  Teoría Cuántica de Campos,

de modo que el formalismo de campos resulta prácticamente inevitable. Una alternativa conocida —¿la única?— es reemplazar a las partículas por objetos unidimensionales, para obtener la teoría de cuerdas, que acaba abarcando

incluso a la relatividad general (y por tanto, a la gravedad). Pero increíblemente, descubrimos en años recientes que, al menos en ciertas circunstancias, ¡una teoría de cuerdas puede ser equivalente a una teoría de campos! Esto ocurre a través de la "correspondencia holográfica", AdS/CFT, o norma/gravedad.

El enfoque que adoptaremos al principio del curso está basado primero en la plática de Feynman "The Reason for Antiparticles", y después en los capítulos 2-5 del libro de Weinberg (que desafortunadamente creo que resulta de difícil lectura cuando uno aprende campos por primera vez, en parte por su nada convencional notación) y los capítulos 3-4 de los apuntes de (David) Gross.

Pero antes de cualquier otra cosa, iniciaremos con un breve repaso de los ideas básicas de la mecánica cuántica.

## 1. Mecánica Cuántica Relativista

En la notación de Dirac, el estado de nuestro sistema se denota a través de un ket (¡chete!)  $|\psi\rangle$ .

Si  $|\psi\rangle$  y  $|\psi'\rangle$  son estados admisibles, entonces en general también lo es la superposición

$$\alpha|\psi\rangle + \beta|\psi'\rangle \equiv |\alpha\psi + \beta\psi'\rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Es decir, los estados son elementos de un espacio vectorial complejo. En este espacio existe un producto interno

$$i(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) \equiv \langle\psi|\psi'\rangle \in \mathbb{C} \quad \text{que satisface}$$

$$1) \langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$$

$$2) \langle\varphi|\alpha\psi + \beta\psi'\rangle = \alpha\langle\varphi|\psi\rangle + \beta\langle\varphi|\psi'\rangle \quad \begin{array}{l} \text{(Lineal en su} \\ \text{2do. argumento)} \end{array} \quad \leftarrow \text{"Sesquilineal"}$$

$$(1)+2) \Rightarrow \langle\alpha\varphi + \beta\varphi'|\psi\rangle = \alpha^*\langle\varphi|\psi\rangle + \beta^*\langle\varphi'|\psi\rangle \quad \text{(Antilineal en 1ero.)} \quad \leftarrow$$

$$3) \langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle; \quad \langle\psi|\psi\rangle = 0 \text{ solo si } |\psi\rangle = 0$$

(Positivo definido)

$\Rightarrow$  probabilidad es módulo al cuadrado



Físicamente,  $\frac{\langle\varphi|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}$  es la amplitud de probabilidad ( $\in \mathbb{C}$ )

de que el sistema se encuentre en  $|\varphi\rangle$  cuando está en  $|\psi\rangle$ .

La norma del vector  $|\psi\rangle$  se define a través de  $\| |\psi\rangle \| \equiv \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ . Conviene por supuesto trabajar con estados normalizados:  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ .

(Recordemos también que la fase del vector es físicamente irrelevante, así que  $|\psi\rangle \simeq e^{i\phi} |\psi\rangle \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$ .)

Suponemos que este espacio vectorial complejo equipado con producto interno es "completo" en relación

a la norma  $\|\cdot\|$  (es decir, toda "serie de Cauchy" converge:  $\{|\psi_n\rangle\}$  donde  $\forall \delta > 0 \exists N$  tal que  $\| |\psi_n\rangle - |\psi_{n'}\rangle \| < \delta \quad \forall n, n' > N$  ).  


necesariamente implica que  $\exists |\psi\rangle$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi_n\rangle = |\psi\rangle$ , y constituye por tanto un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Notar que los mapeos del tipo  $\langle \varphi | \cdot \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $|\psi\rangle \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle$   
 forman también un espacio vectorial.

El "vector dual" a  $|\psi\rangle$ ,  $\langle \psi | \cdot \rangle \equiv \langle \psi |$  se conoce como bra (¡cuidado!).

P.ej., si  $|\vec{x}\rangle$  denota el estado de una partícula localizada en  $\vec{x}$ , entonces el vector dual  $\langle\vec{x}|$  sirve para formar el traslapo  $\langle\vec{x}'|\psi\rangle = \langle\vec{x}'|\psi\rangle$ , ← amplitud de que la partícula en estado  $|\psi\rangle$  esté en  $\vec{x}$ , que no es otra cosa que la función de onda (en espacio de posición),  $\langle\vec{x}'|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{x}')$ .

Sabemos que los estados  $\{|\vec{x}\rangle \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3\}$  nos dan una "base" (ortogonal pero no normalizable:  $\langle\vec{x}'|\vec{x}\rangle = \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})$ )

para  $\mathcal{H}_{\text{partícula sin espín}}$ , es decir, podemos escribir

$$|\psi\rangle = \int d^3x \underbrace{|\vec{x}\rangle \langle\vec{x}|}_{= \hat{1} \text{ 'resolución' de la identidad}} |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle.$$

↑ delta de Dirac  
= 0 si  $\vec{x} \neq \vec{x}'$   
 $\int d^3x f(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}')$

los estados  $\{|\vec{p}\rangle\}$  definidas a través de  $\langle\vec{p}'|\vec{x}\rangle = e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}}$  nos dan otra base para el mismo espacio de Hilbert.

Regresando a la discusión general, recordemos que en el formalismo de la mecánica cuántica cada observable  $\hat{O}$

está asociada a un operador lineal  $\hat{O}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$   
 $|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \hat{O}|\psi\rangle \equiv (\hat{O}\psi)$

$$\leftarrow \hat{O}|\psi_n\rangle = \lambda_n|\psi_n\rangle$$

Los eigenvalores, autovalores o valores propios  $\lambda_n$  de  $\hat{O}$  son los únicos resultados posibles de una medición (idealizada) de  $\hat{O}$ , e inmediatamente después de la medición, el estado del sistema es el eigenvector o vector propio

$|\psi_n\rangle$  correspondiente. Esto implica que las mediciones de

$\hat{O}$  y  $\hat{O}'$  no interfieren una con otra solo si  $[\hat{O}, \hat{O}'] = 0$ .

Los eigenvectores  $\{|\psi_n\rangle\}$  constituyen una base ortogonal,

de modo que  $\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \hat{1}$ . Usando esto, vemos que

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \sum_n \underbrace{\langle\psi|\hat{O}|\psi_n\rangle}_{\lambda_n\langle\psi|\psi_n\rangle} \langle\psi_n|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n \underbrace{|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2}_{\text{probabilidad de } \lambda_n}$$

es el valor esperado para la observable  $\hat{O}$  en el estado  $|\psi\rangle$ .

Los traslapes  $\langle\psi_m|\hat{O}|\psi_n\rangle \equiv O_{mn} \in \mathbb{C}$  se conocen como

los elementos de matriz de  $\hat{O}$ , y lo determinan por completo.

Dado un operador cualquiera  $\hat{O}$ , definimos su "adjunto hermitiano"  $\hat{O}^\dagger$  tal que

$$\langle\varphi|\hat{O}\psi\rangle = \langle\hat{O}^\dagger\varphi|\psi\rangle \quad \forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

Es fácil ver que esto implica  $O_{mn}^\dagger = O_{nm}^*$ .

Las observables corresponden a operadores que son hermitianos,  $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$ , lo cual implica que tienen eigenvalores reales. P.ej., en el caso de una partícula, las observables básicas son  $\hat{x}^i, \hat{p}^i$   $i=1,2,3$  (con  $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar \delta^{ij}$ ), y el operador más general

se puede escribir en la forma  $\hat{O}_{\vec{x}\vec{x}'}$  elemento de matriz

$$\hat{O} = \int d^3x d^3x' |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| \hat{O} |\vec{x}'\rangle \langle \vec{x}'| = \int d^3x d^3x' \hat{O}_{\vec{x}\vec{x}'} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}'|$$

(o similarmente en la base de  $|\vec{p}\rangle$ )

La evolución temporal es generada por el operador Hamiltoniano  $\hat{H}(\hat{p}_A, \hat{q}_A)$ , coord. generalizadas a través de la ec. de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (\text{usaremos unidades } \hbar=1)$$

Definiendo el operador de evolución  $\hat{U}(t, t')$  a través de

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t') |\psi(t')\rangle,$$

la ec. de Schrödinger implica que, si  $\hat{H}$  es independiente del tiempo,  $\hat{U}(t, t') = \exp(-i\hat{H}(t-t'))$ . En el caso general,  $\hat{U}$  es un poco más complicado. Notar que, dado que



La evolución temporal preserva la norma de los estados, el operador  $\hat{U}(t, t')$  debe ser unitario:  $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$  (lo cual equivale al requisito de que  $\hat{H}$  sea hermitiano).

El valor esperado de un operador  $\hat{O}$  (que es un ejemplo de una cantidad directamente medible) cambia en el tiempo de acuerdo con

$$\langle \hat{O}(t) \rangle_\psi \equiv \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t} \hat{O} e^{-i\hat{H}t} | \psi(0) \rangle,$$

y es  $\therefore$  independiente del tiempo solo si  $[\hat{H}, \hat{O}] = 0$ .

Recordemos que  $|\psi(t)\rangle, \hat{O}$  es la descripción en el llamado "cuadro de Schrödinger", y que es posible describir al mismo sistema en el "cuadro de Heisenberg", donde los estados son independientes del tiempo,

$|\psi\rangle_H \equiv |\psi(0)\rangle_S$ , mientras que los operadores evolucionan,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t} = e^{i\hat{H}t} \hat{O}_H(0) e^{-i\hat{H}t}, \text{ evolución}$$

codificada en la ec. de Heisenberg,  $i\hbar \partial_t \hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H(t), \hat{H}]$ .

De modo que

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(t) \rangle_{\psi} &= \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t} | \psi(0) \rangle_S \\ &= \langle \psi | \hat{O}_H(t) | \psi \rangle_H. \end{aligned}$$

$\hat{O}_H(0)$

Es importante tener presente que, aún si  $[\hat{O}_S, \hat{O}'_S] = 0$ , en general se tiene  $[\hat{O}_H(t), \hat{O}'_H(t')] \neq 0$  a menos que  $t=t'$  (p.ej.,  $[\hat{x}^i(t), \hat{x}^j(t')] \neq 0$  si  $t \neq t'$ , porque  $[\hat{p}, \hat{x}(t)] \neq 0$ ).

Dada una base  $\{|\psi_n\rangle\}$  para  $\mathcal{H}$ , la evolución de cualquier  $|\psi\rangle$  se puede determinar a partir del

propagador

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n'} | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \psi_n \rangle_S &= \underbrace{(\langle \psi_{n'} | e^{-i\hat{H}t'})}_{\text{ebs. en } t=0} \underbrace{(e^{i\hat{H}t} | \psi_n \rangle_S)}_{\text{ebs. en } t} \\ &\equiv \langle \psi_{n'}, t' | \psi_n, t \rangle_H, \end{aligned}$$

$U_{n'n}(t-t)$

*etiqueta indica cuándo el estado tiene el comportamiento descrito*

que representa la amplitud de que, si el sistema está en el estado  $|\psi_n\rangle$  al tiempo  $t$ , se le encuentre entonces en el estado  $|\psi_{n'}\rangle$  al tiempo  $t'$ .

P.ej., para  $\mathcal{H}$  1 partícula sin espín podemos usar  $\{|\vec{x}\rangle\}$ , y

$$|\psi(t')\rangle = \int \int \int_{\vec{x}'} \int \int \int_{\vec{x}} |\vec{x}'\rangle \langle \vec{x}'| e^{-i\hat{H}(t'-t)} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| \psi(t)\rangle$$

$\equiv \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle$  estado de Heisenberg:  
 eigenestado de  $\hat{x}^i(t)$   
 con eigenvalor  $x^i$

Este propagador incluye información completa de la solución a la ec. de Schrödinger (o Heisenberg), codificada de manera útil para el caso relativista:  $t$  y  $\vec{x}$  en el mismo pie.

Consideremos primero una partícula libre no relativista:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \text{ de modo que el propagador es}$$

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \langle \vec{x}' | e^{-i \frac{\hat{p}^2}{2m} (t'-t)} | \vec{x} \rangle$$

presencia de  $t$   
 indica eq. de Heisenberg

Insertar  $\hat{1} = \int \int \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$

$$= \int \int \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \underbrace{\langle \vec{x}' | \vec{p} \rangle}_{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}'}} e^{-i \frac{\vec{p}^2}{2m} (t'-t)} \underbrace{\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle}_{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}}$$

es decir,

integral gaussiana  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x}) - i\vec{p}^2 (t' - t) / 2m} \\ &= \left[ \frac{m}{2\pi i (t' - t)} \right]^{3/2} e^{\frac{im}{2(t' - t)} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \end{aligned}$$

completar cuadrados en exponente

Notar que, en un intervalo de tiempo  $t' - t$  dado, la partícula puede moverse una distancia  $|\vec{x}' - \vec{x}|$  arbitrariamente grande. Esto no es preocupante para una partícula no relativista, pero, ¿qué pasa en el caso relativista?

Sabemos que para una partícula relativista libre

$$\hat{H} = + \sqrt{(\hat{\vec{p}}c)^2 + m^2 c^4} \quad (\text{Usaremos unidades } c=1)$$

[Notar que  $t=c=1$  un. naturales  $\Rightarrow [m] = [p] = [E] = [\omega] = [x] = [t]^{-1}$ ]

así que

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \langle \vec{x}' | e^{-i \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (t' - t)} | \vec{x} \rangle$$

signo negativo porque energía es positiva

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-i \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (t' - t) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}$$

Insertar a mano. La condición principal a la que llegaremos NO dependerá de esta inserción.

↖  $\approx 2m$  en el límite no relativista  $|\vec{p}| \ll m$

El factor  $2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$  que agregamos al denominador es necesario si queremos que el propagador sea invariante de Lorentz. En efecto, la expresión anterior se puede reescribir en la forma manifiestamente invariante

bajo Lorentz:  $p^\mu \rightarrow \underline{p}^\mu$   
 $d^4 p = d^4 \underline{p}$   
 $p^2 = \underline{p}^2$   
 $p \cdot (x' - x) = \underline{p} \cdot (\underline{x}' - \underline{x})$

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip \cdot (x' - x)}$$

[ función escalón (de Heaviside) ]

donde  $\vec{p}^\mu \equiv (p^0, \vec{p})$ ,  $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$ ,  $d^4 p \equiv dp^0 d^3 p$ ,

↙ *cuadrivector* ↘

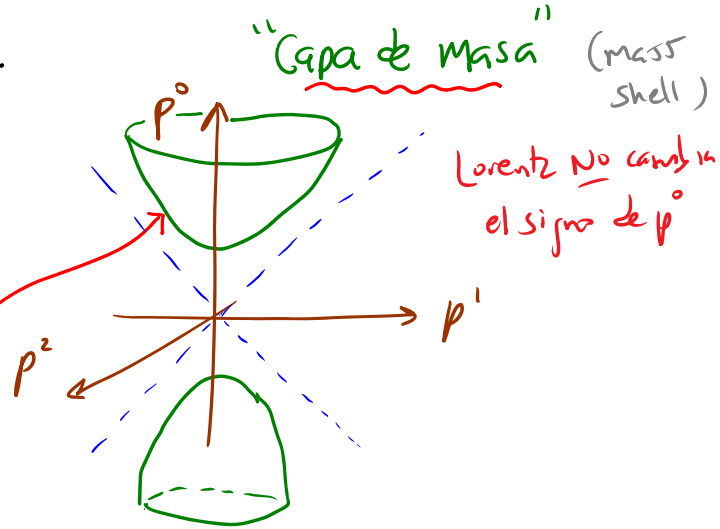
$$p \cdot x \equiv p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}, \quad p^2 \equiv p \cdot p = (p^0)^2 - \vec{p}^2$$

OJO: usaremos signatura +---  
 (habitual para partículas)

$$\theta(p^0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^0 > 0 \\ 0 & \text{si } p^0 < 0 \end{cases}$$

Para mostrar esto, basta notar que  $\delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \neq 0$   
 $\underbrace{\delta(p^2 - m^2)}_{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2}$

solo cuando  $p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ,  
 L: 06/28/18



de manera que

cambio de variable  $p^0 \rightarrow (p^0)^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2) \Theta(p^0) f(p^0) = \int_0^{\infty} \frac{d((p^0)^2)}{2p^0} \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2) \Theta(p^0) f(p^0)$$

↑  
cambia función

$$= \frac{f(p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2})}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

En nuestro caso tenemos  $f(p^0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)}$ ,

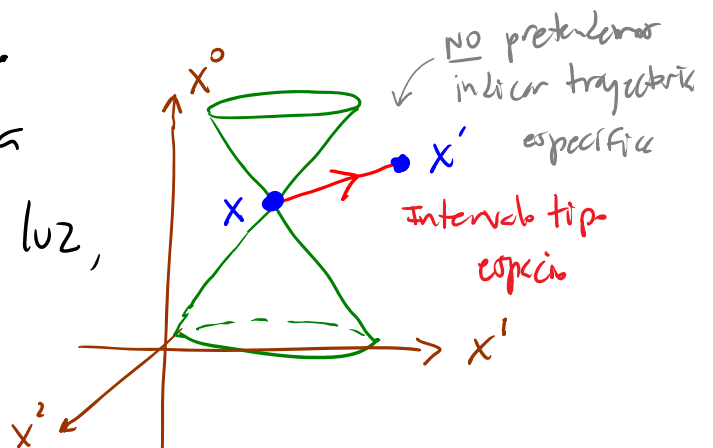
así que, como prometimos,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) e^{-ip \cdot (x' - x)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t' - t) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

Ahora bien, dado que  $\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle$  es invariante bajo traslaciones y bajo lorentz, solo puede depender del intervalo relativista

$$(x' - x)^2 \equiv (t' - t)^2 - (\vec{x}' - \vec{x})^2.$$

Para preguntarnos si la partícula puede viajar más rápido que la luz, nos interesa determinar el propagador fuera del cono, donde  $(x' - x)^2 < 0$ . ← intervalo tipo espacio



$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\sqrt{p^2+m^2}(t'-t) + i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}$$

Pero por invariancia de Lorentz + traslaciones

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \langle \sqrt{-(x'-x)^2}, 0, 0, 0 | 0, 0, 0, 0 \rangle$$

← yendo a marco de referencia donde  $(x'-x)$  apunta a lo largo de eje 1

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+ip'\sqrt{-(x'-x)^2}}}{2\sqrt{p'^2+m^2}}$$

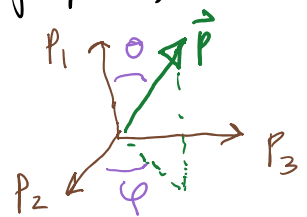
o (impar)

$$\cos(p'\sqrt{-(x'-x)^2}) + i \text{sen}(p'\sqrt{-(x'-x)^2})$$

y cambiando a coordenadas esféricas con  $p'$  como eje polar,

$$d^3 p = |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega, \quad p' \equiv |\vec{p}| \cos \theta,$$

$\underbrace{d\Omega}_{\text{sen}\theta d\theta d\varphi}$



esto resulta ser (ver, p.ej., Greiner, ejercicio 4.6, p. 105)

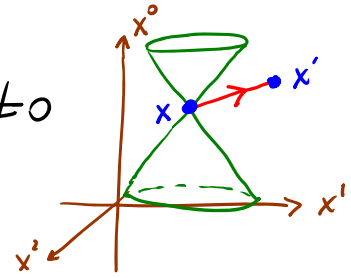
$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = 2\pi \int_0^\infty \frac{d|\vec{p}| |\vec{p}|^2}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos(|\vec{p}| \sqrt{-(x'-x)^2} \cos\theta)$$

$$= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{K_1(m\sqrt{-(x'-x)^2})}{\sqrt{-(x'-x)^2}} \leftarrow \text{Función de Bessel Modificada}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{-(x'-x)^2} \gg 1/m} \frac{m}{(2\pi)^2 \sqrt{-(x'-x)^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2m\sqrt{-(x'-x)^2}}} \exp(-m\sqrt{-(x'-x)^2})$$

L1: 08/08/22

Encontramos entonces que  $\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle \neq 0$   
 ¡aun fuera del cono de luz! La razón  
 matemática es sencilla:



$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int \frac{|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| d\Omega}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}(t'-t) + i|\vec{p}| |\vec{x}' - \vec{x}| \cos\theta}$$

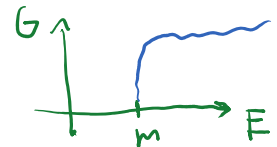
$$\equiv \int_m^\infty dE e^{-iE(t'-t)} g(E), \quad \leftarrow \text{depende también de } |\vec{x}' - \vec{x}|$$

(y será una función de  $E$   
 solo ligeramente distinta  
 si no hubiéramos incluido  
 $2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$  en denominador)

o lo que es lo mismo,

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iE(t'-t)} G(E) \equiv \tilde{G}(t'-t),$$

$$\text{donde } G(E) \equiv g(E)\theta(E-m), \quad \leftarrow = 0 \quad \forall E < m$$



y la transformada de Fourier  $\tilde{G}$  de una función  $G$

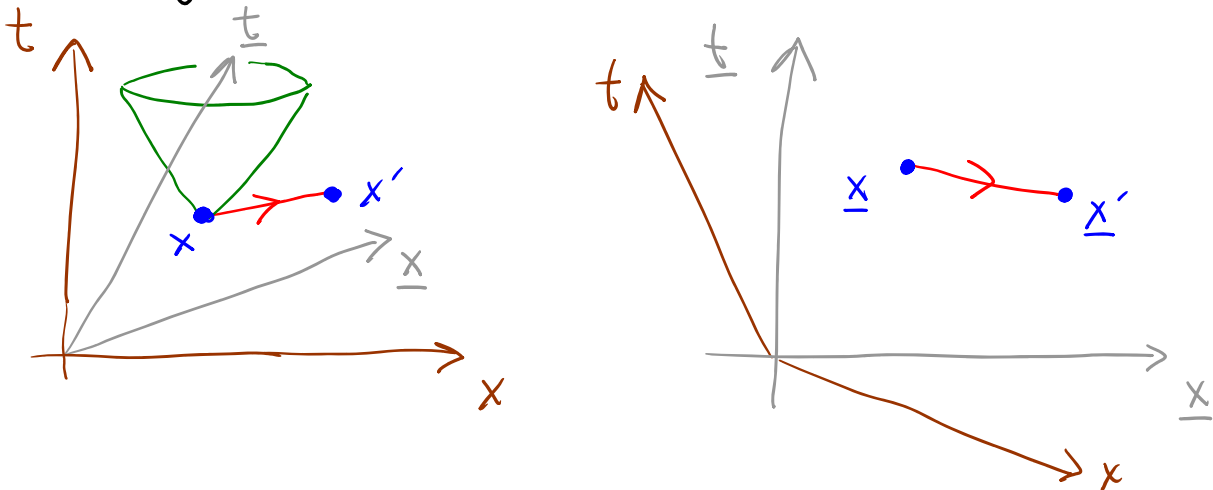
que es igual a cero en una región extendida No puede  
 ser también igual a cero en una región extendida.  $\leftarrow$  queríamos en  $|t'-t| < |\vec{x}' - \vec{x}|$

Notar que No podemos arreglar esto incluyendo energías  
 negativas, porque necesitaríamos  $\int_{-\infty}^m dE$ , y en ese caso  
 ¡no habría un estado fundamental para la partícula!



Concluimos así que la combinación de la mecánica cuántica con la inocente restricción a energías positivas inevitablemente da lugar a la posibilidad de propagación a velocidades superlumínicas! Cabe resaltar que esta posibilidad es apreciable solo a distancias pequeñas, del orden de  $1/m$ , el radio de Compton de la partícula.

Pero... en otro marco de referencia, ¡esto equivaldría a propagación hacia atrás en el tiempo!



¿Qué significa esto? El observador  $O$  ve una partícula con masa  $m$ , que se mueve de  $\bar{x}'$  a  $\bar{x}$  (¡y no al revés!). Si la partícula que  $O$  ve porta algún tipo de carga  $q$ ,

entonces la partícula que  $\underline{0}$  ve tiene carga  $-q$  (y la misma masa): ¡es la antipartícula correspondiente!

Concluimos entonces que, al combinar a la mecánica cuántica con la relatividad especial, la existencia de antipartículas resulta inevitable [ver Feynman].

(Como veremos mucho más adelante, la existencia de estos procesos No implica una violación de la causalidad.)

Notemos ahora que el propagador de la antipartícula debe tener la forma

$$\langle \underline{\vec{x}}, t | \underline{\vec{x}'}, t' \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t-t') + i\vec{p} \cdot (\underline{\vec{x}} - \underline{\vec{x}'})}$$

↙ Energías positivas hacia adelante en el tiempo
Energías negativas hacia atrás en el tiempo

podríamos llamar  $\vec{p}$   $\vec{p}$  porque es variable muera

que por invariancia de Lorentz se puede calcular como

$$\begin{aligned} \langle \underline{\vec{x}}, t | \underline{\vec{x}'}, t' \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t-t') + i\vec{p} \cdot (\underline{\vec{x}} - \underline{\vec{x}'})} \\ &= \langle \underline{\vec{x}'}, t' | \underline{\vec{x}}, t \rangle^* . \end{aligned}$$

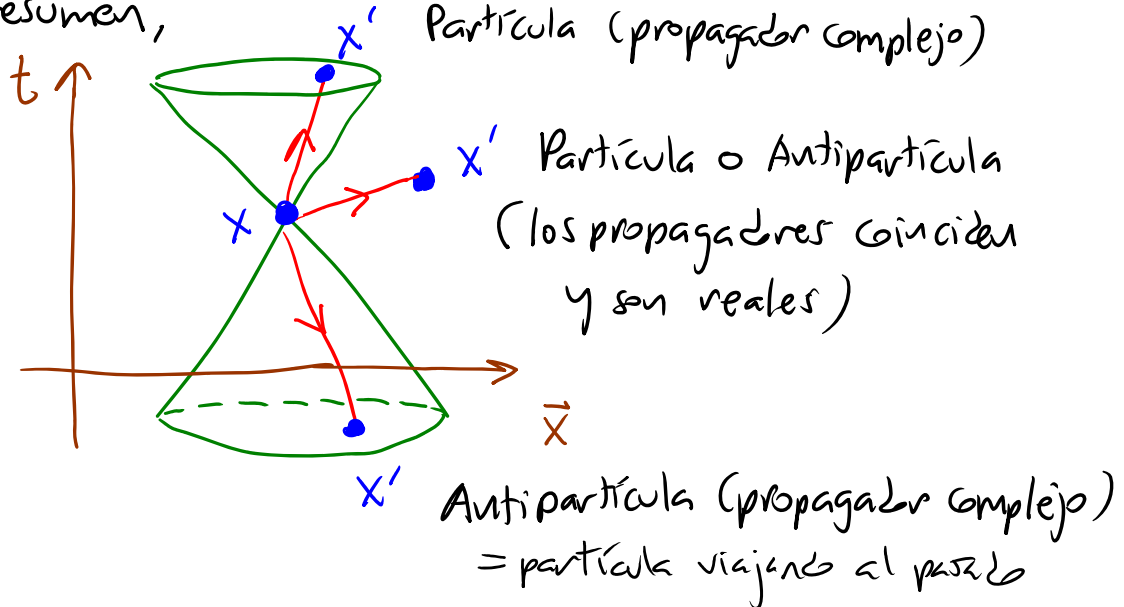
Con base en la equivalencia que hemos descubierto arriba, fuera del cono de luz (es decir, en un intervalo tipo espacio :  $(x'-x)^2 < 0$ ) este propagador de antipartícula debe coincidir con el propagador de partícula  $\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle$ , así que debemos tener

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \langle \vec{x}, t | \vec{x}', t' \rangle = \langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle^*.$$

Y, efectivamente, vimos antes que para  $t=t'$  el propagador es real. ✓

Ahora, si para  $O$  existen antipartículas que se mueven más rápido que la luz, lo mismo debe ser cierto para  $O'$  (pues ningún observador es privilegiado). Pero entonces, por el mismo argumento matemático que usamos en el caso de la partícula, deben existir también antipartículas que viajan más lento que la luz (puesto que, restringiéndonos solo a energías positivas, el propagador no puede anularse dentro del cono).

En resumen,



Podemos definir un propagador combinado, que toma las 2 posibilidades en cuenta:  $x^\mu \equiv (t, \vec{x})$

$$G(x'-x) \equiv \Theta(\underbrace{x'^0 - x^0}_{t'-t}) \langle x' | x \rangle + \Theta(x^0 - x'^0) \langle x | x' \rangle$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left[ \Theta(x'^0 - x^0) e^{-ip \cdot (x' - x)} + \Theta(x^0 - x'^0) e^{-ip \cdot (x - x')} \right]_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

$E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

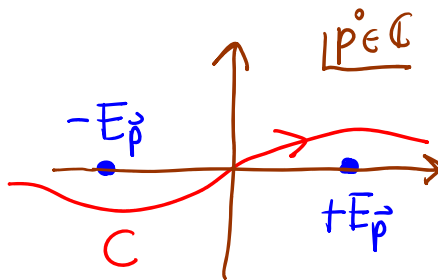
(La presencia de las funciones escalón  $\Theta$  pareciera violar la invariancia de Lorentz, pero hemos visto que no es así.)

Si en el segundo término cambiamos la variable de integración  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ , obtenemos

$$G(x'-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \left[ \theta(x'-x^0) \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x'-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} + \theta(x^0-x') \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x'-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} \right]$$

Observemos ahora que el factor entre corchetes se puede reescribir en la forma

$$- \int_C \frac{d\tilde{p}^0}{2\pi i} \frac{e^{-i\tilde{p}^0(x'-x^0)}}{(\tilde{p}^0 - E_{\vec{p}})(\tilde{p}^0 + E_{\vec{p}})},$$

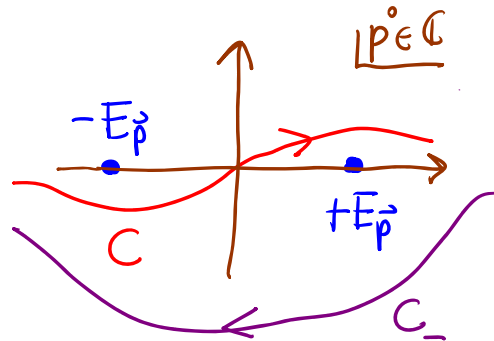


donde  $C$  es el contorno que se indica en la figura.

Para verificar que esto es cierto, basta con hacer la integral sobre  $\tilde{p}^0$  usando la fórmula de Cauchy

$$\left( \oint \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \text{ para } f \text{ analítica} \right), \text{ notando que:}$$

i) Si  $x^0 > x'$ , podemos cerrar el contorno de integración por abajo (ya que  $\lim_{\text{Im } \tilde{p}^0 \rightarrow -\infty} e^{-i\tilde{p}^0(x'-x^0)} = 0$ ), obteniendo así



$$-\oint_{C+C_-} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E_p^0)(p^0+E_p^0)} = + \frac{e^{-iE_p^0(x'^0-x^0)}}{2E_p^0}, \quad \checkmark$$

↑ polos simple

que coincide exactamente con el factor que multiplicaba a  $\theta(x'^0-x^0)$  en la expresión entre corchetes.

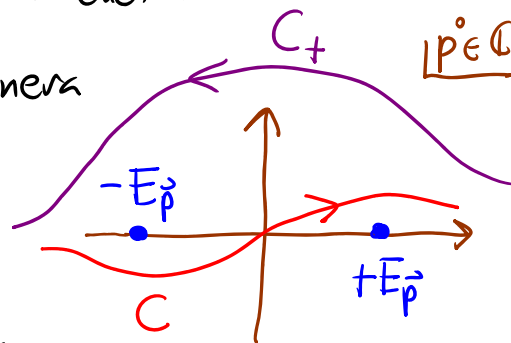
ii) Si  $x^0 > x'^0$ , podemos de manera

similar cerrar el contorno por

arriba, lo que resulta en

$$-\oint_{C+C_+} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E_p^0)(p^0+E_p^0)} = - \frac{e^{-i(-E_p^0)(x'^0-x^0)}}{2(-E_p^0)}, \quad \checkmark$$

↑ polos simple

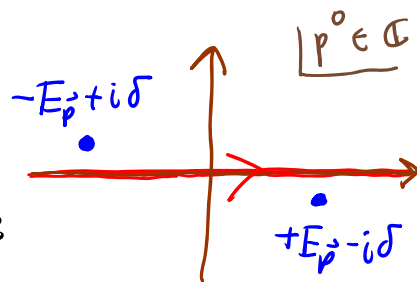


que coincide con el factor que multiplicaba a  $\theta(x^0-x'^0)$ .

Conviene notar que integrar sobre el contorno complejo  $C$ , cuando los polos están en  $p^0 = \pm E_p^0 \in \mathbb{R}$ , equivale

a integrar  $p^0$  sobre el eje real y desplazar

los polos a  $p^0 = \pm(E_p^0 - i\delta)$ , en el entendido de que



tomaremos  $\delta \rightarrow 0_+$  después de hacer la integral.

Dado que

$$\begin{aligned} [p^0 - (E_{\vec{p}} - i\delta)] [p^0 + \underbrace{(E_{\vec{p}} - i\delta)}_{-(-E_{\vec{p}} + i\delta)}] &= (p^0)^2 - (E_{\vec{p}} - i\delta)^2 \\ &= (p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i2E_{\vec{p}}\delta + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= \underbrace{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2}_{p^2 - m^2} + \underbrace{i2E_{\vec{p}}\delta}_{\equiv +i\epsilon} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

con  $\epsilon \rightarrow 0_+$  al final

podemos escribir

$$-\int_C \frac{d^4 p}{2\pi i} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{\underbrace{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})}_{p^2 - m^2}} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{2\pi i} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

y hemos mostrado entonces que la amplitud combinada para la partícula/antipartícula está dada por

$$G(x' - x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

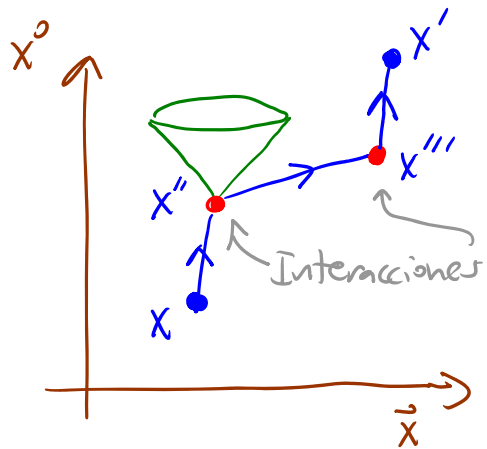
Propagador  
de Feynman

Figura aquí partícula con energía  $p^0 \neq E_{\vec{p}} \leftrightarrow p^2 \neq m^2$   
 ("fuerza de la capa de masa"), lo cual como hemos visto es un truco matemático para incorporar  $\Theta(t' - t)$  y  $\Theta(t - t')$ .

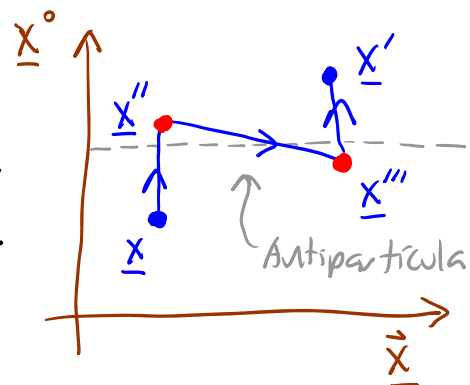
Más adelante veremos que es posible reproducir este propagador a partir de un campo escalar  $\varphi(x)$ .

Hasta ahora hemos hablado de una partícula libre.  
 Por supuesto nos interesará más analizar partículas  
 que interactúan entre sí o con un potencial externo.

Si estas interacciones son débiles, tiene sentido  
 describirlas en un tratamiento  
perturbativo, donde la amplitud de  
 propagación de  $x$  a  $x'$  se obtiene  
 considerando intervalos de propagación  
 libre hasta puntos intermedios donde



se toma en cuenta el efecto de las interacciones, como  
 en el ejemplo mostrado en la figura. Interesantemente,  
 si  $(x'' - x''')^2 < 0$ , entonces existe un  
 marco  $\underline{O}$  donde  $\underline{x}'''$  antecede a  $\underline{x}''$ ,  
 y entre  $\underline{x}'''^0$  y  $\underline{x}''^0$  ¡el observador  
 ve no 1 sino 3 partículas!



Resulta inevitable entonces considerar procesos donde uno  
 o más pares partícula-antipartícula se crean o destruyen.



Dado que el número de partículas puede cambiar, el propagador  $\langle x'|x \rangle$  no incluye toda la información relevante: debemos preguntarnos no solo cuál es la amplitud de que

1 partícula en  $x \rightarrow 1$  partícula en  $x'$ ,

sino más en general, cuál es la amplitud de que

$N$  (anti)partículas en  $x_1, \dots, x_N \rightarrow N'$  (anti)partículas en  $x'_1, \dots, x'_{N'}$   
para cualquier elección de  $N, N' \geq 0$ .

(Como veremos más adelante, en el lenguaje de campos esta información estará en esencia codificada en

las "funciones de correlación"  $\sim \langle \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x'_1) \hat{\phi}(x'_2) \dots \rangle$ .)

Posteriormente, esta noción, en espacio de momentos, dará lugar al concepto de "amplitud de dispersión"

(ó "matriz  $S$ "). La principal moraleja de todo esto es que, para hablar de partículas cuánticas relativistas interactuantes, necesitamos un formalismo en el que el número de partículas pueda cambiar! Muy diferente al caso no relativista,

L2: 10/08/22    L2: 08/08/18    L2: 01/02/17

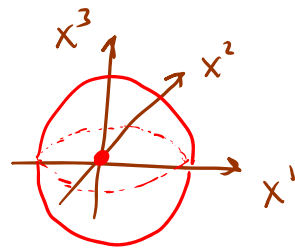
## Grupos de Lorentz y Poincaré

En mecánica cuántica no relativista, al hablar de, p.ej., el átomo de hidrógeno, el grupo de rotaciones  $SO(3)$  ó  $SU(2)$  juega un papel importante, por ser una simetría del sistema.

En nuestro caso deseamos hablar de particular relativistas, y nuevamente, el grupo de simetría asociado jugará un papel importante.

Como punto de partida, supondremos en este curso que el espaciotiempo es plano, lo cual evidentemente no es estrictamente cierto, pero constituye una excelente aproximación para los experimentos usuales de física de partículas.

De acuerdo con la relatividad especial, para cualesquiera 2 sistemas inerciales  $S$  y  $S'$  (que tomaremos con orígenes coincidentes en  $t=t'=0$ ),  $c=1$  para un frente de luz esférico implica que  $\vec{x}^2 = t^2$ ,  $\vec{x}'^2 = t'^2$ , es decir,



$$(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = 0 = (X'^0)^2 - (X'^1)^2 - (X'^2)^2 - (X'^3)^2.$$

El cambio de coordenadas de  $S$  a  $S'$  debe ser lineal (por homogeneidad del espacio/tiempo) y se caracteriza entonces precisamente por preservar este intervalo relativista

$$X^2 \equiv X \cdot X \equiv (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \equiv \begin{cases} (\text{tiempo propio})^2 & \text{si } X^2 > 0 \\ -(\text{distancia propia})^2 & \text{si } X^2 < 0 \end{cases}$$

Si no fuera por los signos, esto sería (el cuadrado de) la norma usual de un vector 4-dimensional  $X^{\mu} \equiv (X^0, X^1, X^2, X^3)$ :

$|X|^2 \equiv \sum_{\mu=0}^3 X^{\mu} X^{\mu}$ , y las transformaciones que la preservan serían rotaciones en 4 dimensiones.

En lugar de esto, tenemos una nueva definición de norma,

$$\|X\|^2 \equiv X \cdot X \equiv X^{\mu} \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\equiv X^{\nu}} X^{\nu} \quad \leftarrow \text{Suma sobre índices repetidos (arriba y abajo) implícita}$$

con

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

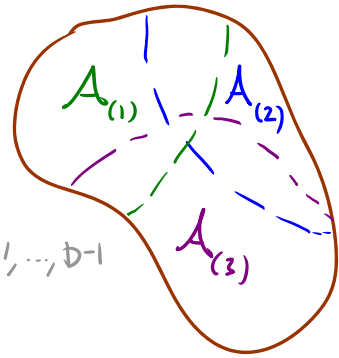
Métrica de Minkowski

(con signatura +--- de partícula)

Ya que necesitamos para nuestra discusión los conceptos de vector, tensor, métrica, etc., vale la pena de una vez enunciar su definición en el contexto más general.

Definimos primero una variedad diferenciable <sup>manifold</sup>  $D$ -dimensional

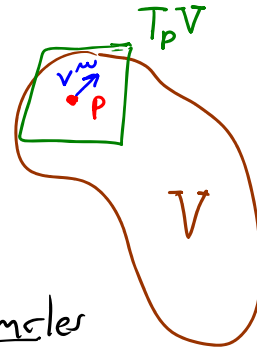
$V$  como un espacio que se parece 'por cachos' a  $\mathbb{R}^D$ , de tal manera que podemos asignarles coordenadas  $x_{(r)}^m$  a puntos en distintas regiones abiertas



$A_{(r)}$ ,  $r=1,2,\dots$ , asegurándonos de que todos los mapas  $x_{(r)}^m \mapsto x_{(s)}^m$  definidos en las regiones de traslape  $A_{(r)} \cap A_{(s)}$  sean diferenciables.

Con esto logramos tener la noción usual de derivada en cada punto,  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Pero es importante notar que  $\underline{V}$  no es un espacio vectorial: no incorpora una definición natural de la suma de 2 puntos. Así que, a diferencia de lo que sucede en  $\mathbb{R}^D$ , las propias coordenadas  $x^m$  no son vectores.

Por otro lado, en la vecindad inmediata de cualquier punto  $p \in V$ , el espacio es por definición una copia de  $\mathbb{R}^D$ , así que debe existir alguna noción de vectores pensados intuitivamente como desplazamientos infinitesimales



en torno a  $p$ . Esto se implementa definiendo a un vector (contravariante) en el punto  $p$ , como una colección  $V$  de  $D$  números  $v^m$  que bajo un cambio de coordenadas o difeomorfismo  $x^m \rightarrow x'^m(x^y)$ , se mezclan de acuerdo con

$$V^m \rightarrow V'^m \equiv \frac{\partial x'^m}{\partial x^y} \Big|_p V^y.$$

← así transforman los desplazamientos infinitesimales  $dx^m$

Recordando que las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  y las transformaciones de Lorentz en  $\mathbb{R}^{3,1}$  son cambios de coordenadas lineales, vemos que esta definición coincide con la familiar para vectores  $\vec{v}$  o  $V^m$ . Claramente, el conjunto de todos los vectores definidos en un punto dado si forman un espacio vectorial (que se denota  $T_p V$ , y se conoce como el 'espacio tangente a  $V$  en  $p$ '), pero nuevamente es importante resaltar que no hay de

entonces una manera de sumar vectores definidos en distintos puntos  $p, p' \in V$ .

De manera similar, llamamos vector dual (o vector covariante, covector, o uno-forma) en  $p \in V$  a una colección  $\omega$  de  $D$  números  $\omega_\mu$  que transforman de acuerdo con

$$\omega_\mu \rightarrow \omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \Big|_p \omega_\nu,$$

y más en general, llamamos tensor de rango  $(m, n)$  en  $p \in V$  a una colección  $\underline{T}$  de  $D^{m+n}$  números tales que

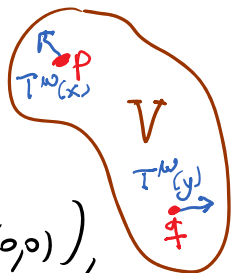
$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\lambda_m}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

Utilizaremos también la noción de campo tensorial,  $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x)$ , que se refiere a la elección de un tensor en cada punto  $p \in V$ .

Notemos que los  $\omega_\mu$  en verdad son 'vectores duales', en el sentido de que mapean vectores  $V^\mu$  a números —

$\omega(V) \equiv \omega_\mu V^\mu$  es un escalar (un tensor de rango  $(0,0)$ ), invariante bajo difeos:  $\omega'_\mu V'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \omega_\nu V^\rho = \omega_\nu V^\nu$ .

Componentes de matriz identidad:  $\delta^\nu_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \rho \\ 0 & \text{si } \nu \neq \rho \end{cases}$



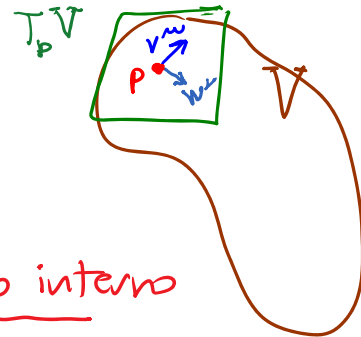
Más en general, la 'contracción'

$T^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_n}$  es un tensor de rango  $(m-1, n-1)$ .

Sobre una variedad diferenciable  $V$ , una métrica se define como un campo tensorial de rango  $(0,2)$ ,  $\leftrightarrow$  <sup>matriz</sup>  $D \times D$

$g_{\mu\nu}(x)$ , que es simétrico ( $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$ ) y 'no degenerado' (ver abajo). Es decir, bajo un cambio de coordenadas arbitrario  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x)$ , la métrica transforma de acuerdo con

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho}(x).$$

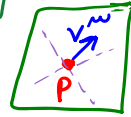


Este objeto define sobre  $V$  un producto interno

(invar. bajo difeo)  $v \cdot w \equiv v^{\mu} g_{\mu\nu} w^{\nu}$ , y por lo tanto

una norma  $\|v\|^2 \equiv v^2 \equiv v \cdot v$ . Dado que los vectores representan desplazamientos infinitesimales, la métrica, al fijar su tamaño, nos da una noción de distancia sobre  $V$ .

Para describir al espaciotiempo, nos interesa el caso de una métrica "lorentziana", donde la matriz  $g_{\mu\nu}$  tiene

$T_p V$ 

$v^2 > 0$  tipo tiempo  
 $v^2 = 0$  nulo  
 $v^2 < 0$  tipo espacio

en cada punto 1 autovector positivo y  $D-1$  autovectores negativos. A través de esta información, la métrica codifica la "estructura causal" sobre  $V$ , es decir, distingue la direcciones temporales de las espaciales (y define las conas de luz).

El que la métrica sea 'no degenerada' se refiere a que tengamos  $v \cdot w = v^\mu g_{\mu\nu} w^\nu = 0 \quad \forall v$  solo si  $w = 0$ .

Esto implica en particular que, en cada punto dado, la matriz  $g_{\mu\nu}(x)$  es invertible. Denotaremos su

inverso como  $g^{\mu\nu}(x)$  ( $g^{\mu\nu}(x) g_{\nu\lambda}(x) = \delta^\mu_\lambda = g_{\lambda\nu}(x) g^{\nu\mu}(x)$ ).

Podemos usar  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$  para establecer una correspondencia biunívoca entre vectores y vectores duales,

$$V_\mu \equiv g_{\mu\nu}(x) V^\nu$$

$$\longleftrightarrow \underbrace{W^\mu = g^{\mu\nu}(x) W_\nu}_{\leftarrow \text{en genal. } \neq g^{\mu\nu}(x)}$$

Esto funciona porque, como es fácil verificar,  $g^{\mu\nu}$  es un tensor de rango (2,0).

o más en general, para subir y bajar índices de cualquier tensor.



≡ variedad diferencial  
en métrica lorentziana

Regresemos ahora al caso de un espaciotiempo plano con  $D=4$ , donde la métrica (en coordenadas cartesianas) es la de Minkowski,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . En este caso  $g^{\mu\nu}$  coincide numéricamente con  $\eta_{\mu\nu}$ , pero de cualquier manera la denotaremos  $\eta^{\mu\nu}$  para seguirle la pista a la subida y bajada de índices:

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu = (V_0, -V_1, -V_2, -V_3), \quad \omega^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \omega_\nu = (\omega_0, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_3).$$

Hemos dicho ya que las transformaciones entre sistemas inerciales preservan la norma de Minkowski  $\|v\|^2 = v^\mu \eta_{\mu\nu} v^\nu \forall v$ , es decir, dejan invariante a la métrica  $\eta_{\mu\nu}$ :

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \eta_{\lambda\rho} = \eta_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \text{o, en notación matricial, } \bar{x}' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz}}}{\Lambda} \bar{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cuadrivectores}}}{\bar{a}},$$

$\uparrow$  Matriz  $4 \times 4$  constante  $\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow x^\lambda = (\Lambda^{-1})^\lambda_\sigma (x'^\sigma - a^\sigma), \quad \text{es decir } \bar{x} = \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} (\bar{x}' - \bar{a}),$$

$$\text{con } (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu (\Lambda^{-1})^\rho_\nu \eta_{\lambda\rho} = (\Lambda^{-1T})^\lambda_\mu \eta_{\lambda\rho} (\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \eta_{\mu\nu},$$

es decir,  $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1 T} \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} = \underset{\sim}{\eta}$ , o lo que es lo mismo,

$$\boxed{\underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\eta}} \quad (\text{cf. rotaciones: } \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{\mathbb{1}} \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{\mathbb{1}}) \quad (1)$$

↑ Matrices ortogonales

Tales  $\underset{\sim}{\Lambda}$ 's especifican lo que conocemos como transformaciones de Lorentz. Los vectores  $a^\mu$  claramente especifican traslaciones (=traslaciones) en el espaciotiempo. Por ahora estudiaremos solo el caso  $a^\mu = 0$ .

Es fácil comprobar que las transformaciones de Lorentz forman un grupo:

- Si  $\bar{x}' = \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)} \bar{x}$  y  $\bar{x}'' = \underset{\sim}{\Lambda}^{(2)} \bar{x}' = \underset{\sim}{\Lambda}^{(2)} \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)} \bar{x}$ , donde  $\underset{\sim}{\Lambda}^{(1)}$  y  $\underset{\sim}{\Lambda}^{(2)}$  satisfacen (1), entonces  $\underset{\sim}{\Lambda}^{(3)} \equiv \underset{\sim}{\Lambda}^{(2)} \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)}$  satisface (1).
- Si  $\underset{\sim}{\Lambda}$  satisface (1), entonces  $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1}$  también (y  $\therefore \underset{\sim}{\mathbb{1}}$ )

Notar por cierto que la ec. (1),  $\underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\eta}$ , implica que  $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1} = \underset{\sim}{\eta}^{-1} \underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta}$ , es decir,  $\boxed{(\underset{\sim}{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\nu = \underset{\sim}{\eta}^{\mu\lambda} \underset{\sim}{\Lambda}^\rho{}_\lambda \underset{\sim}{\eta}_{\rho\nu} = \underset{\sim}{\Lambda}^\rho{}_\nu}.$

(↑  $(\underset{\sim}{\Lambda}^T)^\rho{}_\lambda$ )

Por analogía con el grupo de rotaciones  $O(4)$  (matrices ortogonales  $4 \times 4$ ), llamamos a este grupo  $O(3,1)$  (o  $O(1,3)$ ), el grupo de Lorentz.

Notar que  $\tilde{\Lambda}^T \tilde{\eta} \tilde{\Lambda} = \tilde{\eta} \Rightarrow \underbrace{\det \tilde{\Lambda}^T}_{\det \tilde{\Lambda}} \det \tilde{\eta} \det \tilde{\Lambda} = \det \tilde{\eta}$ , ec. (1)

de modo que  $\boxed{\det \tilde{\Lambda} = \pm 1}$  : transformaciones  $\begin{cases} \text{"propias"} \\ \text{"impropias"} \end{cases}$

Las transformaciones con  $\det \tilde{\Lambda} = +1$  forman un subgrupo de  $O(3,1)$ , que denotamos  $SO(3,1)$  (análogo a  $SO(4)$ ).  $\uparrow$  matrices "especiales"

Además, la componente 00 de la ec. (1) dice que

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2 = 1,$$

así que toda  $\tilde{\Lambda}$  debe tener  $\boxed{\Lambda^0_0 \geq 1 \text{ ó } \Lambda^0_0 \leq -1}$ .

Las que satisfacen la primera condición se conocen como transformaciones ortócronas (porque preservan la dirección del tiempo), y forman otro subgrupo de  $O(3,1)$ , que denotamos  $O^+(3,1)$ .

Las  $\tilde{\Lambda}$ 's que son a la vez propias y ortócronas forman el llamado grupo de Lorentz restringido,  $SO^+(3,1)$  (muchas veces denotado simplemente  $SO(3,1)$ ).

$\llcorner$  3:12/08/22

Entre las transformaciones  $\Lambda \in SO^+(3,1)$ , tenemos:

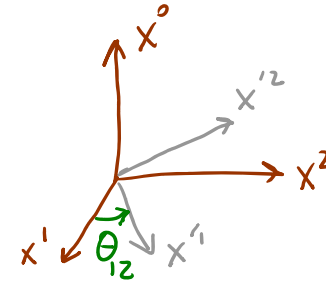
- Rotaciones en el plano 1-2 (ó 1-3, ó 2-3):

$${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ 0 & -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0    1    2    3

0    1    2    3

$0 \leq \theta_{12} < 2\pi$



Estas 3 rotaciones y sus productos forman el subgrupo más familiar  $SO(3) \subset SO^+(3,1) \subset SO(3,1) \subset O(3,1)$ .

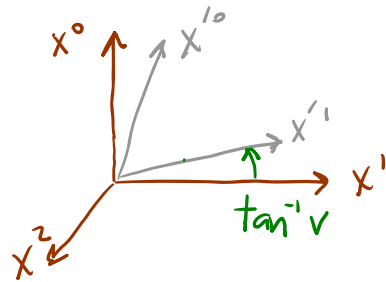
- Empujones ("boosts") en la dirección 1 (ó 2 ó 3):

$${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & -\sinh\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha_1 & \cosh\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"rapidez"  
rapidity

$$\begin{cases} \cosh\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma \\ \sinh\alpha_1 = \gamma v \end{cases} \quad (-1 < v < 1)$$

$-\infty < \alpha_1 < \infty$



← Estas son las transformaciones DE Lorentz originales

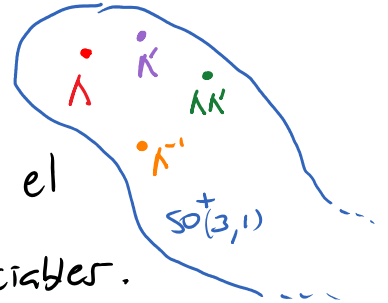
Los 3 empujones y sus productos no forman un subgrupo.

Como veremos en breve, cualquier  $\Lambda \in SO^+(3,1)$  se puede escribir como un producto de estas 6 transformaciones prototípicas.

Este es entonces un grupo continuo: sus elementos se

pueden especificar con una elección de 6 parámetros reales (p.ej.,  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ). De hecho  $SO^+(3,1)$  es un ejemplo de lo que se conoce como un

grupo de Lie: es una variedad diferenciable (6-dimensionsal) con estructura de grupo, donde el producto y el inverso definen mapas diferenciables.



Más aún, es un grupo no Abelian (hay elementos que no conmutan entre sí), no compacto (el rango de los parámetros continuos NO es acotado y cerrado), y

conexo (partiendo de cualquier punto se puede llegar a cualquier otro), aunque no simplemente conexo (hay

trayectorias que a pesar de que empiezan y terminan en el mismo punto, no se pueden encoger hasta desaparecer).

← ver más adelante

Comparando el grupo de Lorentz con su subgrupo restringido, se encuentra que cualquier elemento de  $O(3,1)$  se puede escribir como el producto de una  $\Lambda \in SO^+(3,1)$  y un elemento del grupo discreto  $\{\tilde{1}, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{PT}\}$ , donde

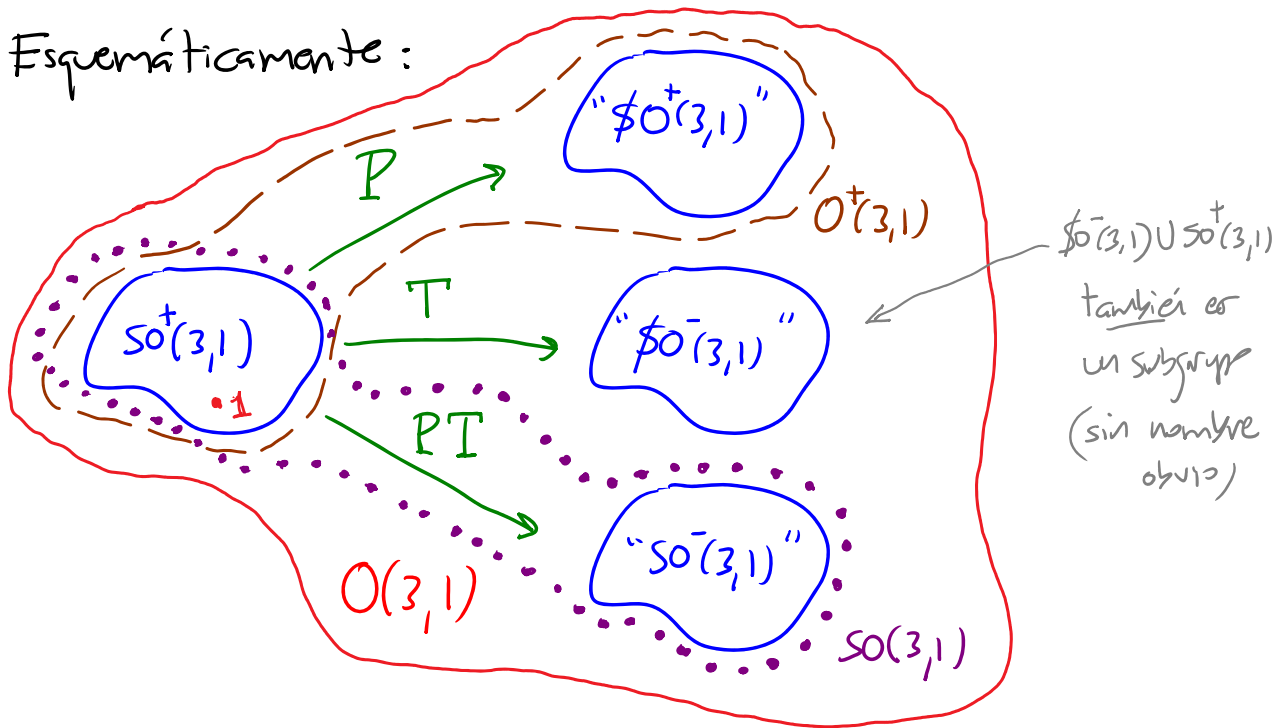
$$\tilde{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Paridad (inversión espacial),}$$

$$\tilde{P}^2 = \tilde{1}$$

$$\tilde{T} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Inversión temporal}$$

$$\tilde{T}^2 = \tilde{1}, \quad \tilde{PT} = \tilde{TP}$$

Esquemáticamente:



$O(3,1)$  es entonces un grupo de Lie no compacto y no conexo (tiene 4 componentes conexas).

23: 10/08/18

Es posible entender a  $SO^+(3,1)$  con base en transformaciones que difieren infinitesimalmente de la identidad:

$$SO^+(3,1)$$

$\omega \uparrow \downarrow 1$

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{1} + \tilde{\omega} \iff \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \text{ con } |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1.$$

El punto es que haciendo muchas transformaciones infinitesimales sucesivas obtendríamos una transformación

finita. En el caso infinitesimal, la condición  $\tilde{\Lambda}^T \tilde{\eta} \tilde{\Lambda} = \tilde{\eta}$ ,

es decir,  $(\Lambda^T)^\mu{}_\lambda \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\lambda\rho}$ , implica que

$$(\delta^\mu{}_\lambda + \omega^\mu{}_\lambda) \eta_{\mu\nu} (\delta^\nu{}_\rho + \omega^\nu{}_\rho) = \eta_{\lambda\rho}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\eta_{\lambda\rho} + \omega_{\rho\lambda} + \omega_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\omega^2)} = \eta_{\lambda\rho}$$

es decir,  $\boxed{\omega_{\rho\lambda} = -\omega_{\lambda\rho}}$ .

Una matriz  $4 \times 4$  real y antisimétrica

tiene 6 componentes independientes,

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

justo el número de parámetros continuos

independientes que antes dijimos que especifican una

transformación de Lorentz general: 3 ángulos de rotación

$\theta_{ij}$  + 3 parámetros de rapidez  $\alpha_i$ . ✓

De hecho, podemos ver la propiedad de antisimetría directamente en las matrices de rotaciones  ${}^{(ij)}\Lambda(\theta_{ij})$  y empujones  ${}^{(0i)}\Lambda(\alpha_i)$  si tomamos  $\theta_{ij}, \alpha_i \ll 1$ .

Encontramos, p.ej.,  ${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) = \mathbb{1} + {}^{(12)}\omega(\theta_{12})$ , con

$${}^{(12)}\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} & 0 & 0 \\ -\theta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \theta_{12} \ll 1$$

por convención útil para cuántica

$$= \theta_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \theta_{12} i J^{(12)} \equiv -\theta_{12} i J^{(21)}$$

índices  $\mu, \nu$

Especifica magnitud de transformación

Especifica tipo de transformación

Generador de rotación en el plano 1-2 (índices  $\mu, \nu$ )

y de manera similar,  ${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) = \mathbb{1} + {}^{(01)}\omega(\alpha_1)$ , con

$${}^{(01)}\omega = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \alpha_1 i J^{(01)} \equiv -\alpha_1 i J^{(10)}$$

índices  $\mu, \nu$

antisimétrica tras bajar índice

Generador de empujón en la dirección 1

El resultado general es

$$i J_{\mu\nu}^{(p\lambda)} = -\delta_{\mu}^p \delta_{\nu}^{\lambda} + \delta_{\nu}^p \delta_{\mu}^{\lambda}$$

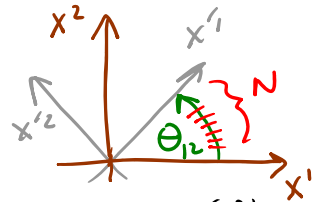
L3: 03/02/17

antisimétrico bajo  $\mu \leftrightarrow \nu$

← generador de Lorentz en el plano  $p\lambda$



Las matrices de rotaciones/empujones se pueden reconstruir a partir de estos generadores:



pej.,  $\underset{\sim}{\Lambda}^{(12)}(\theta_{12}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \underset{\sim}{\mathbb{1}} + i \frac{\theta_{12}}{N} \underset{\sim}{J}^{(12)} \right)^N = \exp(i \theta_{12} \underset{\sim}{J}^{(12)})$ ,  
 ↖ no infinitesimal

relación que también podemos verificar directamente:

$$\exp(\theta_{12} i \underset{\sim}{J}^{(12)}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_{12}^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots & \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & -\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \dots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{p.36}}{=} \underset{\sim}{\Lambda}^{(12)}(\theta_{12}) \quad \checkmark$$

Dada cualquier  $\underset{\sim}{\omega}$  antisimétrica, podemos descomponerla en la forma  $\underset{\sim}{\omega} = -\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} \underset{\sim}{J}^{(\lambda\rho)}$ , así que los 6 generadores  $\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}$  nos dan una base  $\frac{1}{2}$  por término repetidos:  
 pej.  $\omega_{12} \underset{\sim}{J}^{(12)}$   
 $= +\omega_{21} \underset{\sim}{J}^{(21)}$

para el espacio de todas las posibles transformaciones de Lorentz infinitesimales. Repitiendo una misma

transformación infinitesimal arbitraria un número infinito de veces, obtenemos la matriz  $\underset{\sim}{\Lambda} \in \text{So}^+(3,1)$  más general:

no infinitesimal

$$\Lambda_{\sim}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}_{\sim} + \frac{1}{N} \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J_{\sim}^{(\mu\nu)} \right) \right]^N = \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J_{\sim}^{(\mu\nu)} \right).$$

$so^+(3,1)$   
 $\omega_{\mu\nu}$

$\omega \in T_{\sim}^+ so^+(3,1)$

Notemos que en esta iteración aparecen en general productos  $J_{\sim}^{(\mu\nu)} J_{\sim}^{(\rho\sigma)}$  de 2 generadores distintos, p.ej.,

$$i J_{\sim}^{(12)} i J_{\sim}^{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i J_{\sim}^{(13)} i J_{\sim}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y que estos productos (tal como  $J_{\sim}^{(12)^2}$ ,  $J_{\sim}^{(13)^2}$ , etc.)

No pertenecen al mismo espacio de matrices  $\omega^{\mu\nu}$ , con

$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Pero curiosamente, el conmutador

$$[i J_{\sim}^{(12)}, i J_{\sim}^{(13)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -i J_{\sim}^{(23)}$$

(tal como  $[i J_{\sim}^{(12)}, i J_{\sim}^{(12)}] = 0$ , etc.) ¡SÍ! pertenece al mismo espacio!

De hecho, a partir de la definición original (p. 40)

$$i J^{(\mu\nu)\lambda}{}_k = -\eta^{\mu\lambda} \delta_k^\nu + \eta^{\nu\lambda} \delta_k^\mu, \quad \delta_k^\nu \text{ después de subir índice } \lambda$$

se puede mostrar el resultado general (Tarea 1)

$$\left[ \underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}, \underset{\sim}{J}^{(\rho\sigma)} \right] = i \left( \eta^{\mu\sigma} \underset{\sim}{J}^{(\nu\rho)} + \eta^{\nu\rho} \underset{\sim}{J}^{(\mu\sigma)} - \eta^{\mu\rho} \underset{\sim}{J}^{(\nu\sigma)} - \eta^{\nu\sigma} \underset{\sim}{J}^{(\mu\rho)} \right) \quad (2)$$

El que los conmutadores de los generadores se puedan expresar como combinaciones lineales de los generadores no es casualidad, sino uno de los requisitos básicos para que  $so^+(3,1)$  sea un grupo de Lie. Por simplicidad de notación, conviene explicar esto restringiéndonos al subgrupo de rotaciones  $so(3) \subset so^+(3,1)$ . El punto es que, si bien, p.ej.,  $\exp(i\theta_{12} \underset{\sim}{J}^{(12)}) \exp(i\theta_{13} \underset{\sim}{J}^{(13)}) \neq \exp(i\theta_{12} \underset{\sim}{J}^{(12)} + i\theta_{13} \underset{\sim}{J}^{(13)})$ , las 2 transformaciones del lado izquierdo son rotaciones, y así lo debe ser también su producto, que se debe poder expresar por lo tanto en la forma

$$\exp\left(i\varphi_{12} \underset{\sim}{J}^{(12)} + i\varphi_{13} \underset{\sim}{J}^{(13)} + i\varphi_{23} \underset{\sim}{J}^{(23)}\right) \text{ para ciertos } \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 & i\varphi_{12} \tilde{J}^{(12)} + i\varphi_{13} \tilde{J}^{(13)} + i\varphi_{23} \tilde{J}^{(23)} \\
 & \quad \underbrace{\exp(i\theta_{12} \tilde{J}^{(12)})}_{\text{exp}(i\theta_{12} \tilde{J}^{(12)})} \quad \underbrace{\exp(i\theta_{13} \tilde{J}^{(13)})}_{\text{exp}(i\theta_{13} \tilde{J}^{(13)})} \\
 & = \ln \left[ \left( \mathbb{1} + i\theta_{12} \tilde{J}^{(12)} - \frac{1}{2} \theta_{12}^2 \tilde{J}^{(12)2} + \dots \right) \left( \mathbb{1} + i\theta_{13} \tilde{J}^{(13)} - \frac{1}{2} \theta_{13}^2 \tilde{J}^{(13)2} + \dots \right) \right] \\
 & = \ln \left[ \mathbb{1} + i\theta_{12} \tilde{J}^{(12)} + i\theta_{13} \tilde{J}^{(13)} - \frac{1}{2} \theta_{12}^2 \tilde{J}^{(12)2} - \frac{1}{2} \theta_{13}^2 \tilde{J}^{(13)2} - \theta_{12} \theta_{13} \tilde{J}^{(12)} \tilde{J}^{(13)} + \dots \right] \\
 & \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots \\
 & = i\theta_{12} \tilde{J}^{(12)} + i\theta_{13} \tilde{J}^{(13)} - \frac{1}{2} \theta_{12}^2 \tilde{J}^{(12)2} - \frac{1}{2} \theta_{13}^2 \tilde{J}^{(13)2} - \theta_{12} \theta_{13} \tilde{J}^{(12)} \tilde{J}^{(13)} + \dots \\
 & \quad - \frac{1}{2} \left( -\theta_{12}^2 \tilde{J}^{(12)2} - \theta_{13}^2 \tilde{J}^{(13)2} - \theta_{12} \theta_{13} \tilde{J}^{(12)} \tilde{J}^{(13)} - \theta_{12} \theta_{13} \tilde{J}^{(13)} \tilde{J}^{(12)} + \dots \right) + \dots \\
 & = i\theta_{12} \tilde{J}^{(12)} + i\theta_{13} \tilde{J}^{(13)} - \frac{1}{2} \theta_{12} \theta_{13} [\tilde{J}^{(12)}, \tilde{J}^{(13)}] + \mathcal{O}(\theta^3) ,
 \end{aligned}$$

de donde vemos que  $i[\tilde{J}^{(12)}, \tilde{J}^{(13)}]$  debe ser una combinación lineal de  $\tilde{J}^{(12)}$ ,  $\tilde{J}^{(13)}$  y  $\tilde{J}^{(23)}$  (con coef. reales).

Los términos subsiguientes también involucran conmutadores, por

Baker-Campbell-Hausdorff:  $e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \dots\right)$ .

14:15/08/02

De aquí vemos que los conmutadores entre los

3 generadores  $\tilde{J}^{(12)}$ ,  $\tilde{J}^{(13)}$ ,  $\tilde{J}^{(23)}$  tienen la información

esencial sobre la tabla de multiplicación de  $SO(3)$ .

El espacio de todas las combinaciones lineales posibles de estos 3 generadores (con coeficientes no necesariamente pequeños) se conoce como el álgebra de Lie del grupo  $SO(3)$ , la cual se denota algunas veces como  $so(3)$ .

De manera similar, el espacio de todas las combinaciones lineales posibles de los 6 generadores  $J^{(\mu\nu)}$  se conoce como el álgebra de Lie del grupo de Lorentz  $SO^+(3,1)$ , y las relaciones de conmutación (2) <sup>p. 43</sup> determinan la tabla de multiplicación del grupo. Cabe señalar que, como esta álgebra está relacionada con transformaciones infinitesimales, su naturaleza depende solo del componente del grupo que contiene a  $\mathbb{1}$ , de modo que las álgebras de los grupos de Lorentz restringido y completo coinciden, es decir,  $so^+(3,1) = so(3,1) = o(3,1)$ .  $\leftarrow P, T$  son discretos, así que no hay versión infinitesimal

Más en general, matemáticamente un álgebra de Lie es simplemente un espacio vectorial  $A$  con un "producto"

$$[\cdot, \cdot]: A \otimes A \rightarrow A \quad \text{que tiene las mismas propiedades}$$

$$(v_1, v_2) \mapsto v_3 = [v_1, v_2]$$

que el conmutador habitual (en particular, satisface la identidad de Jacobi  $[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0$   $\forall v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{A}$ ). Dado un álgebra de Lie, existe un mapeo exponencial que determina un grupo de Lie asociado.

Habiendo ya entendido por completo al grupo (y álgebra) de Lorentz, recordamos que la métrica de Minkowski es invariante no solo bajo Lorentz sino también bajo traslaciones

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad a^\mu \in \mathbb{R}^{3,1},$$

espacio de Minkowski

Estas son 4 transformaciones independientes continuas. Claramente conmutan entre sí, y forman por tanto un grupo de Lie abeliano. Denotaremos  $P^\mu$  a los 4 generadores correspondientes.

La transformación más general entre 2 sistemas inerciales es, como dijimos antes,

$$x^\mu \xrightarrow{(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})} x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

← 10 parámetros continuos independientes

El producto correspondiente es  $(\tilde{\Lambda}_2, \tilde{a}_2) \cdot (\tilde{\Lambda}_1, \tilde{a}_1) = (\tilde{\Lambda}_2 \tilde{\Lambda}_1, \tilde{a}_2 + \tilde{\Lambda}_2 \tilde{a}_1)$

$$\underbrace{\tilde{x}'' = \tilde{\Lambda}_2 \tilde{x}' + \tilde{a}_2}_{\tilde{x}'' = \tilde{\Lambda}_2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{x} + \tilde{a}_2 + \tilde{\Lambda}_2 \tilde{a}_1} \quad \underbrace{\tilde{x}' = \tilde{\Lambda}_1 \tilde{x} + \tilde{a}_1}$$

donde vemos que las traslaciones espaciotemporales y las transformaciones de Lorentz no conmutan entre sí.

Dado que existe un inverso,  $(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})^{-1} = (\tilde{\Lambda}^{-1}, -\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{a})$ , el conjunto combinado de estos 10 tipos de transformaciones constituye un nuevo grupo de Lie: el grupo de Poincaré, que denotaremos  $\text{Poincaré}(3,1)$  (también conocido como grupo de Lorentz inhomogéneo,  $\text{IO}(3,1)$ , en cuyo caso a  $\text{O}(3,1)$  se le llama grupo de Lorentz homogéneo).

Una manera de deducir el álgebra de Poincaré es representar a  $(\tilde{\Lambda}, \tilde{a})$  como una matriz  $5 \times 5$ :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & \tilde{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{x}' = \tilde{\Lambda} \bar{x} + \tilde{a}$$

índices  $M_N$ , con  $M \equiv (\mu, 4)$ ,  $N \equiv (\nu, 4)$

En esta notación, los generadores de traslaciones, definidos por

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \tilde{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\Lambda}, \tilde{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\Lambda}} + i a^\mu P_{(\mu)} \quad \text{para } |a^\mu| \ll 1,$$

están representadas por matrices  $5 \times 5$   $\tilde{P}_{(\mu)}$ , con componentes

$$i P_{(\mu)}^M{}_N = \delta_{\mu}^M \delta_N^4 \quad (\text{p.ej. } i \tilde{P}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

A partir de esto podemos calcular (Tarea 1)

$$[\tilde{P}^{(\mu)}, \tilde{P}^{(\nu)}] = 0$$

$$[\tilde{J}^{(\mu\nu)}, \tilde{P}^{(\lambda)}] = i (\eta^{\nu\lambda} \tilde{P}^{(\mu)} - \eta^{\mu\lambda} \tilde{P}^{(\nu)})$$

(3)

(donde por supuesto  $P^{(\mu)} \equiv \eta^{\mu\nu} P_{(\nu)}$ , de tal manera que  $a^{\mu} P_{(\mu)} = a_{\mu} P^{(\mu)}$ ), relaciones de conmutación que junto con las de Lorentz, ec. (2), <sup>← p. 43</sup> definen el álgebra de Lie del grupo Poincaré(3,1).

Habiendo entendido ya por completo la estructura del grupo de Poincaré, nuestra siguiente meta es entender la manera en que actúa a nivel cuántico.

Recordemos primero cómo se implementan las simetrías en el formalismo de la mecánica cuántica. Asociado a cada transformación  $T$  de nuestro sistema físico (o de nuestro  $\uparrow$  p.ej., Poincaré  $(\hat{\Lambda}, \hat{a})$ )



punto de vista con respecto a ese mismo sistema físico — transformación 'activa' vs. 'pasiva'), existe un

operador lineal  $\hat{U}(T): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

por favor  
llamarle  $\hat{T}$

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \hat{U}(T)|\psi\rangle \equiv |\hat{U}\psi\rangle.$$

Si  $T$  es una simetría del sistema, entonces debemos tener

$$|\langle \varphi' | \psi' \rangle|^2 = |\langle \hat{U}\varphi | \hat{U}\psi \rangle|^2 = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 \quad \forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H},$$

lo cual se cumple si

probabilidad de transición de  $|\psi\rangle$  a  $|\varphi\rangle$

$$\langle \hat{U}\varphi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \varphi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \quad \forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle,$$

es decir, si  $\hat{U}$  es un operador unitario:  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{1}$ .

Una posibilidad más exótica sería que tuviéramos

$$\langle \hat{U}\varphi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle^* \quad \forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle$$

Esto solo sería posible si  $\hat{U}$  fuera antilineal en lugar de lineal,

es decir, si  $\hat{U}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle) = \alpha^* \hat{U}|\psi\rangle + \beta^* \hat{U}|\varphi\rangle \quad \forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle$ .

Para un operador de este tipo, la conjugación hermitiana debe

$$\text{definirse a través de } \langle U\varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | U^\dagger \psi \rangle^* = \langle U^\dagger \psi | \varphi \rangle$$

$\forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle$ . Dada esta definición, la condición de

antiunitariedad  $\langle \hat{U}\varphi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle \quad \forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle$   
 se traduce en  $\langle \hat{U}^\dagger \hat{U} \psi | \varphi \rangle$   
 $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$ , que coincide con la fórmula para unitariedad (aunque aquí  $^\dagger$  significa otra cosa).

Ahora, ¿cuál de estas 2 condiciones es relevante desde el punto de vista físico? Claramente, para cualquier transformación  $T$  que pueda reducirse de manera continua a la identidad (que es obviamente lineal y unitaria),  $\hat{U}(T)$  será necesariamente lineal y unitario.

Un operador antilineal y antiunitario  $\hat{U}(T)$  solo podría estar asociado entonces a una transformación  $T$  no conectada a la identidad. De hecho, el único ejemplo conocido en el mundo real involucra a la transformación de inversión temporal,  $T = \mathbb{T}$ .

La razón por la cual  $\hat{U}(T)$  debe ser necesariamente antiunitario la entenderemos más adelante.

Ahora, si  $|\psi'\rangle = \hat{U}(T_1)|\psi\rangle$  y  $|\psi''\rangle = \hat{U}(T_2)|\psi'\rangle = \hat{U}(T_2)\hat{U}(T_1)|\psi\rangle$ , esperamos tener también  $|\psi''\rangle = \hat{U}(T_2 T_1)|\psi\rangle$ , es decir,

$$\hat{U}(T_2)\hat{U}(T_1) = \hat{U}(T_2 T_1) \quad \forall T_1, T_2 \in G,$$

lo cual diría que los operadores  $\hat{U}(T)$  constituyen una representación del grupo de simetría  $G$ . ← misma tabla de multiplicación

Para los matemáticos, un grupo  $G$  es siempre un conjunto de elementos abstractos  $\{g_\alpha\}$  que satisfacen cierta regla de multiplicación, y una representación  $R$  de  $G$  es una 'encarnación' de estos elementos como operadores lineales que actúan en un cierto espacio vectorial  $V$

$$g_\alpha \xrightarrow{R} \sigma_\alpha \quad (\sigma_\alpha: V \rightarrow V),$$

de tal manera que el producto se preserve:  $g_1 g_2 = g_3 \implies \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_3$ . (Cabe señalar que el mapeo  $g_\alpha \xrightarrow{R} \sigma_\alpha$  no necesariamente es uno a uno — se requiere que  $R$  sea un "homomorfismo", y no forzosamente un "isomorfismo". Caso extremo sería  $g_\alpha \xrightarrow{R} \mathbb{1}$ , conocido como la representación "trivial".) Escogiendo una base para  $V$ , los  $\sigma_\alpha$  pueden pensarse como matrices  $\dim V \times \dim V$ , y  $\dim V$  se conoce como la dimensión de  $R$ . En resumen, una

representación es una implementación del grupo  $G$   
en términos de matrices.

LY: 13/08/18

Notemos que, de acuerdo con esto, las matrices  $N \times N$  que normalmente pensamos que definen p.ej. a  $SU(2)$ ,  $SO(3)$ ,  $SO(3,1)$  (con  $N=2,3,4$  resp.) no son "en realidad" el grupo en sí, sino una representación del grupo, con dimensión  $N$ : la representación "fundamental". (Por supuesto, en la práctica esta distinción no es importante, porque en estos casos la representación en cuestión sí es un isomorfismo.)

Cuando el grupo  $G$  del cual tenemos una representación es un grupo de Lie, considerando elementos  $T \in G$  cerca de la identidad obtenemos también una representación del álgebra de Lie correspondiente:

$$\hat{U}(\underbrace{1 + i\epsilon^a Y^a}_{T(\epsilon)}) = \hat{1} + i\epsilon^a \hat{Y}^a$$

↑ generadores
↑ representación de los generadores

↑
↑ parámetros  $\epsilon^a \ll 1$

es decir,  $|\psi\rangle \xrightarrow{T(\epsilon)} |\psi'\rangle \equiv |\psi\rangle + i\delta\psi\rangle$   
 con  $|\delta\psi\rangle$  lineal en  $\epsilon^a \quad \hookrightarrow \equiv e^{i\epsilon^a \hat{Y}^a} |\psi\rangle$

$$[Y^a, Y^b] = if_c^{ab} Y^c \iff [\hat{Y}^a, \hat{Y}^b] = if_c^{ab} \hat{Y}^c$$

↑ constantes de estructura

Iterando la transformación infinitesimal, obtenemos la versión finita  $\hat{U}(\underbrace{\exp(i\alpha^a Y^a)}_{\equiv T(\alpha)}) = \exp(i\alpha^a \hat{Y}^a)$ ,  
parámetros finitos

Si los parámetros  $\alpha^a$  son reales, entonces el requisito de que  $\hat{U}$  sea un operador unitario equivale a pedir que los generadores  $\hat{Y}^a$  sean operadores hermitianos (como correspondería a observables). En este caso, se puede ver a partir de las relaciones de conmutación que las constantes de estructura  $f_c^{ab}$  deben ser reales.

Aplicando todo esto al caso del grupo de Poincaré, vemos que a nivel cuántico tendremos cf.  $J_{\lambda\rho}^{(\mu\nu)} \leftrightarrow \tilde{J}^{(\mu\nu)}$   
 + 6 generadores de Lorentz  $\hat{J}^{\mu\nu} \equiv$  momento angular  
 + 4 generadores de traslaciones  $\hat{P}^\mu \equiv$  energía-momento  
 definidos como operadores sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , que satisfacen las reglas de conmutación (2) y (3). A partir de esta representación del álgebra de Poincaré, p.43 ← p.48 queremos construir una representación del grupo, y asegurarnos de que sea unitaria.

15: 17/08/22

Para que no nos perdamos con las definiciones matemáticas, recordemos que en mecánica cuántica No relativista habíamos aprendido ya que existe una partícula que se llama el "electrón", asociada a un espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}_e = \left\{ \text{combinaciones de } |\vec{p}, \uparrow\rangle, |\vec{p}, \downarrow\rangle \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} j_z = \pm \frac{1}{2}$

"espín" arriba/abajo

Una primera pregunta es ¿por qué consideramos a  $|\vec{0}, \uparrow\rangle$  y  $|\vec{0}, \downarrow\rangle$  como 2 diferentes estados internos de una misma partícula, en lugar de hablar de 2 distintas partículas?

La respuesta: ¡porque podemos transformar  $|\vec{0}, \uparrow\rangle$  en  $|\vec{0}, \downarrow\rangle$  con solo girar la cabeza (aplicar una rotación)!

Más en general, cuando el electrón, visto desde un marco inercial  $S$ , está en un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_e$  (p.ej.,  $|\vec{p}, \downarrow\rangle$ ), sabemos que visto desde otro marco  $S' = (\hat{\Lambda}, \vec{a}) \cdot S$  se encontrará en algún estado correspondiente  $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}_e$ . Esto define un operador (unitario)  $\hat{U}(\hat{\Lambda}, \vec{a}) : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle$ .

El conjunto de dichos operadores  $\forall (\Lambda, \bar{a})$  por supuesto preservará el producto de Poincaré  $(3,1)$ , así que  $\mathcal{H}_e$  "porta" una representación de este grupo de simetrías.

Cualquier tipo de partícula daría lugar de igual modo a una rep. de Poincaré. En este curso, por tanto, estamos

utilizando esta misma conexión, pero en sentido

inverso: queremos averiguar, en completa generalidad, cuáles tipos de partículas podieran existir (en  $\mathbb{R}^{3,1}$ ),

y para ello nos proponemos responder la pregunta

matemática de cuáles son las distintas representaciones (unitarias) de Poincaré  $(3,1)$ . Enfocando el problema así,

LY: 08/02/17

el grupo de simetría aparece como ingrediente primario (y lo seguirá siendo cuando examinemos partículas con simetrías "internas" (= no espaciotemporales) como pej. el  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  del Modelo Estándar).

Por supuesto, la pregunta de cuáles tipos de partículas realmente existen en la naturaleza solo puede responderse con la ayuda de datos experimentales.

Como dijimos antes, las propias matrices  $\Lambda(\omega)$  son simplemente una representación específica de  $SO^+(3,1)$  — conocida como la representación vectorial (que actúa sobre el espacio de Minkowski). Esta representación no es unitaria, puesto que los generadores de empujes  $\tilde{J}^{(oi)}$  no son matrices hermitianas. De hecho, es un resultado matemático general que los grupos no compactos (como es el caso del grupo de Lorentz) no tienen ninguna representación unitaria (no trivial) de dimensión finita.

↗ dim infinita

Por ahora nos interesa construir representaciones unitarias de Poincaré  $(3,1)$ , puesto que son estas las que actuarán sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de un sistema de partículas en  $\mathbb{R}^{3,1}$ .

Esta construcción involucra en primer lugar la identificación de un espacio de estados  $\{|\psi\rangle\}$ , y la especificación de la manera en que los generadores de Poincaré  $\hat{J}^{\mu\nu}$ ,  $\hat{p}^\mu$  actúan sobre ellos, incorporando las relaciones de conmutación (2) y (3), y asegurándonos de que  $\hat{J}^{\mu\nu}$ ,  $\hat{p}^\mu$  sean hermitianos.

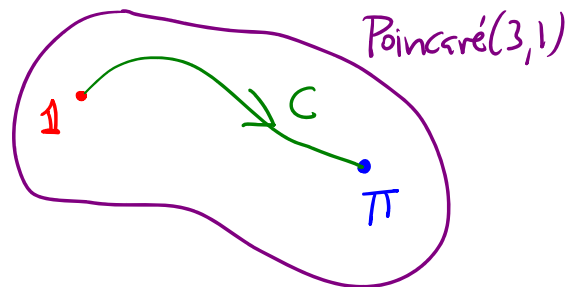


Una vez que hayamos definido  $\hat{J}^{\mu\nu}$  y  $\hat{P}^\mu$ , sabremos ya cómo se representan las transformaciones de Poincaré infinitesimales:

$$\hat{U}(\underbrace{\Lambda = \mathbb{1} + \omega}_{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}}, \bar{a} = \bar{G}) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} + i \epsilon^\mu \hat{P}_\mu$$

Para obtener  $\hat{U}(\Lambda, \bar{a})$  con  $(\Lambda, \bar{a}) \equiv \Pi$  finitos, podemos

escoger una trayectoria  $C$  en Poincaré(3,1) que conecte a la identidad con la transformación

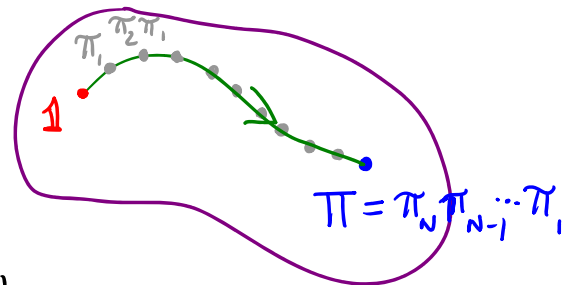


$\Pi$ , subdividiéndola en  $N$  pedacitos

(con  $N \rightarrow \infty$ ) que correspondan

a actuar sucesivamente con

transformaciones  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_N$



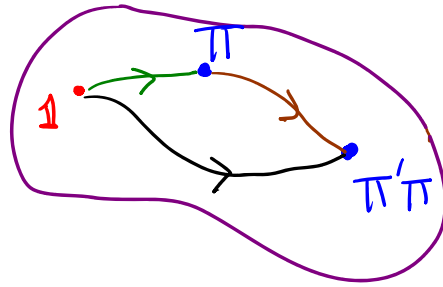
y definir

$$\hat{U}(\Pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{U}(\pi_N \pi_{N-1} \dots \pi_1) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{U}(\pi_N) \hat{U}(\pi_{N-1}) \dots \hat{U}(\pi_1)$$

Però hay una sutileza aquí: debemos preguntarnos si  $\hat{U}(\Pi)$  pudiera depender del camino  $C$  que elegimos.

Porque si fuera así, entonces no estaría garantizado que

$$\hat{U}(\pi')\hat{U}(\pi) = \hat{U}(\pi'\pi) \quad \forall \pi', \pi$$

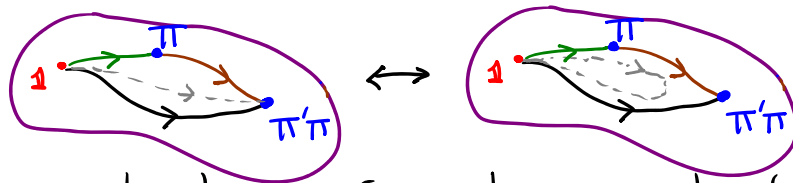


es decir, que  $\hat{U}$  sea en verdad una representación del grupo de Poincaré. Recordemos que en la p. 51 obtuvimos este requisito argumentando que, si  $|\psi'\rangle \equiv \hat{U}(\pi)|\psi\rangle$  y  $|\psi''\rangle \equiv \hat{U}(\pi')|\psi'\rangle$ , entonces el estado  $\hat{U}(\pi'\pi)|\psi\rangle$  debe coincidir con el estado  $|\psi''\rangle = \hat{U}(\pi')\hat{U}(\pi)|\psi\rangle$ . Esto sin duda se cumple si las  $\hat{U}$ 's forman una representación; pero la sutileza es que 2 distintos kets describen al mismo estado físico si difieren por una fase, así que cabe la posibilidad de que en general tengamos

$$\hat{U}(\pi')\hat{U}(\pi) = e^{i\phi(\pi',\pi)}\hat{U}(\pi'\pi), \quad (4)$$

lo cual se conoce como una representación proyectiva.

Ahora, se puede mostrar que  $\phi(\pi',\pi) = 0$  si las trayectorias  $1 \rightarrow \pi \rightarrow \pi'\pi$  y  $1 \rightarrow \pi'\pi$  se pueden deformar



continuamente una en la otra, así que la representación no podrá ser proyectiva si el grupo en cuestión es simplemente conexo (= cualquier lazo se puede encoger de manera continua hasta desaparecer). Pero el grupo de Poincaré no lo es, por culpa de su subgrupo de rotaciones  $SO(3)$ , y tiene por tanto representaciones proyectivas. La buena noticia es que  $Poincaré(3,1)$  (al igual que  $SO(3)$ ) resulta ser "doblemente conexo": existen lazos no contractibles, pero al recorrer cualquiera de ellos 2 veces se obtiene un lazo contractible (cosa que los matemáticos resumen diciendo que el "primer grupo de homotopía" de  $Poincaré(3,1)$ ,  $SO^+(3,1)$  y  $SO(3)$  es  $\mathbb{Z}_2 \equiv \{+1, -1\}$ ), y esto restringe las posibles fases a solo  $e^{i\phi} = \pm 1$ .  
 [Los detalles de toda esta historia se pueden encontrar, pe.j., en Weinberg Sec.2.7 y Apéndice B del mismo capítulo.]

¿Por qué  $SO(3)$  es doblemente conexo?

Una rotación está caracterizada por un eje  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$  (con  $|\vec{n}|=1$ ) y un ángulo  $0 \leq \theta \leq \pi$ , donde debemos

tomar en cuenta que  $(\vec{n}, 0) \simeq (\vec{n}', 0)$  y  $(\vec{n}, \pi) \simeq (-\vec{n}, \pi)$ .

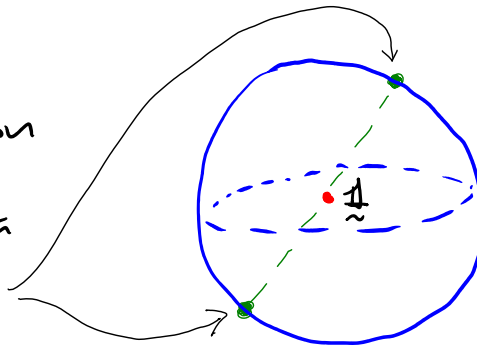
Formando la combinación  $\vec{\theta} \equiv \theta \vec{n}$ , podemos representar  $SO(3)$

como la bola 3-dimensional

$$B^3(\pi) \equiv \{ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{\theta}| \leq \pi \},$$

con puntos opuestos en la frontera

(2-esfera  $S^2$ ) identificados:

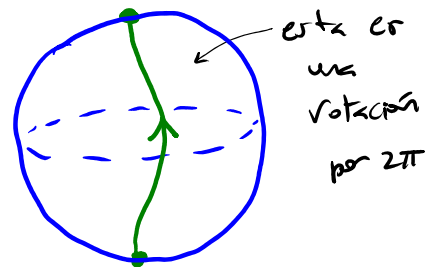


Vemos así fácilmente que un lazo que va de, peej. el polo

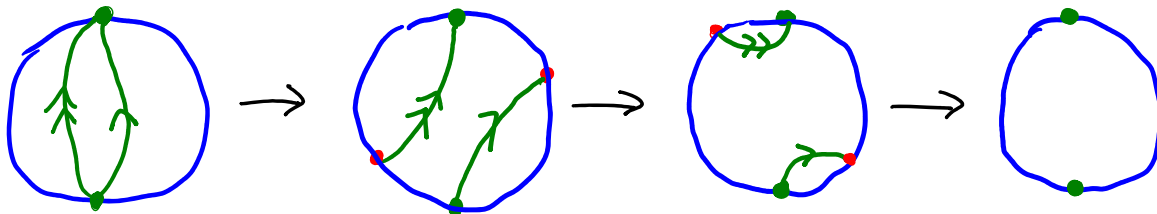
sur al polo norte No se puede encoger,

así que  $SO(3)$  efectivamente No es

simplemente conexo. Pero un lazo que



recorre 2 veces esta misma trayectoria SÍ puede encogerse:



Resulta entonces ser el caso que Poincaré(3,1) tiene

2 tipos cualitativamente distintas de representaciones:

I) Reps 'fidel', con  $\exp(i\phi) = +1$  en (4),  $\forall \pi \pi'$ .

En particular,  $\hat{U}^{(ij)}(\theta_{ij} = 2\pi) = +\hat{1} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Rep/estados con} \\ \text{"espín entero"} \end{array}$

II) Reps proyectivas, con  $\exp(i\phi) = +1$  en (4) si la trayectoria

asociada a  $\hat{U}^{-1}(\pi'\pi)\hat{U}(\pi')\hat{U}(\pi)$  es contractible,

y  $\exp(i\phi) = -1$  si no lo es.

En particular,  $\hat{U}^{(ij)}(\theta_{ij} = 2\pi) = -\hat{1} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Rep/estados con} \\ \text{"espín semientero"} \end{array}$

Notar que NO podemos formar una superposición del tipo

$|I\rangle + |II\rangle$ , porque el estado resultante no transformaría

ni como I) ni como II). Esta prohibición es un

ejemplo de lo que se conoce como una "regla de superselección".

Una manera alternativa pero equivalente de tomar

en cuenta la igualdad física  $|\psi\rangle \approx e^{i\phi}|\psi\rangle$  es afirmar

que el 'verdadero' grupo de simetría no es  $SO(3)$  ó  $SO^+(3,1)$ ,

sino su correspondiente "grupo de recubrimiento universal", o abriente (covering group)

$SU(2)$  ó  $SL(2, \mathbb{C})$ , respectivamente, que es un grupo con la mismas

álgebra de Lie ( $\leftrightarrow$  mismos generadores) pero con la distinción

de que sí es simplemente conexo, y no tiene por tanto reps proyectivas. La relación precisa entre los grupos originales y sus recubrimientos es (ver Tarea 1)

$$SO(3) = \underbrace{SU(2)}_{\substack{\text{bola de p. 5ta, SIN identificación} \\ \leftarrow \text{"clase lateral" (coset)}}} / \mathbb{Z}_2 \quad \text{y} \quad SO^+(3,1) = SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$$

$\leftarrow \{+1, -1\}$

Espacio cociente:  $G/H \equiv \{g \in G, \text{ con } g \approx gh \ \forall h \in H\}$ ,

es grupo solo si  $H$  es un subgrupo "normal" (= "invariante") de  $G$ , es decir, si  $ghg^{-1} \in H \ \forall h \in H, g \in G$

Desde esta perspectiva, tanto I) como II) describen reps fieles (= no proyectivas) del grupo de simetría, y el que en el caso II) se encuentre  $\hat{U} = -\hat{1}$  para rotaciones por  $2\pi$  es posible simplemente porque en  $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$  una rotación por  $2\pi$  no es la identidad. Nada de esto cambia las consecuencias físicas.

Regresemos ahora a la idea de construir explícitamente reps unitarias del grupo de Poincaré. Si en un cierto sistema de referencia  $S$  tenemos generadores  $\hat{P}^{\mu\nu}, \hat{J}^{\mu\nu}$  que actúan sobre

estados  $\{|\psi\rangle\}$ , entonces después de hacer una transformación infinitesimal  $\pi \equiv (\underline{\mathbb{1}} + \underline{\omega}, \bar{\epsilon})$  tenemos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\longrightarrow |\psi_\pi\rangle \equiv \hat{U}(\underline{\mathbb{1}} + \underline{\omega}, \bar{\epsilon}) |\psi\rangle \\ &= (\hat{\mathbb{1}} + i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}) |\psi\rangle \\ &= |\psi\rangle + \underbrace{(i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu})}_{\equiv |\delta\psi\rangle} |\psi\rangle, \end{aligned}$$

donde queda claro que el estado  $|\delta\psi\rangle$  producido al actuar con los generadores sobre  $|\psi\rangle$  representa el cambio  $\delta|\psi\rangle$  en el estado original bajo la transformación infinitesimal en cuestión (p.ej.  $\hat{J}^{12}|\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle$  invariante bajo  $^{(12)}\Lambda(\theta)$ ).

Si ahora contemplamos a esta misma transformación desde un nuevo sistema de referencia  $S'$ , relacionado con  $S$  a través de la transformación finita  $\Pi \equiv (\underline{\Lambda}, \bar{a})$ , tenemos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle' &\equiv \hat{U}(\Pi) |\psi\rangle \longrightarrow |\psi_\pi\rangle' \equiv \hat{U}(\Pi) |\psi_\pi\rangle \\ &= \hat{U}(\Pi) (\hat{\mathbb{1}} + i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}) |\psi\rangle \\ &= |\psi\rangle' + \underbrace{\hat{U}(\Pi) (i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu})}_{\equiv |\delta\psi'\rangle} |\psi\rangle' \end{aligned}$$

así que identificando  $|\delta\psi'\rangle \equiv (i\epsilon^\mu \hat{P}'_\mu - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \hat{J}'^{\mu\nu})|\psi'\rangle$ ,  
 donde  $\hat{P}'_\mu$  y  $\hat{J}'^{\mu\nu}$  son por definición los generadores en  $S'$   
 de las transformaciones que en  $S$  eran generadas por  
 $\hat{P}_\mu$  y  $\hat{J}^{\mu\nu}$ , respectivamente, deducimos que

$$\hat{P}'_\mu = \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) \hat{P}_\mu \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}), \quad \text{operadores transforman}$$

$$\hat{J}'^{\mu\nu} = \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) \hat{J}^{\mu\nu} \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}). \quad \text{per conjugación,}$$

como es habitual

L5: 15/08/17

Podemos calcular la primera expresión considerando que, por  
 un lado,

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) \hat{U}(\underline{\mathbb{1}}, \underline{\bar{\epsilon}}) \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) = \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) [\hat{\mathbb{1}} + i\epsilon^\mu \hat{P}'_\mu] \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$= \hat{\mathbb{1}} + i\epsilon^\mu \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) \hat{P}'_\mu \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

y por otro,

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) \hat{U}(\underline{\mathbb{1}}, \underline{\bar{\epsilon}}) \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) \stackrel{\text{pp. 46-47}}{=} \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}} + \underline{\Lambda} \underline{\bar{\epsilon}}) \hat{U}(\underline{\Lambda}^{-1}, -\underline{\Lambda}^{-1} \underline{\bar{a}})$$

$$= \hat{U}(\underline{\mathbb{1}}, \underline{\bar{a}} + \underline{\Lambda} \underline{\bar{\epsilon}} - \underline{\bar{a}})$$

$$= \hat{\mathbb{1}} + i\Lambda^\mu_\nu \epsilon^\nu \hat{P}_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dado que  $\underline{\bar{\epsilon}}$  es (infinitesimal) pero fuera de eso) arbitrario,  
 podemos igualar los coefs. de cada componente  $\epsilon^\mu$ , concluyendo que



$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{P}'_\mu \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) = \Lambda^\nu{}_\mu \hat{P}'_\nu.$$

Otra manera de obtener este resultado es tomar

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) = \exp(i a^\mu \hat{P}'_\mu) \exp(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu})$$

y calcular directamente  $\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{P}'_\mu \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a})$  usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH),

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} &= \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{A}, \hat{B}]_{(n)}, \end{aligned}$$

junto con las relaciones de conmutación (3).  $\leftarrow$  p. 48

Recordemos ahora que bajo  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  tenemos

$$(p. 33) \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu, \text{ y por lo tanto los vectores duales}$$

transforman de acuerdo con  $\omega_\mu \rightarrow \omega'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \omega_\nu$ .

El resultado que obtuvimos arriba dice entonces que  $\hat{P}'_\mu$  transforma justamente como un vector dual ( $\Rightarrow \hat{P}'^\mu$

transforma como un vector), pero en la dirección opuesta:

usa  $(\underline{\Lambda}^{-1})^{-1} = \underline{\Lambda}$  en lugar de  $\underline{\Lambda}^{-1}$ . La razón es

la convención que adoptamos: definiremos  $\hat{P}'^\mu$  a través de

$$|\delta\psi'\rangle = (i\epsilon^\mu \hat{P}'_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)) |\psi\rangle$$

p. 61

$$p. 62 \quad \underbrace{\epsilon^\mu \Lambda^\nu_\mu \hat{P}'_\nu}_{\Lambda^\nu_\mu} = \epsilon'^\nu \hat{P}'_\nu,$$

donde vemos por una parte que  $\Lambda$  aparece justo como debe para convertir  $\bar{\epsilon}$  a  $\bar{\epsilon}'$ . Pero por otra parte, queda claro también que nuestra convención es tal que  $\hat{P}^\mu$  y  $\hat{P}'^\mu$  parecen tener los nombres al revés: en esta relación es  $\hat{P}'_\mu$  y no  $\hat{P}'^\mu$  el que se contrae con  $\epsilon'^\mu$  (y viceversa).

Para ver esto con mayor claridad, tomemos el ejemplo concreto  $\epsilon^\mu = (0, \epsilon, 0, 0) \xrightarrow{\Lambda^{(01)}} \epsilon'^\mu = (-\gamma v \epsilon, \gamma \epsilon, 0, 0)$ .

Traslación en  $x^1$ 
Traslación en  $x'^1$  y  $x'^0$ 
(p. 36)

En este caso tenemos

$$\hat{P}'_1 = \Lambda^1_\nu \hat{P}'_\nu = \Lambda^1_0 \hat{P}'_0 + \Lambda^1_1 \hat{P}'_1 = -\gamma v \hat{P}'_0 + \gamma \hat{P}'_1,$$

donde se ve que, como dijimos desde un principio,  $\hat{P}'_1$

es el generador de traslaciones No a lo largo de  $x^1$ , sino a lo largo de aquello que visto desde el sistema  $S$  es  $x^1$ , pero visto desde  $S'$  es una combinación de  $x^1$  y  $x^0$ .

Y en cualquier marco,  $\hat{P}'_1$  es el generador de traslaciones en la dirección espacial 1.

$L^6 = 19/08/22$

Una de las consecuencias que más nos interesa de todo esto es que el operador  $\hat{P}^2 \equiv \hat{P} \cdot \hat{P} \equiv \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu$  es invariante bajo transformaciones de Poincaré:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{P}^2 \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) &= \eta^{\mu\nu} \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{P}_\mu \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{P}_\nu \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \\ &\stackrel{p.62}{=} \eta^{\mu\nu} \Lambda^\lambda{}_\mu \hat{P}_\lambda \Lambda^\rho{}_\nu \hat{P}_\rho \\ &= \underbrace{\Lambda^\lambda{}_\mu \eta^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu}_{(\underline{\Lambda} \underline{\eta} \underline{\Lambda}^T)^\lambda{}_\rho} \hat{P}_\lambda \hat{P}_\rho \\ &= \eta^{\lambda\rho} \hat{P}_\lambda \hat{P}_\rho \quad \text{por la condición (1), que define a } \underline{\Lambda}, \text{ p.43} \\ &= \hat{P}^2 \quad \forall (\underline{\Lambda}, \underline{a}). \end{aligned}$$

A través de BCH esto es equivalente al enunciado infinitesimal

$$\underbrace{[\hat{P}_\mu, \hat{P}^2]}_{\leftarrow p.62} = 0, \quad \underbrace{[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{P}^2]}_{\leftarrow} = 0 \quad (\Leftrightarrow \underbrace{\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{P}^2 \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a})}_{\hat{P}^2} = \hat{P}^2)$$

notar que, así como  $\hat{Y}^a |\psi\rangle \propto \delta |\psi\rangle$ , se tiene  $[\hat{Y}^a, \hat{O}] \propto \delta \hat{O}$

(relaciones que hubiéramos podido también deducir directamente a partir de los conmutadores (3)). Es decir,  $\hat{P}^2$  conmuta

con todos los generadores: es un "operador de Casimir".

[E: 10/02/17]

será útil para clasificar representaciones

De manera similar, se puede mostrar que

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) \hat{J}^{\mu\nu} \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\lambda (\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho (\hat{J}^{\lambda\rho} - a^\lambda \hat{P}^\rho + a^\rho \hat{P}^\lambda).$$

Para  $\bar{a}=0$ , esto dice que  $\hat{J}^{\mu\nu}$  transforma como un tensor de rango (2,0), nuevamente "al revés": con  $\hat{\Lambda}^{-1}$  en lugar de  $\hat{\Lambda}$ . (Recordar de la p.35 que  $\hat{\Lambda}^{-1}$  es fácil de calcular.)

El cambio de  $\hat{J}^{ij}$  debido a  $\bar{a} \neq 0$  es simplemente la redefinición usual del momento angular cuando se cambia el origen.

$$\text{Por analogía con } \hat{J}^2 \equiv (\hat{J}^1)^2 + (\hat{J}^2)^2 + (\hat{J}^3)^2 \equiv (\hat{J}^{23})^2 + (\hat{J}^{31})^2 + (\hat{J}^{12})^2$$

rotación alrededor del eje  $x^1$ 
rotación en el plano  $x^2-x^3$

operador que como sabemos es un Casimir del grupo de rotaciones  $SO(3)$  ó  $SU(2)$  (es decir,  $[\hat{J}, \hat{J}^2] = 0$ ),

podríamos suponer que la generalización obvia  $\hat{J}^{\mu\nu} \hat{J}_{\mu\nu} \equiv \hat{J}^2$  es un Casimir de Poincaré. Pero, usando la identidad

$$\boxed{[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}} \quad \forall \hat{A}, \hat{B}, \hat{C},$$

$$= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$

podemos verificar que, si bien  $\hat{J}^2$  es, como esperaríamos, invariante bajo Lorentz,

$$i(\eta^{\mu\rho}\hat{J}^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\lambda}\hat{J}^{\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda}\hat{J}^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\hat{J}^{\mu\lambda})$$

p. 43

$$\begin{aligned} [\hat{J}^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{J}^{\lambda\rho}] &= \hat{J}^{\mu\nu}[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{J}^{\lambda\rho}] + [\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{J}^{\lambda\rho}]\hat{J}_{\mu\nu} \\ &= +i\hat{J}^{\mu\nu}(\delta_{\mu}^{\rho}\hat{J}_{\nu}^{\lambda} + \delta_{\nu}^{\lambda}\hat{J}_{\mu}^{\rho} - \delta_{\mu}^{\lambda}\hat{J}_{\nu}^{\rho} - \delta_{\nu}^{\rho}\hat{J}_{\mu}^{\lambda}) \\ &\quad + i(\eta^{\mu\rho}\hat{J}^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\lambda}\hat{J}^{\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda}\hat{J}^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\hat{J}^{\mu\lambda})\hat{J}_{\mu\nu} \\ &= +i(\hat{J}^{\rho\nu}\hat{J}_{\nu}^{\lambda} + \hat{J}^{\mu\lambda}\hat{J}_{\mu}^{\rho} - \hat{J}^{\lambda\nu}\hat{J}_{\nu}^{\rho} - \hat{J}^{\mu\rho}\hat{J}_{\mu}^{\lambda}) \\ &\quad + i(\hat{J}^{\nu\lambda}\hat{J}_{\nu}^{\rho} + \hat{J}^{\mu\rho}\hat{J}_{\mu}^{\lambda} - \hat{J}^{\nu\rho}\hat{J}_{\nu}^{\lambda} - \hat{J}^{\mu\lambda}\hat{J}_{\mu}^{\rho}) \\ &\quad - \hat{J}^{\nu\lambda}\hat{J}_{\nu}^{\rho} - \hat{J}^{\rho\mu}\hat{J}_{\mu}^{\lambda} + \hat{J}^{\nu\rho}\hat{J}_{\nu}^{\lambda} + \hat{J}^{\lambda\mu}\hat{J}_{\mu}^{\rho} \\ &= 0, \quad \text{caso: } \hat{J}_{\nu}^{\rho} \neq -\hat{J}_{\rho}^{\nu} \end{aligned}$$

No es invariante bajo traslaciones,

$$i(\eta^{\nu\lambda}\hat{P}^{\mu} - \eta^{\mu\lambda}\hat{P}^{\nu})$$

p. 48

$$\begin{aligned} [\hat{J}^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{P}^{\lambda}] &= \hat{J}^{\mu\nu}[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{P}^{\lambda}] + [\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{P}^{\lambda}]\hat{J}_{\mu\nu} \\ &= i\hat{J}^{\mu\nu}(\delta_{\nu}^{\lambda}\hat{P}_{\mu} - \delta_{\mu}^{\lambda}\hat{P}_{\nu}) + i(\eta^{\nu\lambda}\hat{P}^{\mu} - \eta^{\mu\lambda}\hat{P}^{\nu})\hat{J}_{\mu\nu} \\ &= i(\hat{J}^{\mu\lambda}\hat{P}_{\mu} - \hat{J}^{\lambda\nu}\hat{P}_{\nu} + \hat{P}^{\mu}\hat{J}_{\mu}^{\lambda} - \hat{P}^{\nu}\hat{J}_{\nu}^{\lambda}) \\ &= 2i\hat{J}^{\mu\lambda}\hat{P}_{\mu} + 2i\hat{P}^{\mu}\hat{J}_{\mu}^{\lambda} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

De hecho, aparte de  $\hat{P}^2$ , la única otra combinación de los generadores que resulta ser invariante tanto bajo Lorentz como bajo traslaciones, y es por tanto el único

otro Casimir de Poincaré(3,1), es

$$\hat{\Sigma}^2 \equiv \hat{\Sigma}^\mu \hat{\Sigma}_\mu, \text{ con } \hat{\Sigma}_\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \hat{J}^{\nu\lambda} \hat{P}^\rho$$

Vector de  
Pauli-Lubanski.

tensor totalmente antisimétrico,  $\nearrow$  (de Levi-Civita)

con  $\epsilon_{0123} \equiv +1$  ( $\Rightarrow \epsilon_{1023} = -1, \epsilon_{0012} = 0, \epsilon_{1230} = -1$ , etc.)

Notar que  $\hat{\Sigma}_\mu$  es tal que  $\hat{\Sigma}_\mu \hat{P}^\mu = 0$ . cf.  $\epsilon_{123} = \epsilon_{231}$

Con una larga cuenta (Tarea 2) es posible verificar que

$$[\hat{P}_\mu, \hat{\Sigma}^2] = 0, \quad [\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{\Sigma}^2] = 0.$$

El significado físico de  $\hat{\Sigma}^2$  quedará claro más adelante — tendrá que ver con el 'espín'. (Notar que operadores como  $\hat{P}^2, \hat{\Sigma}^2, \hat{J}^2$  NO pertenecen al álgebra de Lie, sino al "álgebra universal envolvente"  $\equiv$  suma de productos arbitrarios.)

Armedos ya con toda esta información, prosigamos con nuestra búsqueda de una representación unitaria de Poincaré(3,1).

Un resultado básico de teoría de reps de grupos es que cada rep (un conjunto de matrices dado que es 'homomorfo' al grupo) puede en general descomponerse en 'subreps' que no se 'hablan' una a la otra. Es decir, es posible elegir nuestra base  $\downarrow \equiv$  representaciones

en el espacio de estados de manera tal que los operadores  $\hat{U}$  sean diagonales por bloques:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow |\psi'\rangle \equiv \hat{U} |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\hat{U}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\hat{U}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

← paquete de  $N_I$  números

↙ las componentes de  $\psi_i$  solo se mezclan entre sí

donde los  $\psi_I$  denotan estados/vectores en subespacios de dimensión  $N_I$  (con  $\sum_I N_I = \dim \mathcal{H}$ ), y los  $\hat{U}_I$

denotan matrices  $N_I \times N_I$ . Para una  $I$  dada, el

conjunto de todas las matrices  $\{\hat{U}_I\}$  constituye

lo que se conoce como una representación irreducible del grupo en cuestión. Es claro entonces que a nosotros

nos bastará con buscar reps irreducibles de Poincaré (3,1):

es lo más sencillo, y tiene sentido físico (no queremos pejer decir que el electrón y el neutrón pertenecen al mismo  $\mathcal{H}$ ).  
↙ no conectados por Poincaré

Ahora, dentro de cada rep irreducible ( $\equiv$  irrep) de un grupo,

el 'lema de Schur' afirma que cualquier operador  $\hat{C}$  que conmute con todos los generadores (y  $\therefore$  todos los elementos) del grupo

—es decir, cualquier operador de Casimir— debe ser un múltiplo de la identidad:  $\hat{C} = c \hat{1}$ . El valor de  $c$  varía en general

de una rep a otra, y sirve por tanto para clasificar a las distintas irreps. En el caso de Poincaré(3,1), hemos visto que existen 2 operadores de Casimir,  $\hat{P}^2$  y  $\hat{\Sigma}^2$ , así que las diferentes reps irreducibles se distinguen una de otra por los autovalores correspondientes, que llamaremos respectivamente  $m^2$  y  $\sigma^2$ :

$$\hat{P}^2 |\psi\rangle = m^2 |\psi\rangle, \quad \hat{\Sigma}^2 |\psi\rangle = \sigma^2 |\psi\rangle, \quad \text{con } m^2, \sigma^2 \text{ fijos } \forall |\psi\rangle \text{ en una misma irrep.}$$

↑ porque  $\hat{P}^2$  ya significa otra cosa (ver siguiente página)  
 Dentro de cada representación, podemos distinguir a los diferentes estados usando los autovalores de un conjunto completo de operadores que conmutan entre sí (y pueden por tanto diagonalizarse simultáneamente). Conviene que uno de ellos sea el generador de translaciones en el tiempo, es decir, el Hamiltoniano,  $\hat{P}^0 \equiv \hat{H}$ , porque de esta manera estaremos trabajando con estados que tienen energía definida. ↑ evolución temporal sencilla A partir de (3) podemos ver que, de los otros 9 generadores de Poincaré, ↑ p.48 solo hay 6 que conmutan con  $\hat{P}^0$ :  $\hat{P}^i$  y  $\hat{J}^{ij}$ . Lo mejor que podemos hacer entonces es diagonalizar a  $\hat{P}^1, \hat{P}^2, \hat{P}^3$  junto con  $\hat{P}^0$ :



definimos estados  $|\bar{p}, \lambda\rangle$  tales que  
 cuadrivector  $\rightarrow$  otros posibles grados de libertad, asociados a comportamiento 'interno'

$$\hat{P}^\mu |\bar{p}, \lambda\rangle = p^\mu |\bar{p}, \lambda\rangle \leftarrow \text{Estados con energía y momento espacial definidos}$$

Para estos estados, evidentemente serán nuestra base de Hilbert

$$\hat{P}^2 |\bar{p}, \lambda\rangle = p^2 |\bar{p}, \lambda\rangle = m^2 |\bar{p}, \lambda\rangle \Rightarrow p^0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

$$\boxed{p^2 = m^2}$$

relación de "capa de masa"

$\rightarrow$  autovalor de  $\hat{P}^2$  en la irrep dada

(estados con distinto valor de  $m^2$  no se mezclan entre sí bajo Poincaré)

La rep más sencilla es la trivial, donde todos los elementos del grupo de Poincaré se mapean al operador identidad. En el caso irreducible esto claramente implica que el espacio vectorial correspondiente tiene 1 solo estado, que es invariante bajo Poincaré(3,1), y que denotaremos  $|0\rangle$ :

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) |0\rangle = |0\rangle \quad \forall \underline{\Lambda}, \underline{a} \iff \hat{P}^\mu |0\rangle = 0 = \hat{J}^{\mu\nu} |0\rangle.$$

Físicamente, el estado  $|0\rangle$  describe al Vacío, es decir, un estado con cero partículas. Normalizamos  $\langle 0|0\rangle = 1$ .  
 energía, momento y momento angular = 0

El siguiente caso, en orden de complejidad, es el de estados con una partícula, donde esperaríamos tener que especificar el momento de la partícula, y a lo sumo un número finito de datos adicionales. ← operador de comportamiento para partícula con  $\vec{p}=0$

Definimos entonces al espacio de Hilbert de una partícula como aquel que constituye una rep unitaria no trivial e irreducible de Poincaré (3,1), con una base  $\{|\vec{p}, \lambda\rangle\}$  en la cual la etiqueta  $\lambda$  solo toma un número finito (y por tanto discreto) de valores (cuyo significado quedará claro más adelante: espín).

Esto contrasta con el caso de estados con más de una partícula, en los cuales es necesario especificar no solo el autovalor de  $\hat{P}^0$ , que será el momento total del sistema, sino también el (los) momento(s) relativo(s) entre las partículas, requiriendo para ello una etiqueta  $\lambda$  continua:  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots\rangle \leftrightarrow |\vec{p} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots, \underbrace{\vec{p}_1 - \vec{p}_2, \dots}_{\equiv \lambda}\rangle$

Para entender esto, primero estudiaremos en detalle los estados de 1 partícula.

Vale la pena resaltar que, de acuerdo con nuestra definición, también se considera una partícula a un conjunto específico de estados ligados relacionados bajo

Poincaré. P.ej., el estado  $2p$  del átomo de hidrógeno  
 $n \rightarrow \hat{l}=1$   
 (donde para cada valor de  $\hat{p}$  se tienen 3 estados

$|\hat{p}, l_z = +1\rangle, |\hat{p}, l_z = 0\rangle, |\hat{p}, l_z = -1\rangle$ ), exactamente igual que el protón, son partículas tanto como el electrón, aunque solo esta última es (hasta donde sabemos)

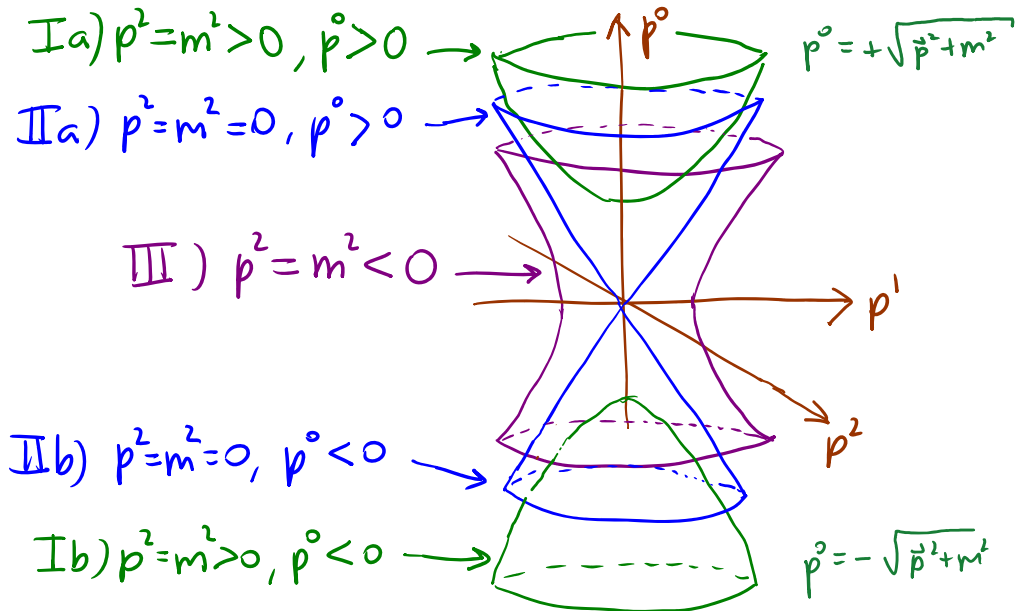
una partícula elemental, es decir, una que no está compuesta de objetos más fundamentales.

Por corresponder a una rep irreducible, una partícula está caracterizada por (en particular) valores específicos de  $m^2$  y  $\sigma^2$ . Conviene subdividir a las distintas reps (irreducibles y no triviales) en 3 categorías:

- I) Partícula Masiva:  $m^2 > 0$
- II) Partícula Sin Masa:  $m^2 = 0$
- III) Partícula Taquiónica:  $m^2 < 0$

llamante  $m^2$  al subjar de  $\hat{p}^2$  no elimina la posibilidad de que sea negativo

En términos geométricos, estos estados 'en la capa de masa' son:



donde podemos ver que en los casos I) y II), si nos restringimos a transformaciones de Lorentz ortócronas <sup>no involucran I</sup>

( $\Lambda^0_0 \geq 1$ ), el signo de  $p^0$  es también invariante de Poincaré,

de modo que tenemos los 4 subcasos Ia), Ib), IIa), IIb)

Físicamente nos interesan solo estados con energía positiva,

$p^0 > 0$ , porque los de  $p^0 < 0$  tendrían menos energía que el vacío,

sin estado base. Retenemos por ello solo los subcasos Ia) y IIa).

Por la misma razón, los estados del tipo III, donde  $p^0$  puede

hacerse arbitrariamente negativa a través de un empujón

apropiado, corresponde a una situación donde el 'vacío' es inestable (como entenderemos mejor más adelante, en el lenguaje de campos), así que de momento no nos interesa.

Consideremos ahora los casos de interés físico por separado.

LG: 17/08/18

Ia) Partícula masiva:  $\{|p^\mu, \lambda\rangle\}$  con  $p^2 = m^2 > 0, p^0 > 0$

( $\Rightarrow p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ , así que podemos escribir simplemente  $|\vec{p}, \lambda\rangle$ )

Los posibles valores de  $\lambda$  dependerán del valor de  $\sigma^2$ .

Bajo translaciones,

$$|p^\mu, \lambda\rangle \xrightarrow{(\underline{1}, \vec{a})} \underbrace{\hat{U}(\underline{1}, \vec{a})}_{\exp(i\vec{a} \cdot \hat{P}_\nu)} |p^\mu, \lambda\rangle = e^{i\vec{a} \cdot \vec{p}_\nu} |p^\mu, \lambda\rangle$$

no cambia el estado si nos movemos de un momento definido; pero importa en superposiciones

Bajo Lorentz, debemos tener  $p^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu p^\nu$ , pero, en general,

los distintos valores de  $\lambda$  pueden mezclarse:

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \vec{0}) |\vec{p}, \lambda\rangle = \sum_{\lambda'} c_{\lambda'}(\underline{\Lambda}, \vec{p}) |\underline{\Lambda}\vec{p}, \lambda'\rangle$$

Necesitamos especificar estos coeficientes

← Tiene que haber mezcla de  $\lambda$ s bajo algunas  $U$ s, porque de otro modo, rep sería reducible

i) El caso más sencillo es el de una partícula escalar

o "sin espín", donde por definición la etiqueta  $\lambda$  no existe, y no puede por tanto haber ninguna mezcla. Tenemos

entonces estados  $|p^\mu\rangle$  tales que  $\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{0})|p\rangle = |\underline{\Lambda}p\rangle$

$$\left( \stackrel{\omega \ll 1}{\Leftrightarrow} \left( \hat{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} \right) |p\rangle = \left( \hat{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \underline{J}^{(\mu\nu)} \right) \underline{p} \right).$$

Esto implica en particular que cuando la partícula está en reposo

$$\hat{U}(\stackrel{\uparrow \text{rotación}}{\underline{\Lambda}^{(ij)}}, \underline{0}) |p^\mu = (m, \underline{0})\rangle = |p^\mu = (m, \underline{0})\rangle \Leftrightarrow \hat{J}^{ij} |p^\mu = (m, \underline{0})\rangle = 0,$$

de donde podemos deducir que el vector de Pauli-Lubanski

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_\mu &\equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \hat{J}^{\nu\lambda} \hat{p}^\rho |p^\mu = (m, \underline{0})\rangle \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu ij0} \hat{J}^{ij} \hat{p}^0 |p^\mu = (m, \underline{0})\rangle = 0, \end{aligned}$$

demostrando que en esta representación el autovalor del operador de Casimir  $\hat{\Sigma}^2$  es  $\sigma^2 = 0$ .

La transformación general de Poincaré,  $\Pi = (\underline{\Lambda}, \underline{a})$ , queda representada entonces por el operador

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{a}) |p\rangle = \exp[i(\underline{\Lambda}p) \cdot \underline{a}] |\underline{\Lambda}p\rangle.$$

$$\hat{U}(\underline{1}, \underline{a}) \hat{U}(\underline{1}, \underline{0})$$

Para especificar por completo el espacio de Hilbert

de 1 partícula sin espín, solo nos falta definir el producto interno.

Este producto debe ser tal que los generadores de Poincaré sean hermitianos, que como vimos es equivalente a pedir que la rep sea unitaria. En particular,

$$\hat{P}_\mu^\dagger = \hat{P}_\mu \Rightarrow p_\mu \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \langle \vec{p}' | \hat{P}_\mu \vec{p} \rangle = \langle \hat{P}_\mu \vec{p}' | \vec{p} \rangle = p'_\mu \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle,$$

lo que a su vez implica que  $\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 0 \quad \forall \vec{p}' \neq \vec{p}$ .

Solo restaría escoger la normalización de  $\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle$ , que debe ser proporcional a  $\delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$ . Escogeremos la constante de proporcionalidad

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2 p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Combinación} \\ \text{invariante de Lorentz} \\ \text{(ver Tarea 1)} \end{array}$$

$$\uparrow \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv E_{\vec{p}}$$

Con esta convención, la relación de completitud para la base  $\{|\vec{p}\rangle\}$  adopta la forma

$$\hat{1} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|,$$

que como vimos al principio del curso <sup>pp. 12-14</sup> es equivalente a

$$\hat{1} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \quad \leftarrow \text{manifiestamente invariante de Lorentz}$$

Felizmente, este producto interno también es compatible con la hermiticidad de los generadores de Lorentz:

$$\begin{aligned}
 (\hat{J}^{\mu\nu})^\dagger = \hat{J}^{\mu\nu} &\implies \langle \vec{p}' | \hat{\Lambda} | \vec{p} \rangle = \langle \vec{p}' | \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}) | \vec{p} \rangle \\
 &= \langle \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}) \vec{p}' | \vec{p} \rangle \\
 &= \langle \hat{\Lambda}^{-1} | \vec{p}' | \vec{p} \rangle, \quad \leftarrow 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{\Lambda}^{-1} \vec{p}' - \vec{p})
 \end{aligned}$$

lo cual efectivamente es cierto, puesto que el producto interno es invariante de Lorentz. ✓

Tenemos entonces lo que buscábamos: una rep de Poincaré no trivial, irreducible y unitaria. Esta rep claramente tiene dimensión infinita (como era de esperarse, ya que Poincaré(3,1) es un grupo no compacto).

LF: 22/08/22

ii) Para las reps con  $\sigma^2 \neq 0$ , distintos valores de  $\lambda$  existen y se mezclan entre sí bajo Lorentz (si no lo hicieran, la rep sería reducible). Para determinar cómo, notemos primero que cualquier cuadrivector de momento asociado a una partícula masiva,  $p^\mu = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$ , se puede obtener a partir del cuadrivector que describiría a la



para una partícula masiva, EXISTE un marco donde está en reposo

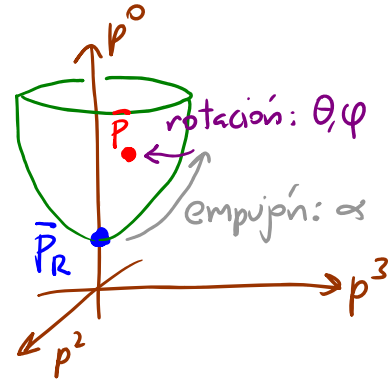
misma partícula en reposo,  $P_R^\mu \equiv (m, \vec{0})$ , a través de una cierta transformación de Lorentz:

$$P^\mu = L(\vec{p}, \vec{p}_R)^\mu \nu P_R^\nu$$

La elección de  $\underline{L}(\vec{p}, \vec{p}_R)$  no es única.

por rotaciones con eje a lo largo de  $\vec{p}$

Para ser concretos, nosotros utilizaremos



$$\underline{L}(\vec{p}, \vec{p}_R) \equiv \exp(i\varphi \underline{J}^{(21)}) \exp(i\theta \underline{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \underline{J}^{(30)}) \exp(-i\theta \underline{J}^{(13)}) \exp(-i\varphi \underline{J}^{(21)})$$

donde  $(\theta, \varphi)$  son las coordenadas angulares de  $\vec{p}$

$(\vec{p} = |\vec{p}|)(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$  y  $\alpha \equiv \cosh^{-1}\gamma$  con  $\gamma = \frac{p^0}{m}$ .

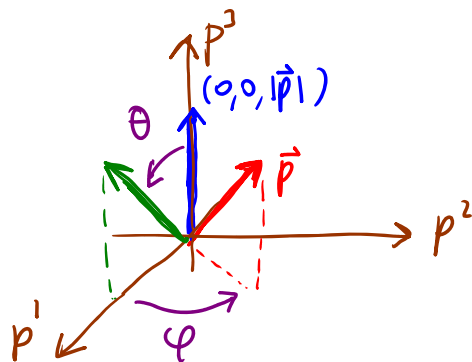
Actuando sobre  $P_R^\mu = (m, \vec{0})$ , las 2 primeras rotaciones no hacen nada (se incluyen en  $\underline{L}$  solo por conveniencia —ver más adelante).

El empujón cambia  $(m, \vec{0}) \rightarrow (\underbrace{\gamma m}_{p^0}, 0, 0, |\vec{p}|)$ ,

y las 2 últimas rotaciones orientan

finalmente la parte espacial

$$(0, 0, |\vec{p}|) \rightarrow \vec{p}.$$



Alternativamente, podemos notar que la matriz  $\underline{L}(\vec{p}) \equiv \underline{L}(\vec{p}, \vec{p}_R)$  se obtiene por conjugación a partir del empujón  ${}^{(30)} \underline{\Lambda}(\alpha) \equiv \exp(i\alpha \underline{J}^{(30)})$ , de manera tal que  $\underline{L}(\vec{p})$  es simplemente un empujón en la dirección  $\vec{p}$ .

LG: 13/02/17

Usando esta conexión, a partir de los estados en reposo  $|\vec{p}_R, \lambda\rangle$  podemos construir nuestra base completa para el espacio de Hilbert, definiendo el estado general  $q$  través de

$$|\vec{p}, \lambda\rangle \equiv \hat{U}(\underline{L}(\vec{p})) |\vec{p}_R, \lambda\rangle$$

donde, por convención, No hay mezcla de  $\lambda$ 's.  $\leftarrow$  Esto define transformación específica tal que  $\underline{L}(\vec{p})\vec{p}_R = \vec{p}$   $\leftarrow$  Este define significado de  $\lambda$  para  $\vec{p}$  arbitrario

Sobre este espacio vectorial, elegimos nuevamente el

producto interno invariante de Lorentz

$$\langle \vec{p}', \lambda' | \vec{p}, \lambda \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'}$$

$\lambda$ 's dan base ortogonal en el marco en reposo

Sabemos ya cómo actúa el operador de translaciones  $\exp(ia^\mu \hat{P}_\mu)$ , pero nos falta especificar la manera en que actúa sobre  $|\vec{p}, \lambda\rangle$  una transformación de Lorentz arbitraria. Para ello, conviene reescribir

← cambia  $\bar{p} \rightarrow \Lambda \bar{p}$  y marca  $\lambda$ s

$$\begin{aligned} \hat{U}(\Lambda) |\bar{p}, \lambda\rangle &= \hat{U}(\Lambda) \hat{U}(L(\bar{p})) |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &= \hat{U}(\Lambda L(\bar{p})) |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &= \hat{U}(L(\Lambda \bar{p})) \hat{U}(L^{-1}(\Lambda \bar{p}) \Lambda L(\bar{p})) |\bar{p}_R, \lambda\rangle, \end{aligned}$$

transformación específica  $\rightarrow$   
que lleva  $\bar{p}_R \rightarrow \Lambda \bar{p}$   $\equiv \underline{W}(\Lambda, \bar{p})$

donde hemos construido la transformación  $\underline{W}(\Lambda, \bar{p})$ , que mapea  $\bar{p}_R \rightarrow \bar{p} \rightarrow \Lambda \bar{p} \rightarrow \bar{p}_R$ . Las transformaciones que, como  $\underline{W}$ , dejan invariante a un vector de referencia  $\bar{p}_R$  ( $p_R^\mu \rightarrow W^\mu_\nu p_R^\nu = p_R^\mu$ ) forman un (sub)grupo, conocida como el 'grupito' (o 'grupo pequeño', o 'estabilizador', o 'grupo de isotropía') de  $\bar{p}_R$ , que denotaremos  $SO^+(3,1)|_{\bar{p}_R}$ .

En nuestro caso,  $\bar{p}_R = (m, \vec{0})$  y el grupito de  $\bar{p}_R$  es claramente el grupo de rotaciones:  $SO^+(3,1)|_{(m, \vec{0})} = SO(3)$ .  $\leftarrow$  mantienen al este  $\bar{p}$  en reposo  
(De hecho, obtendríamos el mismo grupito comenzando con cualquier  $\bar{p}_R$  tal que  $p_R^2 = m^2 > 0$ .)

$\underline{W}(\Lambda, \bar{p})$  se conoce como una rotación de Wigner, y gracias a nuestra definición de  $L(\bar{p})$ , se puede mostrar que

$$\underline{L}(\underline{p}_i) \equiv \exp(i\varphi \underline{J}^{(21)}) \exp(i\theta \underline{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \underline{J}^{(30)}) \exp(-i\theta \underline{J}^{(13)}) \exp(-i\varphi \underline{J}^{(21)})$$

si la propia  $\underline{\Lambda}$  es una rotación, entonces se tiene

$$\underline{W}(\underline{\Lambda}, \underline{p}) = \underline{\Lambda} \quad \forall \underline{p}. \quad \leftarrow \text{Aquí importan las rotaciones micélicas, aparentemente ociosas, en la definición de } \underline{L} \text{ (p.78)}$$

Dado que  $\underline{W}$  no cambia  $\underline{p}_R$ , el único efecto posible de  $\hat{U}(\underline{W})$  es mezclar los estados con distintos valores de  $\lambda$ :

$$\hat{U}(\underline{W}) |\underline{p}_R, \lambda\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}(\underline{W}) |\underline{p}_R, \lambda'\rangle$$

↑ Matriz de dimensión finita  
(porque  $\lambda$  toma un número finito de valores)

Podemos notar ahora que el hecho de que las matrices

$\hat{U}$  den una representación de Poincaré implica que

$$\hat{U}(\underline{W}_2) \hat{U}(\underline{W}_1) |\underline{p}_R, \lambda\rangle = \hat{U}(\underline{W}_2 \underline{W}_1) |\underline{p}_R, \lambda\rangle \quad \forall \lambda, \underline{W}_1, \underline{W}_2$$

de donde se sigue a su vez que

$$\sum_{\lambda', \lambda''} D_{\lambda''\lambda'}(\underline{W}_2) D_{\lambda'\lambda}(\underline{W}_1) |\underline{p}_R, \lambda''\rangle = \sum_{\lambda''} D_{\lambda''\lambda}(\underline{W}_2 \underline{W}_1) |\underline{p}_R, \lambda''\rangle$$

y portanto (debido que los  $\lambda$ s etiquetan una base para el espacio interno)

$$\sum_{\lambda'} D_{\lambda''\lambda'}(\underline{W}_2) D_{\lambda'\lambda}(\underline{W}_1) = D_{\lambda''\lambda}(\underline{W}_2 \underline{W}_1) \quad \forall \underline{W}_1, \underline{W}_2,$$

es decir, las matrices  $D_{\lambda'\lambda}(\underline{W})$  forman una rep del grupito,  $So(3)$  (que será projectiva si  $\hat{U}$  lo es).

Es fácil mostrar que el requisito de unitariedad para las  $\hat{U}$ 's se traduce en que las  $D$ 's también son matrices unitarias.

En resumen, para una partícula masiva, siguiendo a Wigner hemos reducido el problema de encontrar una irrep unitaria para Poincaré(3,1) al problema, mucho más sencillo, de encontrar una irrep unitaria para el grupito  $SO(3)$ . (Notemos en particular que esta última rep si podrá ser de dimensión finita, gracias a que  $SO(3)$  es compacto.)

Fisicamente: basta entender las opciones y transformaciones que tiene la partícula cuando está en reposo, para entenderlo todo.

Dada una elección de la rep de  $SO(3)$  a la cual pertenecen las  $D$ 's, habremos especificado por completo

$$\begin{aligned}\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) |\underline{\bar{p}}, \lambda\rangle &= \hat{U}(\underline{1}, \underline{\bar{a}}) \underbrace{\hat{U}(\underline{\Lambda}, 0) |\underline{\bar{p}}, \lambda\rangle}_{\hat{U}(\underline{L}(\underline{\bar{p}})) |\underline{\bar{p}}_R, \lambda\rangle} \\ &= \hat{U}(\underline{1}, \underline{\bar{a}}) \hat{U}(\underline{L}(\underline{\Lambda} \underline{\bar{p}})) \hat{U}(\underline{W}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{p}})) |\underline{\bar{p}}_R, \lambda\rangle \\ &= \hat{U}(\underline{1}, \underline{\bar{a}}) \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}(\underline{W}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{p}})) \hat{U}(\underline{L}(\underline{\Lambda} \underline{\bar{p}})) |\underline{\bar{p}}_R, \lambda'\rangle,\end{aligned}$$

es decir,

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) |\underline{\bar{p}}, \lambda\rangle = \exp[i\mathbf{a} \cdot (\underline{\Lambda} \underline{p})] \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}(\underline{W}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{p}})) |\underline{\Lambda} \underline{\bar{p}}, \lambda'\rangle.$$

Esta irrep de Poincaré (3,1) debe corresponder a un valor concreto de  $\sigma^2$ , el autovalor del Casimir  $\hat{\Sigma}^2$ .

Y, efectivamente, podemos notar que  $\leftarrow p_R^\mu = (m, \vec{0})$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^\mu |\bar{p}_R, \lambda\rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \hat{J}^{\nu\lambda} \hat{p}^\rho |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &= \frac{1}{2} \delta_\mu^i \epsilon_{ijk0} \hat{J}^{jk} \hat{p}^0 |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &\equiv -\epsilon^{ijk} \quad (\epsilon^{123} \equiv +1) \\ &= -\delta_\mu^i \underbrace{\left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \hat{J}^{jk}\right)}_{\equiv \hat{J}^i} m |\bar{p}_R, \lambda\rangle \quad \left(\text{con } \sum_{i,j,k}\right) \end{aligned}$$

$\leftarrow$  generador de rotaciones  
alrededor del eje  $i$   
p.ej.  $\hat{J}^2 \equiv \hat{J}^3$   
(2)  $\Rightarrow [\hat{J}^i, \hat{J}^j] = i \epsilon^{ijk} \hat{J}^k$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^\mu \hat{\Sigma}_\mu |\bar{p}_R, \lambda\rangle &= \eta^{\mu\sigma} \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\nu\lambda\rho} \hat{J}^{\nu\lambda} \hat{p}^\rho \left(-\delta_\mu^i \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \hat{J}^{jk}\right) m |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &= +m \frac{1}{2} \epsilon_{i\nu\lambda\rho} \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \hat{J}^{\nu\lambda} \hat{p}^\rho \hat{J}^{jk} |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &\quad \text{p.48} \quad \hat{J}^{jk} \hat{p}^\rho + i(\eta^{\rho j} \hat{p}^k - \eta^{\rho k} \hat{p}^j) \\ &= m^2 \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_{ilm0}}_{-\epsilon^{ilm}} \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \hat{J}^{lm} \hat{J}^{jk} |\bar{p}_R, \lambda\rangle \\ &= -m^2 \hat{J}^i \hat{J}^i |\bar{p}_R, \lambda\rangle \quad \left(\text{con } \sum_i\right), \end{aligned}$$

donde reconocemos a  $\hat{J}^2 \equiv \hat{J}^i \hat{J}^i = (\hat{J}^1)^2 + (\hat{J}^2)^2 + (\hat{J}^3)^2$ ,  
el operador de Casimir del grupito  $so(3)$ . Sabemos que los

posibles autovalores de  $\hat{J}^2$  son  $j(j+1)$ , con  $j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

— valores asociados a reps irreducibles de dimensión  $2j+1$  —

oí que tenemos  $\sigma^2 = -m^2 j(j+1)$ .

Es convencional llamar al entero o semientero  $j$  el espín de la partícula masiva. Físicamente, ¿qué significa entonces el espín? Es simplemente un número que codifica, por un lado, el número de estados 'internos' que tiene la partícula ( $\leftrightarrow$  valores distintos de la etiqueta discreta  $\lambda$ ), y por otro lado, la manera en que estos estados se mezclan entre sí bajo rotaciones y empujones — es decir, la forma en que la partícula 'cambia su apariencia' cuando la giramos o empujamos ( $\leftrightarrow$  cuando giramos o cambiamos de velocidad).

Una partícula con espín no es entonces solo un puntito; es un puntito con un índice  $\lambda$ . P.ej., para  $j=\frac{1}{2}$ , es como si empezáramos pensando en 2 tipos distintos de partículas SIN tal etiqueta  $\lambda$ ,

•  $|p_r\rangle_1$  y •  $|p_r\rangle_2$ ; ¡pero resulta que al girar nuestro axes un tipo se transforma <sup>solo posible por superposición cuántica</sup> progresivamente en el otro! Es entonces

más natural reinterpretar lo que tenemos como un solo tipo de partícula con 2 estados 'internos', •  $|p_r, \lambda\rangle$ .  $\lambda=1, 2$  grados de libertad discreto

Nos resta solo recordar la forma de las matrices  $D_{\lambda\lambda}$ . Dado un valor de  $j$ , sabemos que la representación tiene dimensión  $2j+1$ , y también, que podemos etiquetar a los distintos estados de la partícula en reposo usando el autovalor de uno de los generadores de  $SO(3)$ , convencionalmente  $\hat{J}^3$ . Tenemos entonces los estados

$$|\bar{p}_R, \lambda\rangle, \text{ con } \lambda \equiv j^3 = -j, -j+1, \dots, j-1, j \quad (2j+1 \text{ valores}),$$

$$\hat{J}^3 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda |\bar{p}_R, \lambda\rangle. \quad \begin{array}{l} \text{seguiremos llamando } \lambda, \text{ porque para} \\ \bar{p} \neq \bar{p}_R, \lambda \text{ no será el eigenvector de } \hat{J}^3 \end{array}$$

$$\text{Definiendo } \hat{J}^\pm \equiv \hat{J}^1 \pm i\hat{J}^2 \quad (\Rightarrow (\hat{J}^+)^\dagger = \hat{J}^-),$$

podemos verificar que  $[\hat{J}^3, \hat{J}^\pm] = \pm \hat{J}^\pm$ , lo cual implica que

$$\hat{J}^3(\hat{J}^\pm |\bar{p}_R, \lambda\rangle) = (\hat{J}^\pm \hat{J}^3 \pm \hat{J}^\pm) |\bar{p}_R, \lambda\rangle = (\lambda \pm 1)(\hat{J}^\pm |\bar{p}_R, \lambda\rangle)$$

$$\text{es decir, } \hat{J}^\pm |\bar{p}_R, \lambda\rangle = C_\pm(j, \lambda) |\bar{p}_R, \lambda \pm 1\rangle \quad (\text{con } C_\pm = 0 \text{ si } \lambda = \pm j)$$

Tomando en cuenta que  $\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}^+ \hat{J}^- + \hat{J}^- \hat{J}^+) + (\hat{J}^3)^2$ ,

podemos deducir que  $C_\pm = \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda \pm 1)}$ , es decir,

$$\hat{J}^\pm |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda \pm 1)} |\bar{p}_R, \lambda \pm 1\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{J}^1 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda+1)} |\bar{p}_R, \lambda+1\rangle + \frac{1}{2} \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda-1)} |\bar{p}_R, \lambda-1\rangle \\ \hat{J}^2 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = -\frac{i}{2} \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda+1)} |\bar{p}_R, \lambda+1\rangle + \frac{i}{2} \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda-1)} |\bar{p}_R, \lambda-1\rangle \end{cases}$$



Esto especifica las componentes de las matrices  $(2j+1) \times (2j+1)$  que en la rep de espín  $j$  corresponden a los generadores de rotaciones, matrices que denotaremos  $\vec{J}^{[j]}$  :

$$J_{\lambda\lambda}^{3[j]} = \lambda \sigma_{\lambda,\lambda}, \quad J_{\lambda,\lambda\pm 1}^{\pm[j]} = \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda \pm 1)} \sigma_{\lambda,\lambda \pm 1}$$

← número de rep  
al exponenciar  
por ser las  $D(W)$   
 $\lambda\lambda \sim$

(y que satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie  $so(3)$ ,  $[J^i[j], J^k[j]] = i \epsilon^{ijk} J^k[j]$ ).

Con ellas conocemos la forma de las matrices de rotación  $D_{\lambda\lambda}^{[j]}$  para rotaciones infinitesimales,

$$\hat{U} \left( \underbrace{\mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega_{lk} J^{(lk)}}_{\equiv +i\vec{\Theta} \cdot \vec{J}} \right) |\bar{p}_R, \lambda\rangle = (\hat{\mathbb{1}} + i\vec{\Theta} \cdot \hat{\vec{J}}) |\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$= \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}^{[j]} (\underbrace{\mathbb{1} + i\vec{\Theta} \cdot \vec{J}}_{\equiv \sigma_{\lambda,\lambda} + i\vec{\Theta} \cdot \vec{J}_{\lambda\lambda}^{[j]}}) |\bar{p}_R, \lambda'\rangle$$

define eje y ángulo de rotación  
aquí  $\theta^i \ll 1$

e, iterando, podemos deducir las  $D^{[j]}$ 's para rotaciones

finitas :

$$D_{\lambda\lambda}^{[j]} (\exp(i\vec{\Theta} \cdot \vec{J})) = (\exp(i\vec{\Theta} \cdot \vec{J}^{[j]}))_{\lambda\lambda}$$

↑  $\theta^i$  finito ↓

En particular,

$$\begin{aligned} D_{\lambda\lambda}^{[j]}({}^{(12)}\tilde{\Lambda}(\theta)) &= D_{\lambda\lambda}^{[j]}(\exp(i\theta \tilde{J}^3)) \\ &= \left[ \exp(i\theta \begin{pmatrix} j & & & 0 \\ & j-1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & -j+1 \\ & & & & -j \end{pmatrix}) \right]_{\lambda\lambda} \\ &= e^{i\theta\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

así que  $D_{\lambda\lambda}^{[j]}({}^{(12)}\tilde{\Lambda}(\theta=2\pi)) = \pm 1$  si  $\lambda$  (y  $\therefore j$ ) es entero semientero.

Es decir, las partículas con espín entero/semientero corresponden a reps no/sí proyectivas de  $SO(3)$  (y  $SO^+(3,1) \subset \text{Poincaré}(3,1)$ ), como habíamos prometido en la p. 58. Alternativamente, para todos los valores de  $j$  tenemos reps 'fieles' (no proyectivas) de los 'grupos cubrientes' de  $SO(3)$  y  $SO^+(3,1)$ , que como dijimos antes son respectivamente  $SU(2)$  y  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Habíamos estudiado ya en el inciso i) el caso de la partícula 'sin espín', es decir, con  $j=0$ , que evidentemente corresponde a la rep trivial de  $SO(3)$ :  $D^{[0]}(\underline{W}) = 1 \quad \forall \underline{W}$ .

Las reps no triviales más útiles son :

$$\bullet \boxed{J = \frac{1}{2}} \text{ (matrices } 2 \times 2) : \lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad J^{+[\frac{1}{2}]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda = -j = -\frac{1}{2}$$

$$J^{1[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{2[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{3[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{i.e., } \boxed{\vec{J}^{[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}} \quad \text{c/ } \sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

matrices de Pauli  $\uparrow$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2} \quad \checkmark$$

Notar que  $\vec{J}^{[\frac{1}{2}]}$  son, de hecho, los generadores que definen el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  : se trata de matrices complejas  $2 \times 2$  hermitianas y sin traza, que al exponenciarse dan lugar a matrices complejas  $2 \times 2$  unitarias y con determinante = 1 ( $\det(e^M) = e^{\text{Tr}(M)}$ ), es decir, elementos del grupo de Lie  $SU(2)$  :

$$D^{[\frac{1}{2}]}(\exp(i \vec{\theta} \cdot \vec{J})) = \exp\left(\frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right), \text{ y en particular,}$$

$$D^{[\frac{1}{2}]}(\underbrace{(12)}_{\sim} \Lambda(\theta)) = \exp\left(\frac{i}{2} \theta \sigma^3\right) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix},$$

$$D^{[\frac{1}{2}]}(\underbrace{(23)}_{\sim} \Lambda(\theta)) = \exp\left(\frac{i}{2} \theta \sigma^1\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$D^{[\frac{1}{2}]}(\underbrace{(31)}_{\sim} \Lambda(\theta)) = \exp\left(\frac{i}{2} \theta \sigma^2\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

}  $\in SU(2)$

•  $\boxed{j=1}$  (matrices  $3 \times 3$ ):  $\lambda = 1, 0, -1$   $\sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda+1)}$  con  $j=1, \lambda=0$

$$J^{3(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^{+1(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{-1(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^{1(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{2(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Hubiéramos esperado que estas matrices  $3 \times 3$  coincidieran con (los subbloques espaciales  $3 \times 3$  de) los generadores de rotaciones  $\underbrace{J^{(12)}}_{\sim}, \underbrace{J^{(13)}}_{\sim}, \underbrace{J^{(23)}}_{\sim}$  ← rep vectorial que habíamos deducido ya en la p. 40. Y en efecto, es posible mostrar que las matrices  $J^{i(1)}$  se convierten en las matrices  $\underbrace{J^{(kl)}}$  a través de un cierto cambio de base (ver Tarea 2).

En cualquier caso, así como sucedió con las  $J^{i(\frac{1}{2})}$ , vemos explícitamente que las  $J^{i(1)}$  son matrices hermitianas, garantizando por tanto que la correspondiente irrep de Poincaré(3,1) es unitaria.

Lo mismo es cierto para todos los valores de  $j$ .

$\underline{L8: 29/08/22}$   $\underline{L7: 20/08/18}$

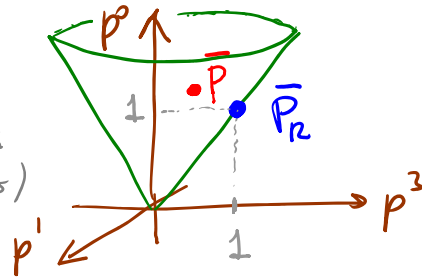
IIa) Partícula sin masa:  $\{|p^\mu, \lambda\rangle\}$  con  $p^2=0, p^0>0$  ( $\Rightarrow p^0=|\vec{p}|$ )

En este caso claramente no existe ningún marco de referencia donde la partícula esté en reposo,

pero sí podemos repetir la construcción de Wigner,

usando como vector de referencia

a, p.ej.,  $p_R^\mu = (1, 0, 0, 1) E_R$ . ← escala arbitraria (unidades)



¿Cuál sería el grupito en

este caso? Se trata de transformaciones de Lorentz

$\tilde{W}$  tales que  $W^\mu{}_\nu p_R^\nu = p_R^\mu$ . Es más fácil

pensar esto en su versión infinitesimal: queremos

$W^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$  (con  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ) tales que

$(\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) p_R^\nu = p_R^\mu + \omega^\mu{}_\nu p_R^\nu = p_R^\mu$ , es decir,

$\omega^\mu{}_\nu p_R^\nu \propto \omega^\mu{}_0 + \omega^\mu{}_3 = 0$ . ← columna 0 de  $\tilde{\omega}$   
= -columna 3 de  $\tilde{\omega}$

La posibilidad más general es entonces

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \theta & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\theta & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

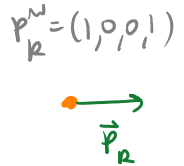
← recuerden  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$

índices  $\mu, \nu$

L7: 15/02/17

Recurriendo a nuestros resultados de la p. 40, podemos expresar esta  $\underline{\omega}$  como una combinación lineal de los  $\underline{J}^{(\mu\nu)}$ .

La transformación parametrizada por  $\theta$  es claramente una rotación en el plano 1-2, generada por  $\underline{J}^{(12)} \equiv \underline{J}^3$ .



Por otro lado,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  parametrizan un empujón y una rotación simultáneas, con generadores

$$\underline{J}^{(01)} + \underline{J}^{(13)} \equiv \underline{K}^1 - \underline{J}^2 \quad \text{y} \quad \underline{J}^{(02)} + \underline{J}^{(23)} \equiv \underline{K}^2 + \underline{J}^1,$$

empujón a lo largo de  $x^1$   $\nearrow$  rotación alrededor de eje  $x^2$   
respectivamente. Si llamamos a estos generadores

$$\underline{P}^1 \equiv \underline{K}^1 - \underline{J}^2 \quad \text{y} \quad \underline{P}^2 \equiv \underline{K}^2 + \underline{J}^1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega} = \theta \underline{J}^3 + \alpha_1 \underline{P}^1 + \alpha_2 \underline{P}^2,$$

podemos ver que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\underline{P}^1, \underline{P}^2] = [\underline{J}^{(01)}, \underline{J}^{(02)}] + [\underline{J}^{(13)}, \underline{J}^{(23)}] \stackrel{p.43}{=} -i \underline{J}^{(12)} + i \underline{J}^{(12)} = 0,$$

$$[\underline{J}^3, \underline{P}^1] = [\underline{J}^{(12)}, \underline{J}^{(01)}] + [\underline{J}^{(12)}, \underline{J}^{(13)}] = +i \underline{J}^{(02)} + i \underline{J}^{(23)} = i \underline{P}^2,$$

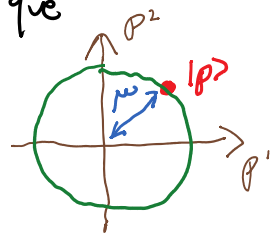
$$[\underline{J}^3, \underline{P}^2] = [\underline{J}^{(12)}, \underline{J}^{(02)}] + [\underline{J}^{(12)}, \underline{J}^{(23)}] = -i \underline{J}^{(01)} - i \underline{J}^{(13)} = -i \underline{P}^1,$$

que, como podemos ver, resultan ser idénticas a

las relaciones de conmutación de  $\hat{J}^3$ ,  $\hat{P}^1$  y  $\hat{P}^2$  (p.48).

Concluimos entonces que el grupito asociado a una partícula sin masa,  $SO^+(3,1)|_{(1,0,0,1)}$ , es una copia de ('isomorfo' a) el grupo "de Poincaré" en 2 dimensiones espaciales, que denotaremos  $Poincaré(2,0)$ . (Normalmente se le llama a este el "grupo ortogonal inhomogéneo en 2 dimensiones",  $ISO(2)$ , o el "grupo euclideo en 2 dim",  $E(2)$ .)

A través del truco de Wigner que aprendimos en el caso masivo, concluimos entonces que **para construir una rep de Poincaré(3,1) con  $m^2=0$ , basta construir una rep del grupito Poincaré(2,0)**, cosa que resulta mucho más sencilla. El único Casimir de este grupito es  $(\hat{P}^1)^2 + (\hat{P}^2)^2$ , así que las irreps que busquemos estarán etiquetadas por el eigenvalor correspondiente, que llamaremos  $\mu^2$ . Podemos trabajar con una base de eigenestados  $\{|p\rangle\}$  de  $\hat{P}^1$  y  $\hat{P}^2$ :



$$\hat{P}^a |p\rangle = p^a |p\rangle \quad (a=1,2), \quad \text{con } (p^1)^2 + (p^2)^2 = \mu^2 \quad (\Rightarrow \mu^2 \geq 0).$$

¡¡ Pero para  $\mu^2 > 0$  esta rep tiene dimensión infinita !!

La única rep que se apega a nuestra definición de partícula, donde el parámetro  $\lambda$  que etiqueta a los

distintos estados 'internos' de la partícula toma sob un número finito de valores, corresponde entonces a  $\mu^2 = 0$ .

En este caso, tenemos un solo estado,  $|p^1=0, p^2=0\rangle$ , que debe entonces ser un eigenestado del único generador restante,  $\hat{J}^3$ :  $\hat{J}^3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ .

Desde esta perspectiva,  $\lambda$  podría ser un número real arbitrario, pero vimos antes que, por el hecho de que  $SO(3) \subset SO^+(3,1) \subset \text{Poincaré}(3,1)$  es 'doblemente conexo', debemos tener en particular

$$\exp(i2\pi\hat{J}^3)|\lambda\rangle = e^{i2\pi\lambda}|\lambda\rangle = \pm|\lambda\rangle,$$

lo cual nos restringe a  $\lambda$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{entero} \\ \text{semientero} \end{array} \right.$ .

Cada valor permitido,  $\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \dots$

nos da una distinta irrep unidimensional del grupito (aunque todas estas reps comparten el mismo eigenvalor del Casimir  $\hat{P}^2: \mu^2=0$ ).  $\leftarrow$  útil

En resumen, por nuestra definición de partícula, estamos haciendo como si en el caso no masivo el grupito fuera solo  $SO(2) \subset SO(3)$ . (En  $\mathbb{R}^{D-1,1}$ , el grupito sería  $SO(D-1)$  para  $m^2 > 0$   $SO(D-2)$  para  $m^2 = 0$ .)  
 $\leftarrow$  en lugar de  $ISO(2) \equiv \text{Poincaré}(2,0)$



Para construir la deseada irrep de Poincaré(3,1) con  $m^2=0$ , nuestro punto de partida son entonces los estados

$|\bar{p}_R, \lambda\rangle$ , con  $p_R^M = (1, 0, 0, 1)E_R$  y una elección específica del valor (entero o semientero) de  $\lambda$ .

Para determinar  $\sigma^2$ , podemos notar que

$$\hat{\Sigma}_1 |\bar{p}_R, \lambda\rangle \stackrel{p.67}{=} \frac{1}{2} \epsilon_{1\nu\lambda\rho} \hat{J}^{\nu\lambda} \hat{P}^\rho |\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$= (\epsilon_{1230} \hat{J}^{23} \hat{P}^0 + \epsilon_{1023} \hat{J}^{02} \hat{P}^3) |\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$= E_R (-\hat{J}^{23} - \hat{J}^{02}) |\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$\stackrel{p.91}{=} -E_R \hat{P}^2 |\bar{p}_R, \lambda\rangle \quad \leftarrow \text{comparate 2, No } \hat{P}^2 \hat{P}^2$$

$$= 0 \quad (\text{porque todos los estados tienen } p_0=0 \Rightarrow p^0=0),$$

no confundir con  $p_2=0$

y de manera similar,

$$\hat{\Sigma}_2 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = +E_R \hat{P}^1 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = 0,$$

mientras que

$$\hat{\Sigma}_0 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \epsilon_{0123} \hat{J}^{12} \hat{P}^3 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = +E_R \lambda |\bar{p}_R, \lambda\rangle,$$

$$\text{y } \hat{\Sigma}_3 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \epsilon_{3120} \hat{J}^{12} \hat{P}^0 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = -E_R \lambda |\bar{p}_R, \lambda\rangle.$$

↑ etiqueta la rep,  
No el estado:  
 $\hat{J}^3$  es Casimir  
de  $so(2)$

En resumen, esto dice que

$$\hat{\Sigma}_m |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda p_{R\mu} |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda \hat{P}_m |\bar{p}_R, \lambda\rangle,$$

de donde se sigue que, para todas estas reps,

$$\hat{\Sigma}_m \hat{\Sigma}^m |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda^2 \hat{P}_m \hat{P}^m |\bar{p}_R, \lambda\rangle = 0, \text{ es decir, } \boxed{\sigma^2 = \lambda^2 p^2 = 0}.$$

(En cambio, para los estados  $|\bar{p}_R, p\rangle$  en una rep

con  $(p^1)^2 + (p^2)^2 = \mu^2 > 0$ , hubiéramos tenido

$$\hat{\Sigma}^m \hat{\Sigma}_m |\bar{p}_R, p\rangle = \underbrace{[(\hat{J}^3)^2 - (\hat{P}^1)^2 - (\hat{P}^2)^2 - (\hat{J}^3)^2]}_{(-\mu^2)} |\bar{p}_R, p\rangle$$

así que  $\sigma^2 = -\mu^2 < 0$ .)

Cualquier  $p^m$  tal que  $p^2 = 0, p^0 > 0$  puede obtenerse a partir de  $p_R^m$  a través de una transformación de Lorentz (no única)  $\underline{L}(p, p_R)$ , que para ser concretas podemos elegir como

$$\underline{L}(p) \equiv \exp(i\varphi \underline{J}^{(21)}) \exp(i\theta \underline{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \underline{J}^{(30)}).$$

↑  
coords angulares de  $\vec{p}$

$$\uparrow \sinh \alpha \equiv \gamma v = \frac{1}{2} \left( \frac{p^0}{E_R} - \frac{E_R}{p^0} \right)$$

$$\left( \Rightarrow \cosh \alpha \equiv \gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{p^0}{E_R} + \frac{E_R}{p^0} \right) \right).$$

↑ igual que  $p^2 < -m^2 > 0$   
(p.78); pero omitiendo primeros 2 rotaciones

Usando esta conexión podemos definir como antes

$$|\bar{p}, \lambda\rangle \equiv \hat{U}(\underline{L}(\bar{p})) |\bar{p}_R, \lambda\rangle,$$

y tendremos entonces

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}) |\bar{p}, \lambda\rangle = \hat{U}(\underline{L}(\underline{\Lambda}\bar{p})) \underbrace{\hat{U}(\underline{L}^{-1}(\underline{\Lambda}\bar{p}) \underline{\Lambda} \underline{L}(\bar{p}))}_{\equiv \underline{W}(\underline{\Lambda}, \bar{p})} |\bar{p}_R, \lambda\rangle,$$

donde por construcción  $\underline{W}(\underline{\Lambda}, \bar{p}) \in \text{SO}^+(3,1)|_{\bar{p}_R} = \text{Poincaré}(2,0)$ ,

es decir,  $\underline{W}(\underline{\Lambda}, \bar{p}) = \exp[i\theta \underline{J}^{(12)}] \exp[i\alpha_a \underline{P}^a]$

para ciertos parámetros  $\theta = \theta(\underline{\Lambda}, \bar{p})$ ,  $\alpha_a = \alpha_a(\underline{\Lambda}, \bar{p})$ ,

lo cual (debido que  $\hat{P}^a = 0$  en nuestra rep) conduce a

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}) |\bar{p}, \lambda\rangle = \hat{U}(\underline{L}(\underline{\Lambda}\bar{p})) \exp[i\theta(\underline{\Lambda}, \bar{p}) \hat{J}^3] |\bar{p}_R, \lambda\rangle.$$

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}) |\bar{p}, \lambda\rangle = e^{i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, \bar{p})} |\underline{\Lambda}\bar{p}, \lambda\rangle.$$

$$\equiv D^{\{\lambda\}}(\underline{W}(\underline{\Lambda}, \bar{p})) \leftarrow \text{'matriz' } 1 \times 1$$

Independientemente de si la partícula es masiva o no, podemos

notar que  $|\bar{p}, \lambda\rangle \equiv \hat{U}(\underline{L}(\bar{p})) |\bar{p}_R, \lambda\rangle$  no es eigenestado (con eigenvalor  $\lambda$ )

de  $\hat{J}^3$ , sino de  $\hat{J}'^3 \equiv \hat{U}(\underline{L}(\bar{p})) \hat{J}^3 \hat{U}^{-1}(\underline{L}(\bar{p}))$ , que es el operador de

momento angular NO en la dirección  $x^3$ , sino en la dirección  $x'^3$  (es decir, el generador de rotaciones en el plano  $x'^1-x'^2$ ) asociada al sistema inercial  $S'$  donde  $\vec{p}'^{\mu} \equiv \underline{L}^{-1}(\vec{p})^{\mu} p^{\nu}$  es justamente el vector de referencia  $\vec{p}_R^{\mu}$ : donde la partícula no masiva se mueve en la dirección  $x'^3$  y tiene energía  $p'^0 = E_R$ , o la partícula masiva está en reposo,  $p'^0 = m$ .

En otras palabras, para  $m^2 = 0$

$$\hat{J}^3 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \hat{\vec{J}}$$

momento angular a lo largo de esta dirección

(cf.  $m^2 > 0$ )  
 $\bullet \vec{p}_R = 0$

(resultado que verificaremos explícitamente en la Tarea 2).

Vemos entonces que, para  $m^2 = 0$ ,  $\lambda$  representa siempre la componente del momento angular en la dirección del movimiento de la partícula, cantidad física que se conoce como la helicidad de la partícula, y que a veces denotaremos  $h$ .  
→ cantidad que tiene sentido también para  $m^2 > 0$

Según acabamos de ver, para  $m^2 = 0$  la helicidad es invariante bajo el grupo de Lorentz restringido  $SO^+(3,1)$ , y es por ello que basta con considerar un valor de  $\lambda$  a la vez.

Pero la operación de paridad de hecho relaciona  $\lambda \leftrightarrow -\lambda$ .

Para entender por qué, recordemos primero que la paridad es

$$\hat{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y su implementación como simetría}$$

cuántica requiere la existencia de un operador  $\hat{U}(\hat{P}) \equiv \hat{P}$ , tal que

$$\hat{P} \hat{U}(\hat{\Lambda}, \hat{\bar{a}}) \hat{P}^{-1} = \hat{U}(\hat{P}) \hat{U}(\hat{\Lambda}, \hat{\bar{a}}) \hat{U}(\hat{P}^{-1}) = \hat{U}(\hat{P} \hat{\Lambda} \hat{P}^{-1}, \hat{P} \hat{\bar{a}})$$

$\hat{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} + i a_{\mu} \hat{P}^{\mu} + \dots$ 
 $\hat{1} - \frac{i}{2} (\hat{P} \omega \hat{P}^{-1})_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} + i (\hat{P} \bar{a})_{\rho} \hat{P}^{\rho} + \dots$

o, en versión infinitesimal,

$$\hat{P} i \hat{J}^{\mu\nu} \hat{P}^{-1} = i \hat{P}^{\lambda} \hat{P}^{\rho} \hat{J}^{\lambda\rho}, \quad \leftarrow \text{p.64}$$

$$\hat{P} i \hat{P}^{\mu} \hat{P}^{-1} = i \hat{P}^{\rho} \hat{P}^{\rho}. \quad \leftarrow \text{p.62}$$

No cancelamos la  $i$   
 Porque a priori no es  
 obvio si  $\hat{P}$  es lineal/unitario  
 o antilineal/antiunitario. p.49

La componente  $\mu=0$  de esta última ecuación dice que

$$\hat{P} i \hat{H} = i \hat{H} \hat{P}. \quad \text{Si } \hat{P} \text{ fuera } \underline{\text{antilineal}}, \text{ esto diría que}$$

$\leftarrow$  Hamiltoniano

$-\hat{P} \hat{H} = \hat{H} \hat{P}$ , y entonces dado un estado  $|\bar{p}, \lambda\rangle$  con energía positiva ( $\hat{H} |\bar{p}, \lambda\rangle = p^0 |\bar{p}, \lambda\rangle$ , con  $p^0 > 0$ ), la operación de paridad nos daría un estado  $\hat{P} |\bar{p}, \lambda\rangle$  con energía negativa:

$$\hat{H} (\hat{P} |\bar{p}, \lambda\rangle) = -\hat{P} \hat{H} |\bar{p}, \lambda\rangle = -p^0 (\hat{P} |\bar{p}, \lambda\rangle). \quad \times$$

Necesitamos entonces que  $\hat{P}$  sea lineal (y unitario).

9: 26/02/20

Si en vez de la paridad  $\underline{P}$  consideramos a la inversión temporal  $\underline{T} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , a partir de la componente  $\mu=0$  de la ecuación  $\hat{T} i \hat{P}^\mu \hat{T}^{-1} = i T^\mu_\nu \hat{P}^\nu$  podemos ver que, para conmutar con  $\hat{H}$  y así preservar la restricción a energías positivas,  $\hat{T}$  debe ser antilineal (y por tanto antiunitario), como habíamos prometido en la p. 50.

Usando la linealidad de  $\hat{P}$  para cancelar las  $i$ 's, tenemos

$$\hat{P} \hat{J} \hat{P}^{-1} = + \hat{J}, \quad \hat{P} \hat{K} \hat{P}^{-1} = - \hat{K}, \quad \hat{P} \hat{P} \hat{P}^{-1} = - \hat{P},$$

$\uparrow$  rotaciones                       $\uparrow$  empujones

donde vemos en particular que  $\hat{P}$  le cambia el signo al momento espacial pero deja al momento angular invariante, así que efectivamente invierte la helicidad

$$h = \lambda \rightarrow -\lambda.$$

En una teoría invariante bajo paridad, por cada estado  $|\bar{p}, \lambda\rangle$  con  $p^2=0, \lambda \neq 0$ , necesariamente existirá otro con la helicidad opuesta,  $|\bar{p}, -\lambda\rangle$ , y es natural considerar a ambos como

a pesar de que no podemos  
con Poincaré pasar gradualmente  
de  $|x\rangle$  a  $|-\lambda\rangle$

asociados a una misma partícula: es solo incluyéndolos  
a los 2 que obtenemos una irrep del grupo de Lorentz  
completo  $O(3,1)$ . Este es el caso, p.ej., de la  
teoría de Maxwell, donde asociada al campo  
electromagnético encontramos una partícula no masiva,  
el fotón, con estados  $|\bar{p}, \lambda=+1\rangle$  y  $|\bar{p}, \lambda=-1\rangle$ . Aquí  $\lambda$  sí  
distingue estados en misma irrep

Las interacciones débiles, en cambio, No son invariantes  
bajo paridad, y es por ello que el Modelo Estándar original  
puedo modelar al neutrino como una partícula no  
masiva y con helicidad  $\lambda=-1/2$  solamente.

Es habitual también llamar a  $|h|$  el "espín" de la partícula  
no masiva en cuestión. Pero, con base en lo que hemos visto,  
LG: 22/08/18  
debe quedar muy claro que una partícula no masiva en  
general No puede entenderse simplemente como el límite  
 $m^2 \rightarrow 0$  del caso masivo: mientras que la partícula  
con  $m^2 > 0$  y espín  $j$  posee  $2j+1$  estados internos,  
aquella con  $m^2 = 0$  y espín  $j$  tiene (a lo más) 2.

Estos números coinciden entre sí solo para  $j=0, 1/2$ .

Las partículas no masivas en espín  $j \geq 1$  son especiales.

Como veremos más adelante, su descripción estará naturalmente asociada a un cierto tipo de redundancia ('invariancia de norma' = de 'calibre' = de 'gauge').

Hemos terminado por fin con la construcción sistemática del espacio de Hilbert de los posibles tipos de partículas cuánticas relativistas. Por supuesto, los estados de una partícula que hemos considerado hasta ahora no nos interesan tanto por sí solos, sino como ingredientes básicos para construir los estados multipartículas que resultan más directamente relevantes para describir a la naturaleza.

Si tenemos un conjunto de partículas idénticas (indistinguibles), la operación de permutarlas entre sí evidentemente será una simetría, así que el espacio de Hilbert en cuestión deberá portar una rep del grupo de permutaciones. Siendo más precisos, las permutaciones expresan no una simetría, sino una redundancia, y los verdaderos estados físicos deben ser invariantes.



La posibilidad más sencilla es que al transponer 2 partículas idénticas, el estado cambie solo por una fase  $\eta$ . Claramente al hacer una misma transposición 2 veces obtenemos la identidad, así que debemos tener  $\eta = \pm 1$ . El valor de  $\eta$  se conoce como la estadística de las partículas en cuestión; aquellas que tienen  $\eta = +1$  se llaman bosones, y aquellas con  $\eta = -1$  se conocen como fermiones. Es importante resaltar que, de entrada, la estadística y el espín de una partícula son 2 conceptos totalmente independientes (aunque más adelante encontraremos que, en el contexto de la teoría cuántica de campos, están de hecho íntimamente relacionados). Conviene incorporar a  $\eta$  en nuestra notación, definiendo un ket de  $N$  partículas idénticas como automáticamente simétrico o antisimétrico bajo el intercambio de 2 de estas partículas:

Estados multiparticulares  
fijilo

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

producto directo de espacios vectoriales

$$|\bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_2, \lambda_2; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[ |\bar{p}_1, \lambda_1\rangle \otimes |\bar{p}_2, \lambda_2\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{p}_N, \lambda_N\rangle \right]$$

N partículas idénticas

← elemento de la base

+1 para bosones  
-1 para fermiones

$$+ \eta |\bar{p}_2, \lambda_2\rangle \otimes |\bar{p}_1, \lambda_1\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{p}_N, \lambda_N\rangle + \dots ]$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi} S_{\pi} |\bar{p}_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{p}_{\pi(N)}, \lambda_{\pi(N)}\rangle$$

↗ N! permutaciones

$$\pi: (1, 2, \dots, N) \rightarrow (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N))$$

$$S_{\pi} \equiv \eta^{\# \text{ de transposiciones en } \pi}$$

Así tenemos, p.ej.,  $|\bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_2, \lambda_2; \bar{p}_3, \lambda_3; \dots\rangle = \eta |\bar{p}_2, \lambda_2; \bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_3, \lambda_3; \dots\rangle$ .

Esta definición implica un producto interno  $\langle \bar{p}', \lambda' | \bar{p}, \lambda \rangle = 2p^0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda, \lambda'}$

$$\langle \bar{p}'_1, \lambda'_1; \dots; \bar{p}'_N, \lambda'_N | \bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N \rangle = \delta_{NN'} \sum_{\pi} S_{\pi} \prod_{I=1}^N (2\pi)^3 2p_I^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\pi(I)} - \vec{p}_I) \delta_{\lambda'_{\pi(I)}, \lambda_I}$$

P.ej.,

$$\langle \bar{p}'_1, \lambda'_1; \bar{p}'_2, \lambda'_2 | \bar{p}_1, \lambda_1; \bar{p}_2, \lambda_2 \rangle = (2\pi)^3 2p_1^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \delta_{\lambda'_1, \lambda_1} (2\pi)^3 2p_2^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_2, \lambda_2}$$

$$\pm (2\pi)^3 2p_1^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_2 - \vec{p}_1) \delta_{\lambda'_2, \lambda_1} (2\pi)^3 2p_2^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_1, \lambda_2}$$

LB: 17/62/17

Y también implica una regla de transformación (ver p. 82)  
Notar que el valor de  $\hat{p}^\mu$  es momento total

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) |\bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle = \exp[i a_\mu \Lambda^\mu_\nu (p_1 + \dots + p_N)^\nu] \\
\cdot \sum_{\lambda'_1, \dots, \lambda'_N} D_{\lambda'_1, \lambda_1}^{[j]}(W(\underline{\Lambda}, \bar{p}_1)) \dots D_{\lambda'_N, \lambda_N}^{[j]}(W(\underline{\Lambda}, \bar{p}_N)) \\
\cdot |\underline{\Lambda} \bar{p}_1, \lambda'_1; \underline{\Lambda} \bar{p}_2, \lambda'_2; \dots; \underline{\Lambda} \bar{p}_N, \lambda'_N\rangle,$$

es decir, cada partícula transforma por separado.

En particular, tomando  $(\underline{\Lambda}, \underline{\bar{a}}) = (\underline{1}, (-t, 0, 0, 0))$ , tenemos que  
 $\exp(-it\hat{H}) |\bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle = \exp[-it(p_1^0 + \dots + p_N^0)] |\bar{p}_1, \lambda_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N\rangle,$

es decir, nuestro estado con  $N$  partículas tiene energía total

$p^0 = p_1^0 + \dots + p_N^0$ , lo que implica que estamos hablando de partículas libres, que no se sienten una a la otra!

¿Cómo podremos entonces describir partículas interactuantes? El punto es que, si bien es cierto que en el mundo real las partículas en general no son libres, la situación experimental usual se refiere a un

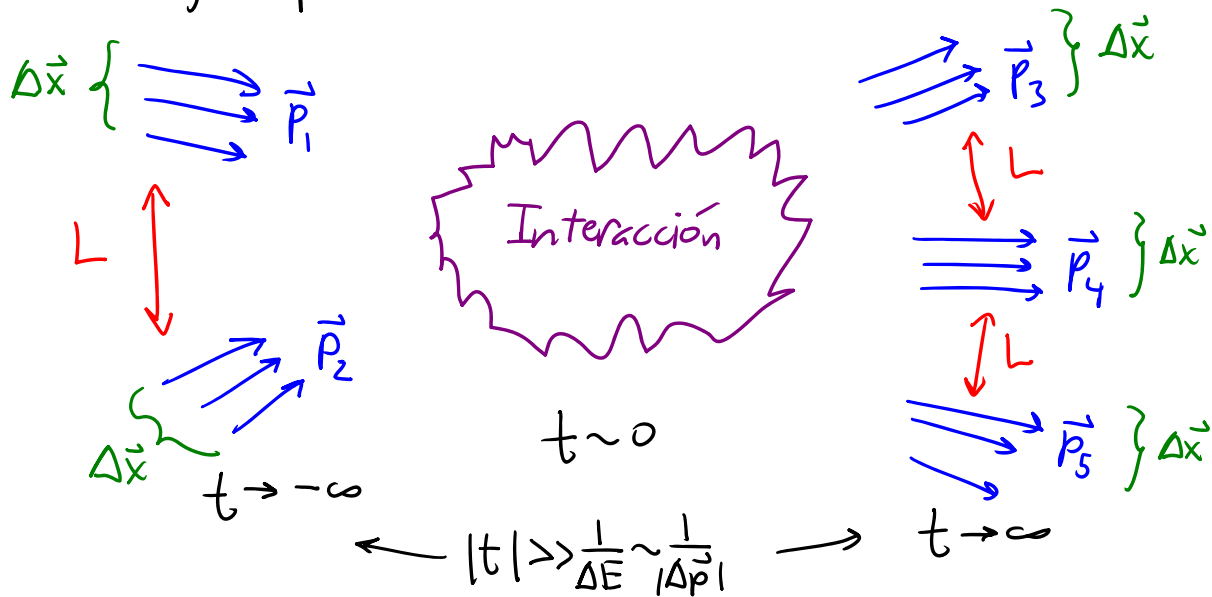
proceso de dispersión, donde un cierto número de partículas se encuentran inicialmente (en " $t \rightarrow -\infty$ ") separadas entre sí por distancias macroscópicas, luego se aproximan e interactúan (en " $t \sim 0$ "), para finalmente separarse de nuevo (cuando " $t \rightarrow +\infty$ ").



Si las interacciones entre las partículas son (al menos aproximadamente) locales, entonces disminuyen en intensidad con la distancia, así que cuando " $t \rightarrow \pm\infty$ " tenemos un estado inicial/final en el que las partículas son aproximadamente libres. Son estas partículas las que queremos describir con los estados multipartículas que recién construiremos. Esto pudiera sonar confuso, porque las partículas de las que hablamos tenían un momento  $\vec{p}$  completamente definido, y por tanto una posición  $\vec{x}$  completamente incierta, con lo cual no queda claro en qué sentido podemos separarlas unas de otras...

Lo que en realidad queremos decir es que cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  tenemos paquetes de onda de tamaño  $|\Delta\vec{x}| \sim \frac{1}{|\Delta\vec{p}|}$  <sup>prop. de incertidumbre</sup> mucho mayor que la longitud de onda asociada al momento promedio  $|\vec{p}|$  del paquete,  $\lambda_{\text{de Broglie}} \sim \frac{1}{|\vec{p}|} \ll |\Delta\vec{x}|$ ,

pero con una separación  $L$  entre paquetes que es aún mucho mayor que este tamaño:



De esta manera satisfacemos por un lado  $|\vec{p}| \gg |\Delta\vec{p}|$ , así que las partículas se pueden aproximar por ondas planas con momento definido, y por otro lado  $L \gg |\Delta\vec{x}|$ , así que las partículas se pueden considerar no interactuantes.

Esperamos que estas 2 aproximaciones serán arbitrariamente buenas si tomamos un límite donde, conforme  $t \rightarrow \pm\infty$ , tenemos  $|\Delta \vec{x}|/L \rightarrow \infty$ , con  $|\Delta \vec{x}|/L, |\Delta \vec{x}|/t \rightarrow 0$ .

Vale la pena resaltar que la existencia de este límite depende de la 'estructura asintótica' del espaciotiempo (es decir, de sus propiedades en regiones distantes): es posible tomar el límite si el espaciotiempo es plano o 'asintóticamente plano', pero no necesariamente en otros casos.

Podemos definir entonces un estado entrante / saliente

$$| \bar{p}_i, \lambda_i; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N; \pm \rangle$$

$\left. \begin{array}{l} \swarrow \text{entrante: } t \rightarrow -\infty \\ \searrow \text{saliente: } t \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$

como aquel estado en el cuadro de Heisenberg en el cual se detectarán las partículas indicadas si se realiza una medición al tiempo  $t \rightarrow \mp\infty$ . Recordemos que en el cuadro de Heisenberg los estados son independientes del tiempo, lo cual no impide que le demos a estos estados un nombre que se refiere a los autovalores de

operadores que sí dependen del tiempo (como habíamos hecho ya antes, al definir los estados  $|\bar{x}, t\rangle$ ).

En el cuadro de Heisenberg, un estado dado codifica la historia espacio-temporal completa de nuestro sistema, y es precisamente por esta razón que preferiremos trabajar en este cuadro, para tener una descripción manifiestamente covariante bajo el grupo de Poincaré.

De la mano de esto, es importante tener claro que los estados entrantes y salientes — llamados conjuntamente estados asintóticos — pertenecen a un mismo espacio de Hilbert, y difieren solo por la manera en que los estamos etiquetando. Para comparar con resultados experimentales, nuestro objetivo principal será calcular el traslate entre los estados entrantes y los salientes,

$$\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1, \dots, \bar{p}'_N \lambda'_N; - | \bar{p}_1 \lambda_1, \dots, \bar{p}_N \lambda_N; + \rangle \equiv S_{K'K}.$$

Amplitud de dispersión ó Matriz S

(No confundir con  $\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1, \dots, \bar{p}'_N \lambda'_N; + | \bar{p}_1 \lambda_1, \dots, \bar{p}_N \lambda_N; + \rangle$  }  $\stackrel{\leftarrow \text{p. 103}}{=} \delta_{N', N} \dots$  )  
 $\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1, \dots, \bar{p}'_N \lambda'_N; - | \bar{p}_1 \lambda_1, \dots, \bar{p}_N \lambda_N; - \rangle$  }

Físicamente represente la amplitud de esta transición, y es un objeto análogo al propagador  $\langle \bar{x}' | \bar{x} \rangle$  del que hablamos al principio del curso.

La suposición básica con la que trabajamos es que los estados entrantes (o, *alternativamente*, los estados salientes) forman una base del espacio de Hilbert

para el sistema interactuante — hipótesis conocida como

'completitud asintótica' ← recordar que nuestro concepto de partícula incluye estados ligados ↔ partículas compuestas

Para ser más precisos, en general tenemos por supuesto distintos tipos de partículas, y en un proceso dado, el tipo de partículas involucradas puede cambiar, por lo que necesitamos etiquetas adicionales a  $p^{\mu}$  y a  $\lambda$ .

Escribiremos  $|\bar{p}_1, \lambda_1, n_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N, n_N\rangle$ , donde podemos pensar en  $n_I$  como el nombre <sup>p.ej. electrón</sup> de la partícula número

$I$ , etiqueta que la caracteriza por completo: especifica los valores de  $m$  y  $j$  (que determina el rango de  $\lambda$ ), que como hemos visto codifican la manera en que la partícula transforma bajo el grupo de simetrías espaciotemporales,



y especifica también la manera en que la partícula cambia bajo la acción del grupo de posibles simetrías internas  $\equiv$  'rotaciones' abstractas (SIN relación con espacio-tiempo) que no cambian las probabilidades. P.ej., como veremos más adelante, la carga eléctrica  $q$  está asociada a una simetría interna  $U(1)$ :  $e^{i\theta\hat{Q}} |\bar{p}\lambda q\rangle = e^{i\theta q} |\bar{p}\lambda q\rangle$ .

↑  
'rotación' en un espacio abstracto,  
generada por  $\hat{Q}$  tal que  $[\hat{Q}, \hat{p}^\mu] = 0 = [\hat{Q}, \hat{j}^{\mu\nu}]$

Cuando el grupo de simetría interna  $G$  es no abeliano, además de un número para especificar la representación de  $G$  bajo la cual transforma la partícula, se requiere una (o más) etiqueta(s) adicional(es)  $K$  (análoga a  $\lambda$ ) para distinguir entre sí a los diferentes estados asociados.

P.ej., la interacción fuerte resulta estar asociada a un grupo  $SU(3)$  de simetría interna, y un quark transforma en la rep 'fundamental' (es decir, la rep 3-dimensional que define a  $SU(3)$ ) y tiene por tanto 3 estados internos  $K=1,2,3$  ( $\leftrightarrow$  estados  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ), que llamamos rojo, verde y azul.

$n_{\pm}$  es entonces una etiqueta que resume toda esta información.

10:29/08/22

Para no tener que preocuparnos del orden en que listamos a las partículas en nuestros estados asintóticos, conviene adoptar la convención de que el estado cambia por  $\pm 1$  si intercambiamos  $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ bosones } \text{ ó } 1 \text{ bosón y } 1 \text{ fermión} \\ 2 \text{ fermiones} \end{array} \right.$  entre sí, aunque No se trate de partículas idénticas. Notemos que, para tener verdadera completitud asintótica, debemos incluir en nuestra lista de partículas posibles cualquier cosa que pueda resultar de nuestro experimento de dispersión — es decir, no solo a las partículas supuestamente elementales, sino también a aquellas estados ligados <sup>← partículas compuestas</sup> que sean (suficientemente) estables.

Como entendimos desde el principio del curso, las interacciones pueden cambiar el número de partículas, así que en realidad el estado más general de nuestro sistema es una superposición de estados con distinto número de

partículas. Es decir, el espacio de Hilbert que nos interesa no es, p.ej.,

$$\mathcal{H}_{1 \text{ partícula específica}} \equiv \{ |\bar{p}, \lambda\rangle \forall p, \lambda \}, \text{ o ni siquiera}$$

$$\mathcal{H}_{N \text{ partículas de cualquier tipo}} \equiv \{ |\bar{p}_1, \lambda_1, n_1; \dots; \bar{p}_N, \lambda_N, n_N\rangle \forall \bar{p}_I, \lambda_I, n_I \},$$

sino la 'suma directa' ( $\equiv$  todas las superposiciones posibles)

$$\mathcal{H} \equiv \{ |0\rangle \} \oplus \{ |\bar{p}, \lambda, n\rangle \} \oplus \{ |\bar{p}_1, \lambda_1, n_1; \bar{p}_2, \lambda_2, n_2\rangle \} \oplus \dots$$

↑ vacío

↑ estado entrante o saliente

19:24/08/18 (-25 min)

conocida como espacio de Fock. Contiene, p.ej., al estado

$$\alpha_1 |\bar{p}_1, \lambda_1, n_1\rangle + \alpha_2 |\bar{p}_2, \lambda_2, n_2\rangle + \alpha_3 |\bar{p}_3, \lambda_3, n_3; \bar{p}_4, \lambda_4, n_4\rangle.$$

incierto en momento, espín, identidad y número

de partículas

Los operadores más generales que actúan sobre este espacio tendrán la posibilidad de mapear un estado con  $N$  partículas a otro con  $N' \neq N$  partículas (o a una combinación lineal que incluya a tal estado). Este será

el caso, p.ej., del operador asociado a las interacciones entre nuestras partículas, que es parte del Hamiltoniano  $\hat{H}$ .

Para poder incorporar esta posibilidad general, conviene

inventaríamos unos operadores que implementan la transición básica de  $N$  a  $N+1$  partículas: definimos

al operador de creación  $\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^{\dagger}$  a través de

$$\sqrt{2E_{\vec{p}}}\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^{\dagger}|\vec{p}_1\lambda_1n_1; \dots; \vec{p}_N\lambda_Nn_N\rangle = |\vec{p}\lambda n; \vec{p}_1\lambda_1n_1; \dots; \vec{p}_N\lambda_Nn_N\rangle.$$

por convención

"crea" (agrega al ket) partícula de tipo  $n$  con momento  $\vec{p}$  y espín  $\lambda$

Esto implica en particular que

$$|\vec{p}_1\lambda_1n_1; \dots; \vec{p}_N\lambda_Nn_N\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}}\hat{a}_{\vec{p}_1\lambda_1n_1}^{\dagger} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_N}}\hat{a}_{\vec{p}_N\lambda_Nn_N}^{\dagger}|0\rangle \quad (5)$$

siempre y cuando estipulemos que los  $\hat{a}^{\dagger}$ 's conmutan entre sí cuando al menos una de las partículas involucradas es un bosón, y anticommutan si las 2 son fermiones:

$$[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda'n'}^{\dagger}]_{\mp} = 0 \quad \text{si} \begin{cases} n \text{ ó } n' \text{ es bosón} \\ n \text{ y } n' \text{ son fermiones} \end{cases} \quad (6)$$

donde  $[\hat{A}, \hat{B}]_{-} \equiv [\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  conmutador  
 $[\hat{A}, \hat{B}]_{+} \equiv \{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  anticommutador

Determinemos ahora la manera en que actúa el conjunto hermitiano del operador de creación,

$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n} \equiv (\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger)^\dagger$ . Para identificar por completo al estado

$$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle,$$

podemos calcular su traslapo con cada uno de los elementos de la base de nuestro espacio de Fock:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle \\ &= \langle \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger | \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle \\ & \stackrel{p.113}{=} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \langle \vec{p}\lambda n; \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{p.102}{=} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{N, N+1} \sum_{\pi} (-1)^{\# \text{ de transposiciones fermiónicas}} (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_{\pi(1)}) \delta_{\lambda \lambda_{\pi(1)}} \delta_{n n_{\pi(1)}} \\ & \quad \dots (2\pi)^3 2p'_N \delta^{(3)}(\vec{p}'_N - \vec{p}_{\pi(N)}) \delta_{\lambda'_N \lambda_{\pi(N)}} \delta_{n'_N n_{\pi(N)}} \end{aligned}$$

$N!$  permutaciones  
 $\pi: (12 \dots N) \rightarrow (\pi(1) \pi(2) \dots \pi(N))$

Para no perdernos en la notación, tomemos  $N=2$ :

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{2, N+1} \left[ (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{\lambda \lambda_1} \delta_{n n_1} \underbrace{(2\pi)^3 p'_1 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_1 \lambda_2} \delta_{n'_1 n_2}}_{\langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1 | \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle} \pm p_1 \lambda_1 n_1 \leftrightarrow p_2 \lambda_2 n_2 \right] \end{aligned}$$

$N'$  debe ser = 1

Es decir,

$$\langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\vec{p} \lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{N', N} \left[ (2\pi)^3 2p^0 \overset{E_{\vec{p}}}{\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_1)} \delta_{\lambda \lambda_1} \delta_{n n_1} \langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \right. \\ \left. \pm (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_2) \delta_{\lambda \lambda_2} \delta_{n n_2} \langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1 \rangle \right].$$

Esto nos dice que

$$\hat{a}_{\vec{p} \lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{\lambda \lambda_1} \delta_{n n_1} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle \\ \pm \sqrt{2E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_2) \delta_{\lambda \lambda_2} \delta_{n n_2} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \vec{p}_2 \lambda_2 n_2 \rangle,$$

Similarmemente,

$$\langle \vec{p}'_1 \lambda'_1 n'_1; \dots; \vec{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\vec{p} \lambda n} | \vec{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \delta_{N', N+1} \sum_{\pi} S_{\pi} (-1)^{\# \text{ de transposiciones fermiónicas}} (2\pi)^3 2p^0 \overset{E_{\vec{p}}}{\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_{\pi(1)})} \delta_{\lambda \lambda_{\pi(1)}} \delta_{n n_{\pi(1)}}$$

$$\dots (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_N - \vec{p}_{\pi(N)}) \delta_{\lambda'_N \lambda_{\pi(N)}} \delta_{n'_N n_{\pi(N)}}$$

$$\pi: (1 2 \dots N) \rightarrow (\pi(1) \pi(2) \dots \pi(N))$$

$$= \sqrt{2E_{\vec{p}}} \sum_{r=1}^N (n_r)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_r) \delta_{\lambda \lambda_r} \delta_{n n_r}$$

permutaciones donde  $\pi(1)=r$

$$\delta_{N+1, N} \sum_{\pi} S_{\pi} (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 - \vec{p}_{\pi(2)}) \delta_{\lambda'_1 \lambda_{\pi(2)}} \delta_{n'_1 n_{\pi(2)}} \dots$$

$$(N-1)! \text{ permutaciones } (2 \dots N) \rightarrow (\pi(2) \dots \pi(N)), \text{ con } \pi(1) = 1, 2, \dots, N, \dots \text{ ó } N$$

Reconociendo que el segundo renglón de esta última expresión coincide con el traslapo  $\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1, \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_r \lambda_r n_r, \dots \rangle$ , tenemos

$$\langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1, \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

$$= \sqrt{2E_{\bar{p}}} \sum_{r=1}^N (\eta_r)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{nn_r}$$

$$\cdot \langle \bar{p}'_1 \lambda'_1 n'_1, \dots; \bar{p}'_N \lambda'_N n'_N | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_r \lambda_r n_r, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

Concluimos entonces que

$$\hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle = \sqrt{2E_{\bar{p}}} \sum_{r=1}^N (\eta_r)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{nn_r}$$

$$\cdot | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots; \bar{p}_r \lambda_r n_r, \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

Por esta razón,  $\hat{a}_{\bar{p}\lambda n}$  se conoce como un operador de aniquilación (elimina partícula). Notemos que esto implica

$$\hat{a}_{\bar{p}\lambda n} | 0 \rangle = 0 \quad \forall \bar{p}, \lambda, n. \quad (7)$$

Las  $\hat{a}$ 's conmutan o anticonmutan entre sí justo como las  $\hat{a}^\dagger$ 's (esto es consecuencia del  $\dagger$  de (6)). Para obtener el

L9:20/02/17

conmutador entre los  $\hat{a}$ 's y los  $\hat{a}^\dagger$ 's, comparemos

$$\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger | k_1, \dots; k_N \rangle = \hat{a}_k \frac{1}{\sqrt{2E_{k'}}} | k'; k_1, \dots; k_N \rangle$$

$\uparrow$   
 $\equiv \bar{p}\lambda n$

$$= \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{2E_{k'}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') |k_1, \dots, k_N\rangle$$

$\equiv \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'}$

$$+ \sum_{r=1}^N \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{2E_{k'}}} (\eta_n)^{f_{r+1}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_r) |k', k_1, \dots, k_r, \dots, k_N\rangle$$

$\pm 1$  si  $n$  es bosón  
# de fermiones en  $n', n_1, \dots, n_{r-1}$

vs.

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |k_1, \dots, k_N\rangle = \sum_{r=1}^N \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{2E_{k'}}} (\eta_n)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}_r) |k', k_1, \dots, k_r, \dots, k_N\rangle$$

$\leftarrow$  # de fermiones en  $n_1, \dots, n_{r-1}$

Si  $\eta_n$  y  $\eta_{n'} = \begin{matrix} ++, +-, -+ \\ -- \end{matrix}$  podemos <sup>restar</sup> <sub>sumar</sub> estas 2 ecuaciones, para concluir que

$$\left[ \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}^\dagger \right]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'}$$

(8)

(con el signo superior si  $n$  o  $n'$  es bosón inferior si  $n$  y  $n'$  es fermión).

Notemos que, debido a nuestra elección de normalización para los  $\hat{a}$ 's y  $\hat{a}^\dagger$ 's, la expresión del lado derecho en (8) no es invariante de Lorentz (aún así, la ec. (8) sí es covariante).  
 $\leftarrow$  falta factor usual de  $2E_{\vec{p}}$

Elegimos esta convención por razones históricas, para tener unas relaciones de conmutación análogas a las de los operadores 'de ascenso y descenso' del oscilador armónico:  $[\hat{x}, \hat{p}] = i \leftrightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .



(Entenderemos esta conexión en detalle más adelante, cuando hablemos de campos.)

La utilidad de los operadores de creación y aniquilación radica en primer lugar en el hecho de que las relaciones

(5)-(8) resumen toda la información relevante para construir

el espacio de Fock:  $\hat{a}_{\vec{p}\lambda n} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}, \lambda, n$  define al vacio, los estados multiparticular  $|\vec{p}_1 \lambda_1 n_1, \dots, \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle$  se obtienen actuando sobre  $|0\rangle$  con los  $\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$ , y el (anti)conmutador  $[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}^\dagger]_{\mp}$  (junto con  $[\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}'\lambda' n'}]_{\mp} = 0$ ) codifica el producto interno que convierte al espacio vectorial resultante en un espacio de Hilbert.

Además, como ya habíamos anticipado, cualquier operador  $\hat{O}$  que actúe en el espacio de Fock se puede escribir en términos de los operadores de creación y aniquilación, en la forma

$$\hat{O} = \sum_{N, N'=0}^{\infty} \int \underbrace{d^3 k'_1 \dots d^3 k'_{N'}}_{\equiv d^{3N'} K'} \underbrace{d^3 k_1 \dots d^3 k_N}_{d^{3N} K} \underbrace{O(K', K)}_{\substack{\sum_{\vec{p}_i \lambda_i n_i} \\ \sim \text{elementos de matriz} \\ \langle k'_1 \dots k'_{N'} | \hat{O} | k_1 \dots k_N \rangle}} \hat{a}_{k'_1}^\dagger \dots \hat{a}_{k'_{N'}}^\dagger \hat{a}_{k_1} \dots \hat{a}_{k_N}$$

En particular, cualquier operador definido para actuar sobre estados de 1 partícula, como p.ej.  $\hat{F}^w |\bar{p}\lambda n\rangle = p^w |\bar{p}\lambda n\rangle$ , se puede extender de manera aditiva a estados multiparticulares escribiendo

$$\hat{O} \equiv \sum_{n, \lambda', \lambda} \int \frac{d^3 p' d^3 p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \overset{\substack{\text{elemento de matriz} \\ \text{conocido (1 partícula)}}}{\hat{O}_{\bar{p}'\lambda' n}} \langle \bar{p}'\lambda' n | \hat{O} | \bar{p}\lambda n \rangle \hat{a}_{\bar{p}\lambda n}^{\dagger}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{no } n'}$

puesto que con esta definición tenemos

$$\hat{O} |\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle = \sum_{n, \lambda', \lambda} \int \frac{d^3 p' d^3 p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \hat{O}_{\bar{p}'\lambda' n} \langle \bar{p}'\lambda' n | \hat{O} | \bar{p}\lambda n \rangle$$

$$\cdot \sqrt{2E_p} \sum_{r=1}^N (\pm 1)^{f_r} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{n n_r} |\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle$$

$\uparrow$   $n_{nr}$

$$= \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \sum_{r=1}^N (\pm 1)^{f_r} |\bar{p}'\lambda' n_r; \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle \langle \bar{p}'\lambda' n_r | \hat{O} | \bar{p}_r \lambda_r n_r \rangle$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{|\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle}$

en  $n=n_r$ ,  
por  $\delta_{n n_r}$

$$= \sum_{r=1}^N \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 p_r'}{(2\pi)^3 2E_{p_r'}} |\bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}' \lambda' n_r; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N\rangle \langle \bar{p}' \lambda' n_r | \hat{O} | \bar{p}_r \lambda_r n_r \rangle$$

Pej., usando  $\langle \bar{p}' \lambda' n' | \hat{P}^\mu | \bar{p} \lambda n \rangle = p^\mu (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda}$ , esto dice que, actuando sobre el espacio de Fock, el operador de momento ( $\Leftrightarrow$  generador de traslaciones) es

$$\hat{P}^\mu = \sum_{n, \lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_p}} \underbrace{a_{\bar{p}' \lambda' n'}^\dagger \langle \bar{p}' \lambda' n' | \hat{P}^\mu | \bar{p} \lambda n \rangle}_{p^\mu (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda}} \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}$$

$$\hat{P}^\mu = \sum_{n, \lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^\mu \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}$$

$$\Rightarrow \hat{P}^\mu | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle = (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots + p_N^\mu) | \bar{p}_1 \lambda_1 n_1; \dots; \bar{p}_N \lambda_N n_N \rangle$$

Y en particular, tomando  $\mu=0$  esto dice que

$$\hat{H} = \sum_{n, \lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p} \lambda n} \quad (\Leftrightarrow \text{partículas libres}).$$

Usando la identidad  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]_{\mp} \pm [\hat{A}, \hat{C}]_{\mp} \hat{B}$ ,

es fácil ver que la combinación cuadrática que aparece aquí,

$$\hat{N}_{\bar{p} \lambda n} \equiv \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}, \quad \leftarrow \text{'operador de número' para partículas } \bar{p} \lambda n \quad \text{análogo a } \hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} \text{ de oscilador armónico}$$

satisface

$\leftarrow$  ojo: conmutador

$$[\hat{N}_{\bar{p}' \lambda' n'}, \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger] = + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{n' n} \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}^\dagger,$$

$$[\hat{N}_{\bar{p}' \lambda' n'}, \hat{a}_{\bar{p} \lambda n}] = - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p}' - \bar{p}) \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{n' n} \hat{a}_{\bar{p} \lambda n},$$

(relaciones análogas a  $[\hat{J}^3, \hat{J}^\pm] = \pm \hat{J}^\pm$ , o a

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = +\hat{a}^\dagger, [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \text{ para oscilador), y por tanto}$$

$$[\hat{N}_{\vec{p}\lambda n}, \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger] = + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$$

$$\underbrace{\hat{N}_{\vec{p}\lambda n}}_{\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_N}} \underbrace{\hat{N}_{\vec{p}\lambda n}}_{\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}_N \lambda_N n_N}^\dagger |0\rangle$$

$$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{N}_{\vec{p}\lambda n} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$$

↑ dará 0 cuando llege frente a |0>

$$= \sum_{r=1}^N (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}_r) \delta_{\lambda\lambda_r} \delta_{nn_r} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_r \lambda_r n_r, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle,$$

$N_{\vec{p}\lambda n}$  básicamente cuanta particular con estas etiquetas

así que integrando  $\sum_{n'\lambda'} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}$  tenemos

$$\sum_{n,\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{N}_{\vec{p}\lambda n} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle = \hat{N} |\vec{p}\lambda n_1, \dots; \vec{p}_N \lambda_N n_N\rangle$$

número total de partículas

$\equiv \hat{N} \leftarrow$  operador de número (total) (análogo a  $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$  para oscilador armónico)

11:53:10/08/2007

Podemos notar también que el hecho de que

$$\underbrace{\hat{U}(\Lambda, \bar{a})}_{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{U}^\dagger(\Lambda, \bar{a}) = \exp(iq_\omega \Lambda^\mu_\nu p^\nu) \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}(\Lambda, \vec{p}) \underbrace{\hat{U}^\dagger(\Lambda, \bar{a})}_{\sqrt{2E_{\Lambda\vec{p}}}} \hat{a}_{\Lambda\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{U}(\Lambda, \bar{a}) |0\rangle$$

↑ invariante

permite inferir la regla de transformación

$$\hat{U}(\Lambda, \bar{a}) \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{U}^\dagger(\Lambda, \bar{a}) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}} \exp(iq_\omega \Lambda^\mu_\nu p^\nu) \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}(\Lambda, \vec{p}) \hat{a}_{\Lambda\vec{p}\lambda n}^\dagger$$

(y su conjugado hermitiano).

En particular, tomando  $(\underline{\Lambda}, a) = (\underline{1}, (t, \vec{0}))$  esto dice que

$$\hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger(t) \equiv \exp(i\hat{H}t) \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \exp(-i\hat{H}t) = \exp(iE_{\vec{p}}t) \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger$$

$$\left( \Leftrightarrow \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}(t) \equiv \exp(i\hat{H}t) \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} \exp(-i\hat{H}t) = \exp(-iE_{\vec{p}}t) \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} \right),$$

resultado que codifica la evolución temporal de los operadores de creación/aniquilación en el cuadro de Heisenberg

(y que por supuesto es posible también obtener usando

$$\hat{H} = \sum_{n,\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda n}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda n} \quad \text{y la identidad de BCH}).$$

A partir de nuestra definición de partícula como una irrep de Poincaré(3,1), ha resultado natural hasta ahora trabajar con una descripción en el espacio de momentos. Por otro lado, las interacciones normalmente se especifican en primera instancia en el espacio de posiciones, así que nos conviene también desarrollar aquí el lenguaje correspondiente. Por simplicidad, consideremos por ahora solo el caso de una partícula escalar ( $j=0$ ), donde la etiqueta  $\lambda=0$  es innecesaria.



definidos  $\hat{a}$ 's y  $\hat{a}^\dagger$ 's para los estados entrantes o salientes, la interpretación de  $\hat{\phi}_n^\dagger(t, \vec{x})$  (y  $\hat{a}_{\vec{p}n}^\dagger(t)$ ) como operador que crea una partícula solo aplicaría si  $t \rightarrow \mp \infty$ , respectivamente.

Uo: 27/08/18

Restringiéndonos momentáneamente al caso libre, podemos verificar que los estados de 1 partícula

$$|x_n\rangle \equiv \hat{\phi}_n^\dagger(x)|0\rangle$$

tienen traslapo

$$\langle x_{n'} | x_n \rangle = \langle \hat{\phi}_{n'}^\dagger(x') | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}_n^\dagger(x) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \hat{\phi}_{n'}^\dagger(x') \hat{\phi}_n^\dagger(x) | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{2E_{p'} 2E_p} e^{-ip' \cdot x' + ip \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}'n'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}n}^\dagger | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | [\hat{a}_{\vec{p}'n'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}n}^\dagger] | 0 \rangle$$

$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{nn'}$$

↑ p. 116

$$= \delta_{nn'} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip \cdot (x' - x)},$$

amplitud que efectivamente coincide con el propagador de una partícula libre (ver p. 12). ✓   
 ↑ solo de partícula, No prop de Feynman

De la misma cuenta podemos deducir las relaciones de (anti)conmutación de nuestros operadores de campo:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{[\hat{\phi}_n(x'), \hat{\phi}_n^\dagger(x)]}_{\substack{\text{esto es un número} \\ \text{(porque } [\hat{a}_{p'n'}, \hat{a}_{p'n}^\dagger] \\ \text{es un número)}}} &= \langle 0 | [\hat{\phi}_n(x'), \hat{\phi}_n^\dagger(x)] | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \hat{\phi}_n(x') \hat{\phi}_n^\dagger(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{\phi}_n^\dagger(x) \hat{\phi}_n(x') | 0 \rangle \\
 &= \langle x'n' | x'n \rangle \\
 &= \delta_{n'n'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip \cdot (x'-x)}.
 \end{aligned}$$

Para entender mejor la manera en que este lenguaje de operadores de campo / creación / aniquilación se relaciona con el formalismo usual que aprendimos en el caso no relativista, y también para visualizar mejor el modo en que más adelante describiremos las interacciones en el caso relativista, nos conviene hacer una pausa aquí para estudiar primero el límite no relativista.



Tomemos entonces el límite donde la velocidad de la luz  $c \rightarrow \infty$ , lo cual implica que

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Para absorber la fase asociada a la (enorme) energía en reposo de la partícula, nos conviene definir (omitendo por simplicidad la etiqueta  $n$ )

$$\hat{\phi}_{NR}(t, \vec{x}) \equiv \lim_{c \rightarrow \infty} \sqrt{2mc^2} e^{imc^2 t} \hat{\phi}(x) \quad \leftarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-iE_{\vec{p}} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}^{NR} \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m}},$$

$$\leftrightarrow \hat{\phi}_{NR}^\dagger(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}^{NR}}.$$

Podemos entonces calcular

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}_{NR}(t', \vec{x}'), \hat{\phi}_{NR}^\dagger(t, \vec{x})]_{\mp} &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}' + i\vec{p} \cdot \vec{x}} [\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}]_{\mp} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \underbrace{[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}]_{\mp}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})}, \end{aligned}$$

que, como era de esperarse, coincide con el propagador de la partícula no relativista (ver p.12) :

$$\begin{aligned} \langle t', \vec{x}' | t, \vec{x} \rangle_{NR} &\equiv \langle 0 | \hat{\phi}_{NR}(t', \vec{x}') \hat{\phi}_{NR}^\dagger(t, \vec{x}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\hat{\phi}_{NR}(t', \vec{x}') \hat{\phi}_{NR}^\dagger(t, \vec{x})]_{\mp} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i \frac{\vec{p}^2}{2m}(t'-t) + i \vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \end{aligned}$$

Notemos que a tiempos iguales, esto implica que

$$[\hat{\phi}_{NR}(t, \vec{x}') \hat{\phi}_{NR}^\dagger(t, \vec{x})]_{\mp} = \langle t, \vec{x}' | t, \vec{x} \rangle_{NR} = \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Ya que la covariancia de Lorentz es irrelevante en el caso no relativista, conviene regresar al cuadro de Schrödinger (usando  $\hat{O}_S \equiv \hat{O}_H(t=0)$ ,  $|\psi, t\rangle_S \equiv e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H$ ), reemplazando

$$\hat{\phi}_{NR}(t, \vec{x}) \longrightarrow \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) \equiv \hat{\phi}_{NR}(t=0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}$$

↑ Heisenberg      ↑ Schrödinger

Sabemos que los estados

$$|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle_{NR} \equiv \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}_1) \dots \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}_N) | 0 \rangle$$

← simétrico o antisimétrico bajo el intercambio de bosones o fermiones

nos dan una base para el espacio de Hilbert de N partículas,

y podemos notar que el traslape

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N | \Psi, t \rangle \equiv \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)$$

no es otra cosa que la función de onda usual para un sistema

de  $N$  partículas. Es interesante destacar aquí que, gracias

a que los operadores de campo  $\hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}_r)$  (anti)conmutan entre sí en el caso de partículas bosónicas (fermiónicas),

esta función de onda  $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  es automáticamente

(anti)simétrica bajo el intercambio de partículas:

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) \equiv \langle \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}_1) \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}_2) \dots \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}_N) | \Psi, t \rangle = \pm \Psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$$

$\swarrow$  conmutan para bosones  
 $\searrow$  anticonmutan para fermiones

! En este lenguaje no hace ya falta considerar, p.ej., la dicha 'determinante de Slater'! Con esta razón basta

para entender por qué **el formalismo de operadores de creación/aniquilación/campo resulta útil en problemas de materia condensada (donde  $N \sim 10^{23}$ )**, aún cuando el **número de partículas no cambie**.

Notemos ahora que el operador de momento en el espacio de Fock,

$$\hat{\vec{P}} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} \quad , \quad \text{Espacial}$$

se puede reescribir en la forma

$$\hat{p} = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})}_{\int d^3 x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}}}$$

$$= \int d^3 x \underbrace{\int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger}_{\hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x})} \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}}_{\frac{1}{i} \vec{\nabla}_x \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}}$$

es decir,

$$\hat{p} = \int d^3 x \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}) \left[ -i \vec{\nabla}_x \right] \hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$$

$\leftarrow$  Actúa sobre kets con un número arbitrario  $N$  de partículas!

Forma familiar del operador de momento cuando actúa sobre funciones de onda de 1 partícula

10:22/02/17

De manera similar, el Hamiltoniano para la partícula libre

$$\hat{H} \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}^2}{2m} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int d^3 x \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}) \left[ -\frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m} \right] \hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$$

Hamiltoniano de 1 partícula libre, en espacio de momentos

Hamiltoniano de 1 partícula libre, en espacio de posiciones

Sospecharíamos entonces que, para describir a partículas que interactúan con un potencial externo  $V_1(\vec{x})$ , el Hamiltoniano en el espacio de Fock debería tomar la forma (correctamente hermitiana)

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}) \left[ -\frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m} + V_1(\vec{x}) \right] \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) \equiv \hat{H}_0 + \hat{V}_1$$

Y, efectivamente, usando los 2 resultados

$$\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{x} \Rightarrow \langle 0 | \hat{H} = \langle \hat{H}_0 | = 0$$

$$y \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]_+ \hat{C} \pm \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]_+ \Rightarrow$$

$$[\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{H}] = \int d^3x' [\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}') \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}')] ]$$

$$= \int d^3x' \left\{ \underbrace{[\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}')]_+}_{\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \text{ p.126}} \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}') \right.$$

$$\left. \pm \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}') [\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}')]_+ \right\}$$

Las derivadas salen del conmutador, por lo que derivar es simplemente restar

$$\left( -\frac{\vec{\nabla}_{x'}^2}{2m} + V_1(\vec{x}') \right) [\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}), \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}')]_+ \rightarrow 0$$

$$= \left( -\frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m} + V_1(\vec{x}) \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}),$$

podemos verificar que

deriva 0 si  
actúa a la  
izq. sobre  $\langle 0 |$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N |}_{NR} \hat{H} |\psi, t\rangle &= \langle 0 | \underbrace{\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_N) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_{N-1}) \dots \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1)}_{NR} \hat{H} |\psi, t\rangle \\
 &= \sum_{r=1}^N \langle 0 | \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_N) \dots \underbrace{\left( \hat{H} \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_r) + [\hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_r), \hat{H}] \right)}_{\left( -\frac{\vec{\nabla}_{x_r}^2}{2m} + V_1(\vec{x}_r) \right) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_r)} \dots \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}_1) |\psi, t\rangle \\
 &= \left\{ \sum_{r=1}^N \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x_r}^2}{2m} + V_1(\vec{x}_r) \right) \right\}_{NR} \underbrace{\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N |}_{\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)} |\psi, t\rangle,
 \end{aligned}$$

con lo cual vemos que

$$i\partial_t |\psi, t\rangle = \hat{H} |\psi, t\rangle \implies \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | i\partial_t |\psi, t\rangle = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \hat{H} |\psi, t\rangle$$

reproduce correctamente la ec. de Schrödinger esperada

para el sistema de  $N$  partículas,

$$i\partial_t \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = \left\{ \sum_{r=1}^N \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x_r}^2}{2m} + V_1(\vec{x}_r) \right) \right\} \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \quad \checkmark$$

¡ Logramos reproducir esto con un  
 $\hat{H}$  que NO depende de  $N$  !

De esta cuenta podemos notar que el ingrediente en el operador de interacción

$$\hat{V}_1 = \int d^3x \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}) V_1(\vec{x}) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$$

que hace que el potencial  $V_1(\vec{x})$  se escriba evaluando en las posiciones relevantes  $\vec{x} = \vec{x}_r$  ( $r=1, 2, \dots, N$ ) es el

operador de número en espacio de posición,

$$\hat{N}_{\vec{x}}^{NR} \equiv \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}},$$

crea  $\uparrow$   $\leftarrow$  aniquila

que simplemente cuenta el número de partículas localizadas

en  $\vec{x}$  (de tal manera que el operador de número total es

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \int d^3 x \hat{N}_{\vec{x}}^{NR} = \int d^3 x \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}) \\ &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})} \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}, \quad \text{como habíamos visto antes).}$$

$\swarrow$  p.120

Habiendo entendido que  $\hat{V}_1 = \int d^3 x V_1(\vec{x}) \hat{N}_{\vec{x}}^{NR}$ , resulta natural

conjeturar que la generalización al caso de interacciones entre pares

de partículas descritas por un potencial  $V_2(\vec{x}, \vec{x}')$  involucrará

la adición al operador hamiltoniano de un término del tipo

$\swarrow$  para no contar doble

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 &\sim \frac{1}{2} \int d^3 x' \int d^3 x V_2(\vec{x}', \vec{x}) \hat{N}_{\vec{x}'}^{NR} \hat{N}_{\vec{x}}^{NR} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 x' \int d^3 x \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}') \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}') V_2(\vec{x}', \vec{x}) \hat{\phi}_{NR}^{\dagger}(\vec{x}) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x}). \end{aligned}$$

$$\hat{V}_2 \sim \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$$

Esto resulta ser esencialmente correcto, salvo por el hecho de que, con los operadores de campo escritos en el orden indicado,  $\hat{V}_2$  podría dar una contribución distinta de cero al actuar sobre un estado con solo una partícula.

Para evitar esto, debemos colocar los 2  $\hat{\phi}$ 's a la derecha.

La condición de hermiticidad  $\hat{V}_2^\dagger = \hat{V}_2$  requiere entonces

que definamos

$$\hat{V}_2 \equiv \int d^3x' \int d^3x V_2(\vec{x}', \vec{x}) \underbrace{\phi_{NR}^\dagger(\vec{x}') \phi_{NR}^\dagger(\vec{x}) \phi_{NR}(\vec{x}) \phi_{NR}(\vec{x}')}_{\hat{N}_{\vec{x}', \vec{x}}^{NR} \leftarrow \text{operador que cuenta el número de pares en } (\vec{x}', \vec{x})}$$

De manera similar a como argumentamos antes, se puede mostrar que tomando  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_2$  se reproduce correctamente la ec. de Schrödinger

$$i\partial_t \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = \left[ \sum_{r=1}^N \left( -\frac{\vec{\nabla}_{x_r}^2}{2m} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_s) \right] \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t).$$

Claramente, con esta misma lógica podemos agregar igualmente interacciones entre 3 o más partículas, definiendo  $\hat{V}_3, \hat{V}_4, \dots$



Con todo esto nos debe quedar claro que todo lo que aprendimos en mecánica cuántica no relativista se puede reformular fácilmente (y útilmente) en el lenguaje de operadores de campo que estamos desarrollando en este curso — lenguaje que, por razones históricas, se denomina ocasionalmente 'segunda cuantización'. <sup>← ¡peísimo nombre!</sup> Esto es así aún cuando el Hamiltoniano en cuestión no induce transiciones entre estados con distintos números de partículas, y sea posible por tanto, dentro del espacio de Fock, restringir consistentemente nuestra atención al subespacio con  $N$  partículas, para un  $N$  dado.

Regresemos ahora al caso relativista (y al cuadro de Heisenberg). Una diferencia importante es que ahora (p.124)

$$[\hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}'), \hat{\phi}(t, \vec{x})]_{\mp} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \neq \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})$$

↑ tiempos iguales ↑

y, relacionado con esto, no podemos ya identificar a

$\hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x})$  como el operador de número en el espacio de posición,  $\hat{N}_{t, \vec{x}}$ , puesto que

$$\begin{aligned} \int d^3x \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}} \sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{i(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}})t} \underbrace{\int d^3x e^{i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}}{2E_{\vec{p}}} \quad \leftarrow \text{se reduce a una cte. en el caso NR} \\ &\neq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \equiv \hat{N}. \quad (p.120) \end{aligned}$$

El factor de  $2E_{\vec{p}}$  que nos estorbó aquí puede ser eliminado diferenciando el operador de campo:

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow i\partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}},$$

de modo que

$$\int d^3x \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) i\partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{2}} e^{i(E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}})t} \underbrace{\int d^3x e^{i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$$

$$\int \mathcal{D}^3x \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) i \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{D}^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}_\vec{p}^\dagger \hat{a}_\vec{p} = \frac{1}{2} \hat{N}.$$

Se obtiene el mismo resultado al integrar  $-i \partial_t \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x})$ , así que la combinación hermitiana

$$\hat{N}_{t\vec{x}} \equiv i \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) - i \partial_t \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x})$$

satisface  $\int \mathcal{D}^3x \hat{N}_{t\vec{x}} = \hat{N}$ , y da la impresión de

jugar el papel de operador de número en el espacio de posiciones. Por analogía con el caso no relativista, parecería lógico entonces usar a  $\hat{N}_{t\vec{x}}$  para agregar interacciones.

Es decir, al Hamiltoniano libre (para espín  $j=0$ )

$$\hat{H}_0 = \int \frac{\mathcal{D}^3p}{(2\pi)^3} E_\vec{p} \hat{a}_\vec{p}^\dagger \hat{a}_\vec{p}$$

querriamos agregar p.ej. una interacción en un potencial externo  $V_1(\vec{x})$ ,

$$\hat{V}_1 = \int \mathcal{D}^3x V_1(\vec{x}) \hat{N}_{t\vec{x}},$$

o entre pares de partículas,

$$\hat{V}_2 \sim \frac{1}{2} \int \int^3 x \int^3 x' \hat{N}_{t\vec{x}} V_2(\vec{x}, \vec{x}') \hat{N}_{t\vec{x}'} .$$

Pero, al menos en este segundo caso, hay un problema:

la noción de un 'potencial' que actúa simultáneamente a distancia claramente está en conflicto con la relatividad especial. Para identificar este problema de manera más

cuantitativa, notemos que la densidad de energía en  $\vec{x}$  al

tiempo  $t$ , que corresponde a un operador  $\hat{H}(t, \vec{x})$  definido por

$$\hat{H} \equiv \int \int^3 x \hat{H}(t, \vec{x}) \stackrel{?}{=} \hat{H}_0 + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \dots ,$$

es una observable. El problema que nos ocupa radica

en que, por causalidad, 2 mediciones separadas entre

sí por un intervalo tipo espacio (que serían vistas como

simultáneas en algún marco de referencia) NO pueden

interferir entre sí. Es decir, debemos exigir que

$$[\hat{H}(t, \vec{x}), \hat{H}(t', \vec{x}')] = 0 \quad \text{si } (\vec{x}' - \vec{x})^2 < 0 . \quad (9)$$

Estos 2 operadores serán entonces simultáneamente diagonalizables (sus autoestados son compartidos), lo cual garantiza que la medición de uno NO afecta el resultado para el otro.

(Como veremos más adelante, esta condición resulta ser necesaria también para que la matriz  $S$  sea covariante bajo Lorentz.)

Y desafortunadamente, en el caso relativista

$$\vec{H} \equiv i\hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) - i\partial_t \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x})$$

$$[\hat{N}_{t\vec{x}}, \hat{N}_{t\vec{x}'}] \neq 0 \quad \text{aún cuando } (\vec{x}' - \vec{x})^2 < 0.$$

(En cualquier caso,  $\hat{N}_{t\vec{x}}$  no era exactamente análogo al operador de número no relativista  $\hat{N}_{\vec{x}}^{NR} \equiv \hat{\phi}_{NR}^\dagger(\vec{x}) \hat{\phi}_{NR}(\vec{x})$ , puesto que  $[\hat{N}_{t\vec{x}}, \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}', t)] \neq +\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t)$ .)

El problema básico es que, como vimos en la p. 133,

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}^\dagger(t, \vec{x}')]_{\mp} \neq 0 \quad \text{aún si } \vec{x} \neq \vec{x}',$$

resultado que codifica el hecho de que, como vimos al principio del curso, las partículas cuánticas relativistas pueden viajar más rápido que la luz.

Usando a los operadores de campo  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\phi}^\dagger$  como ingredientes básicos, claramente no es trivial entonces construir un operador de densidad de energía  $\hat{H}(t, \vec{x})$  que respete

La condición de causalidad (9).

Felizmente, se conoce una solución a este problema: usando los operadores  $\hat{\phi}_n(x)$  y  $\hat{\phi}_n^\dagger(x')$ , es posible armar un nuevo operador de campo  $\hat{\phi}(x)$  que sí (anti)conmuta con su conjugado hermitiano  $\hat{\phi}^\dagger(x')$  en intervalos tipo espacio. Para verificar esto de manera explícita, probemos

con la combinación lineal

$$\hat{\phi}_n(x) \equiv \alpha \hat{\phi}_n(x) + \beta \hat{\phi}_{\tilde{n}}^\dagger(x),$$

$$\leftrightarrow \hat{\phi}_n^\dagger(x) \equiv \alpha^* \hat{\phi}_n^\dagger(x) + \beta^* \hat{\phi}_{\tilde{n}}(x).$$

↖ "brazo"  
posiblemente  $\tilde{n} \neq n$ , en cuyo caso  $\tilde{n}$  sería una partícula emparentada de algún modo con  $n$

(Claramente habiéramos podido también llamar  $\hat{\phi}_{\tilde{n}}^\dagger(x)$  y  $\hat{\phi}_{\tilde{n}}(x)$  a estos operadores, respectivamente.)

Tenemos entonces (suponiendo por el momento que  $n \neq \tilde{n}$ )

$$[\hat{\phi}_n(t, \vec{x}), \hat{\phi}_n^\dagger(t, \vec{x}')]_{\mp} = |\alpha|^2 [\hat{\phi}_n(t, \vec{x}), \hat{\phi}_n^\dagger(t, \vec{x}')]_{\mp} + |\beta|^2 [\hat{\phi}_{\tilde{n}}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\phi}_{\tilde{n}}(t, \vec{x}')]_{\mp}$$

para cualquier intervalo tipo espacio, podemos calcular en modo ordenado en simultáneos

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m_n^2}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \quad \int_{\mp} [\hat{\phi}_{\tilde{n}}^\dagger(t, \vec{x}'), \hat{\phi}_{\tilde{n}}(t, \vec{x})]$$

(p.124)

es decir,

$$[\hat{\varphi}_n(t, \vec{x}), \hat{\varphi}_n^\dagger(t, \vec{x}')]_{\mp} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{|\alpha|^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m_n^2}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \mp \frac{|\beta|^2}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m_n^2}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{par} \rightarrow \cos(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \quad \cos(\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})) \\ \text{impar} \rightarrow +i \sin(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \quad +i \sin(\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})) \end{array}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\cos(\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}{2} \left( \frac{|\alpha|^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_n^2}} \mp \frac{|\beta|^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_n^2}} \right)$$

$$= 0 \text{ si y solo si } \begin{cases} |\alpha|^2 = |\beta|^2 \\ m_n = m_{\bar{n}} \\ n \text{ y } \bar{n} \text{ son bosones} \end{cases} \begin{array}{l} \swarrow \text{solo posible} \\ \text{si existen} \\ \searrow \text{tal vez particular} \end{array}$$

Para partículas de espín  $j=0$ , hemos logrado entonces construir los **nuevos operadores de campo** (normalizando  $\alpha=1=\beta$ )

$$\hat{\varphi}_n(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}n}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}n} + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}\bar{n}}^\dagger \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}n} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m_n^2}}$$

$$\hat{\varphi}_n^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}n}}} \left( e^{ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}n}^\dagger + e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}\bar{n}} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}n}}$$

que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}_n(x), \hat{\varphi}_n(x')] = 0 = [\hat{\varphi}_n^\dagger(x), \hat{\varphi}_n^\dagger(x')] \quad \forall x, x'$$

$$[\hat{\varphi}_n(x), \hat{\varphi}_n^\dagger(x')] = 0 \quad \forall (x'-x)^2 < 0$$

Condición de  
Microcausalidad

LI: 29/02/18    LI: 24/02/17

Usando este campo como elemento básico, la densidad Hamiltoniana puede ser cualquier función (hermitiana)

$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}^\dagger(x))$ , y automáticamente satisfará

la condición de causalidad (9), asegurando en ello que las densidades de energía en  $x$  y  $x'$  se puedan medir de manera independiente si  $(x'-x)^2 < 0$ . ✓

Ejemplos posibles serían  $\hat{\mathcal{H}}(x) = \hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x)$  ó  $\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}^\dagger(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)$ .

Otro ejemplo es el Hamiltoniano libre que ya conocíamos,

$$\hat{H}_0 \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}n}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}n} + \hat{a}_{\vec{p}\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\bar{n}})$$

que (salvo una constante) se puede expresar en términos de  $\hat{\varphi}_n(x)$  y  $\hat{\varphi}_n^\dagger(x)$  en la forma



$$\hat{H}_0 = \int d^3x \left( \partial_t \hat{\phi}^\dagger \partial_t \hat{\phi} + \vec{\nabla} \hat{\phi}^\dagger \cdot \vec{\nabla} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \right) \equiv \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_0(\vec{x}, t)$$

(resultado que verificaremos más adelante).

Pero a cambio de preservar la causalidad, hemos tenido que pagar un precio: dado que tanto  $\hat{\phi}$  como  $\hat{\phi}^\dagger$  incluyen un operador de creación  $\hat{\phi}^\dagger$  y uno de aniquilación  $\hat{\phi}$ , ¡¡ genéricamente habrá en  $\hat{\mathcal{H}}(x)$  términos que No

conservan el número de partículas !! P.ej.,

$$\hat{\phi}_n^\dagger(x) \hat{\phi}_n^\dagger(x) \hat{\phi}_n(x) \hat{\phi}_n(x) \supset \underbrace{\hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n}_{-2+2=0}, \underbrace{\hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n}_{+2+2=4}, \underbrace{\hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n}_{-1+3=2}, \text{ etc.}$$

$\left( \begin{array}{c} \hat{\phi}_n^\dagger + \hat{\phi}_n \\ \hat{\phi}_n + \hat{\phi}_n^\dagger \end{array} \right) \Delta N =$   
LB: 05/09/22 (-65 min)

En este ejemplo notamos un patrón general: si usamos por ahora solo un  $n$  y  $\tilde{n}$  dados (2 tipos espectros <sup>misma masa</sup>), entonces solo se crean o aniquilan  pares  $n$ - $\tilde{n}$ . Esto implica en particular que si las partículas tipo  $n$  portan carga  $q$  de algún tipo, y queremos que esta carga se conserve  aun en presencia de interacciones, entonces  $\tilde{n}$  necesariamente debe portar carga  $-q$ . (En el ejemplo de arriba tendríamos así  $\Delta Q = -2q + 2q = 0$ ,  $+2(q) + 2q = 0$ ,  $-q + (-q) + 2q = 0$ . ✓)

Podemos decir esto de manera más formal: la carga, siendo una observable, estará asociada a un operador hermitiano  $\hat{Q}$  cuya acción sobre estados de una partícula es  $\hat{Q}|\bar{p}n\rangle = q_n|\bar{p}n\rangle$ , y en el espacio de Fock completo está definida como (cf. p. 119)

$$\hat{Q} = \sum_n q_n \hat{N}_n = \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} q_n \hat{a}_{\bar{p}n}^\dagger \hat{a}_{\bar{p}n}.$$

La carga se conserva (es decir,  $\hat{Q}(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{Q}(0) e^{-i\hat{H}t} = \hat{Q}(0)$ ) si  $[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$ .

Usando  $\hat{Q}$ , podemos definir una familia de operadores unitarios  $\hat{U}_Q(\theta) \equiv \exp(i\theta \hat{Q})$ , que actúan de acuerdo con

$$\hat{U}_Q(\theta) |\bar{p}_1 n_1; \dots; \bar{p}_N n_N\rangle = \exp[i\theta(q_{n_1} + \dots + q_{n_N})] |\bar{p}_1 n_1; \dots; \bar{p}_N n_N\rangle$$

y forman una rep del grupo de Lie (abeliano)  $U(1)$ .

Estas transformaciones (análogas a rotaciones en un plano) son entonces una simetría interna de nuestro sistema, cuya conexión con p.ej. la interacción electromagnética

quedará clara más adelante.

A partir de la regla de transformación del estado  $|p_n\rangle \equiv \sqrt{2E_{p_n}} \hat{a}_{p_n}^\dagger |0\rangle$ , podemos deducir que  $\underbrace{\text{cambio } \delta(\hat{a}_{p_n}^\dagger)/i\epsilon}_{\text{cambio } \delta(\hat{a}_{p_n}^\dagger)/i\epsilon}$

$$\hat{U}_Q(\theta) \hat{a}_{p_n}^\dagger \hat{U}_Q^{-1}(\theta) = e^{i\theta\zeta_n} \hat{a}_{p_n}^\dagger \quad \xleftrightarrow{\text{BCH}} \quad [\hat{Q}, \hat{a}_{p_n}^\dagger] = \zeta_n \hat{a}_{p_n}^\dagger,$$

$$\hat{U}_Q(\theta) \hat{a}_{p_n} \hat{U}_Q^{-1}(\theta) = e^{-i\theta\zeta_n} \hat{a}_{p_n} \quad \xleftrightarrow{\text{BCH}} \quad [\hat{Q}, \hat{a}_{p_n}] = -\zeta_n \hat{a}_{p_n},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\delta(\hat{a}_{p_n})/i\epsilon}$

y por tanto también

$$\hat{U}_Q(\theta) \hat{\phi}_n^\dagger(x) \hat{U}_Q^{-1}(\theta) = e^{i\theta\zeta_n} \hat{\phi}_n^\dagger(x) \quad \xleftrightarrow{\text{BCH}} \quad [\hat{Q}, \hat{\phi}_n^\dagger(x)] = \zeta_n \hat{\phi}_n^\dagger(x),$$

$$\hat{U}_Q(\theta) \hat{\phi}_n(x) \hat{U}_Q^{-1}(\theta) = e^{-i\theta\zeta_n} \hat{\phi}_n(x) \quad \xleftrightarrow{\text{BCH}} \quad [\hat{Q}, \hat{\phi}_n(x)] = -\zeta_n \hat{\phi}_n(x).$$

Pero entonces  $\hat{\varphi}_n^\dagger(x) \equiv \hat{\phi}_n^\dagger(x) + \hat{\phi}_n(x)$  transforme de manera definida bajo  $\hat{U}_Q(\theta)$  (es decir, tiene una carga definida)

solo si  $\boxed{\zeta_n = -\zeta_n}$ , en cuyo caso

$$\hat{U}_Q(\theta) \hat{\varphi}_n^\dagger(x) \hat{U}_Q^{-1}(\theta) = e^{i\theta\zeta_n} \hat{\varphi}_n^\dagger(x) \quad \xleftrightarrow{\text{BCH}} \quad [\hat{Q}, \hat{\varphi}_n^\dagger(x)] = +\zeta_n \hat{\varphi}_n^\dagger(x),$$

$$\hat{U}_Q(\theta) \hat{\varphi}_n(x) \hat{U}_Q^{-1}(\theta) = e^{-i\theta\zeta_n} \hat{\varphi}_n(x) \quad \xleftrightarrow{\text{BCH}} \quad [\hat{Q}, \hat{\varphi}_n(x)] = -\zeta_n \hat{\varphi}_n(x)$$

y cualquier combinación hermitiana de  $\hat{\varphi}_n(x)$  y  $\hat{\varphi}_n^\dagger(x)$

será automáticamente invariante. P.ej.,  $\hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n$  es invariante:

$$\begin{aligned} \hat{U}_Q(\theta) \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n \hat{U}_Q^{-1}(\theta) &= \underbrace{\hat{U}_Q(\theta) \hat{\phi}_n^\dagger \hat{U}_Q^{-1}(\theta)}_{e^{i\theta \hat{f}_n} \hat{\phi}_n^\dagger} \underbrace{\hat{U}_Q(\theta) \hat{\phi}_n \hat{U}_Q^{-1}(\theta)}_{e^{-i\theta \hat{f}_n} \hat{\phi}_n} \\ &= e^{i\theta \hat{f}_n} \hat{\phi}_n^\dagger \cdot e^{-i\theta \hat{f}_n} \hat{\phi}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{PCH}{\longleftrightarrow} [\hat{Q}, \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n] &= [\hat{Q}, \hat{\phi}_n^\dagger] \hat{\phi}_n + \hat{\phi}_n^\dagger [\hat{Q}, \hat{\phi}_n] \\ &= \hat{f}_n \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n + \hat{\phi}_n^\dagger (-\hat{f}_n \hat{\phi}_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto es cierto en particular para la densidad hamiltoniana  $\hat{H}(x)$ , así que efectivamente tenemos

$$\begin{aligned} [\hat{Q}, \hat{H}] = 0 &\longleftrightarrow \hat{H} \text{ invariante bajo transformación } \hat{U}_Q(\theta) \\ &\longleftarrow \hat{Q} \text{ se conserva } \checkmark \end{aligned}$$

Hemos visto entonces que  $\bar{n}$  debe tener la misma masa que  $n$  pero la carga (de cualquier tipo conservada) opuesta, es decir,  $\bar{n}$  es la antipartícula de  $n$  (y viceversa),  $\bar{\bar{n}} \equiv n$ !

El operador de campo  $\hat{\phi}_n(x)$  está asociado a la vez a una partícula y a su antipartícula correspondiente.

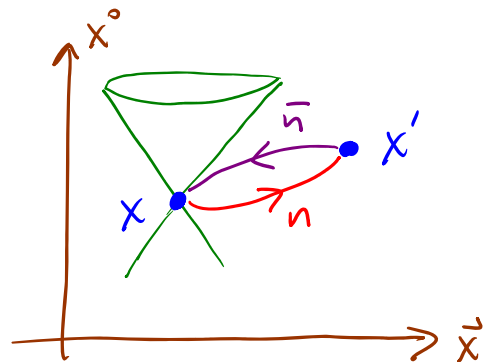
Notemos que un caso particular sería  $n = \bar{n}$  (una partícula que es su propia antipartícula), donde necesariamente se tiene  $\eta_n = 0$ , y el operador de campo  $\hat{\phi}_n(x) = \hat{\phi}_n(x) + \hat{\phi}_n^\dagger(x)$  es hermitiano (como correspondiente a una observable).

Es interesante notar que la microcausalidad se preserva porque

$$\begin{aligned}
 [\hat{\phi}_n(x'), \hat{\phi}_n^\dagger(x)] &= [\hat{\phi}_n(x'), \hat{\phi}_n^\dagger(x)] - [\hat{\phi}_n^-(x), \hat{\phi}_n^-(x')] = 0 \\
 \underbrace{\hat{\phi}_n(x') + \hat{\phi}_n^\dagger(x')}_{\text{números}} & \quad \underbrace{\hat{\phi}_n(x') \hat{\phi}_n^\dagger(x)}_{\text{números}} \quad \underbrace{[\hat{\phi}_n^-(x), \hat{\phi}_n^-(x')]}_{\text{números}} = 0 \\
 \langle 0 | \hat{\phi}_n(x') \hat{\phi}_n^\dagger(x) | 0 \rangle & \quad \langle 0 | \hat{\phi}_n^-(x) \hat{\phi}_n^-(x') | 0 \rangle \\
 = \langle x' | x \rangle & \quad = \langle x' | x \rangle, \quad (x' - x) < 0
 \end{aligned}$$

es decir, gracias a una cancelación entre la amplitud de propagación de una partícula de  $x$  a  $x'$  y la de una antipartícula de  $x'$  a  $x$ .

Así que la existencia de anti-partículas, que al principio del curso parecía poner en



peligro la causalidad, es precisamente la que hace posible preservarla!

Notemos por cierto que el propagador de Feynman, que incluye las amplitudes de propagación de la partícula y la antipartícula (elijiendo entre ambas según el orden temporal) se puede expresar en la forma

$$G(x'-x) \equiv \Theta(x'^0 - x^0) \langle x'n | x_n \rangle + \Theta(x^0 - x'^0) \langle x\bar{n} | x'\bar{n} \rangle \quad (\text{p. 20})$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_n &= \hat{\phi}_n + \hat{\phi}_n^\dagger \\ \hat{\varphi}_n^\dagger &= \hat{\phi}_n^\dagger + \hat{\phi}_n \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\langle 0 | \hat{\phi}_n(x') \hat{\phi}_n^\dagger(x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\varphi}_n(x') \hat{\varphi}_n^\dagger(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\langle 0 | \hat{\phi}_n^\dagger(x) \hat{\phi}_n(x') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\varphi}_n^\dagger(x) \hat{\varphi}_n(x') | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$G(x'-x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_n(x') \hat{\varphi}_n^\dagger(x) \} | 0 \rangle$$

↑ orden temporal: tiempos aumentan hacia la izquierda

Igualmente podemos calcular el conmutador

$$[\hat{\varphi}_n(x'), \hat{\varphi}_n^\dagger(x)] = [\hat{\phi}_n(x'), \hat{\phi}_n^\dagger(x)] + [\hat{\phi}_n^\dagger(x'), \hat{\phi}_n(x)]$$

$$= \langle x'n | x_n \rangle - \langle x\bar{n} | x'\bar{n} \rangle$$

$$\stackrel{\text{p. 12}}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}}{2E_p} \left( e^{iE_p(t' - t)} - e^{-iE_p(t' - t)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x-x')^2 < 0 \\ \text{finito} & \text{si } (x-x')^2 \geq 0 \end{cases}$$

↑ por construcción

En resumen, utilizando el lenguaje de operadores de campo, hemos visto que la condición de causalidad (9) <sup>p.136</sup> en presencia de interacciones implica:

- i) La existencia de una antipartícula para cada partícula (descritas ambas por el mismo operador de campo  $\hat{\phi}(x)$ )
- ii) Procesos de creación/aniquilación de partículas y antipartículas (no necesariamente pares correspondientes al mismo campo - p.ej.  $\hat{\phi}_1^\dagger \hat{\phi}_2^\dagger \hat{\phi}_3^\dagger + \text{conjugado hermitiano} = \hat{\phi}_1^\dagger \hat{\phi}_2^\dagger \hat{\phi}_3^\dagger + \dots$ )  $\Rightarrow 3 \rightarrow 1+2$
- iii) Una conexión entre el espín y la estadística: las partículas con  $j=0$  deben ser bosones.

Ahora, si bien la causalidad permitiría que  $\hat{H}$  fuera cualquier función del campo, y la unitariedad requiere solamente que sea hermitiana, para tener covariancia bajo Poincaré debemos asegurarnos de que  $\hat{H} = \int d^3x \hat{H}(x)$  transforme como debe hacerlo  $\hat{P}^0$ , la componente temporal de un vector (lo cual como veremos más adelante, equivale

a pedir que  $\hat{H}(x)$  transforme como la componente 00 de un tensor de rango (1,1) — el tensor de energía-momento  $\hat{T}^0_0(x)$ .

Nos interesa entonces tener clara la manera en que el operador de campo  $\hat{\phi}(x)$  transforme bajo Poincaré

Para partículas con  $j=0$ , hemos visto que (p.120)

$$\hat{U}(\Lambda, a) \hat{a}_{pn} \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda pn}}{E_{pn}}} \exp(-i q_\mu \Lambda^\mu_\nu p^\nu) \hat{a}_{\Lambda pn}$$

↑ desde ahora dejaremos de usar barra para operadores  
de donde se sigue que

$$\hat{U}(\Lambda, a) \hat{\phi}_n(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{pn}}} \sqrt{\frac{E_{\Lambda pn}}{E_{pn}}} \left( e^{-ip \cdot x - i\Lambda p \cdot a} \hat{a}_{\Lambda pn} + e^{ip \cdot x + i\Lambda p \cdot a} \hat{a}_{\Lambda p \bar{n}} \right)$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{pn}}} \left( \hat{a}_{pn} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{p \bar{n}} e^{ip \cdot x} \right)$$

Cambiando la variable de integración  $p \rightarrow p' = \Lambda p$

y usando que  $d^3 p / E_{pn} = d^3 p' / E_{p'n}$  (p.14), esto es

$$\hat{U}(\Lambda, a) \hat{\phi}_n(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'n}}} \left( e^{-i\Lambda^{-1} p' \cdot x - ip' \cdot a} \hat{a}_{p'n} + e^{i\Lambda^{-1} p' \cdot x + ip' \cdot a} \hat{a}_{p' \bar{n}} \right),$$



y usando por último que

$$p^\mu x_\mu = \underbrace{(\Lambda^{-1})^\mu}_\nu p^\nu x'_\nu = p^\nu x'_\nu, \text{ donde } x'^\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

concluimos finalmente que

$$\hat{U}(\Lambda, a) \hat{\phi}_n(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( e^{-ip' \cdot (x+a)} \hat{a}_{p'n} + e^{ip' \cdot (x+a)} \hat{a}_{p'n}^\dagger \right)$$

↑  
por el momento,  
no apli cambios todavía  
la traslación

$$\hat{U}(\Lambda, a) \hat{\phi}_n(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \hat{\phi}_n(\Lambda x + a).$$

$$\equiv \hat{\phi}'_n(x)$$

$$\equiv \hat{\phi}_n(x')$$

nombres parecen al revés,  
igual que en p. 63

Es decir, el nuevo (operador de) campo, evaluado en el nuevo punto, coincide con el viejo (operador de) campo en el viejo punto: el campo es un escalar bajo Poincaré.

Para  $j > 0$ , la situación se complica por las matrices  $D_{\lambda\lambda'}(W(\Lambda, p))$  que aparecen en la regla de transformación de  $\hat{a}_{p\lambda n}$ . Solo tendremos un campo que transforma de manera sencilla bajo Poincaré si escogemos con cuidado los coeficientes de  $\hat{a}_{p\lambda n}$  y  $\hat{a}_{p\lambda n}^\dagger$ ,

$$\hat{\phi}_{ln}(x) \equiv \sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{pn}}} \left( U_{\lambda p\lambda n} e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda n} + V_{\lambda p\lambda n} e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda n}^\dagger \right),$$

↑ Campo con varios componentes  $l=1, \dots, L$

de tal manera que nuestro campo transforme de manera bien definida (y sencilla) bajo Lorentz / Poincaré :

$$\hat{U}(\Lambda, a) \hat{\phi}_{ln}(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{l'n'} M_{ll'}(\Lambda) \hat{\phi}_{l'n'}(\Lambda x + a),$$

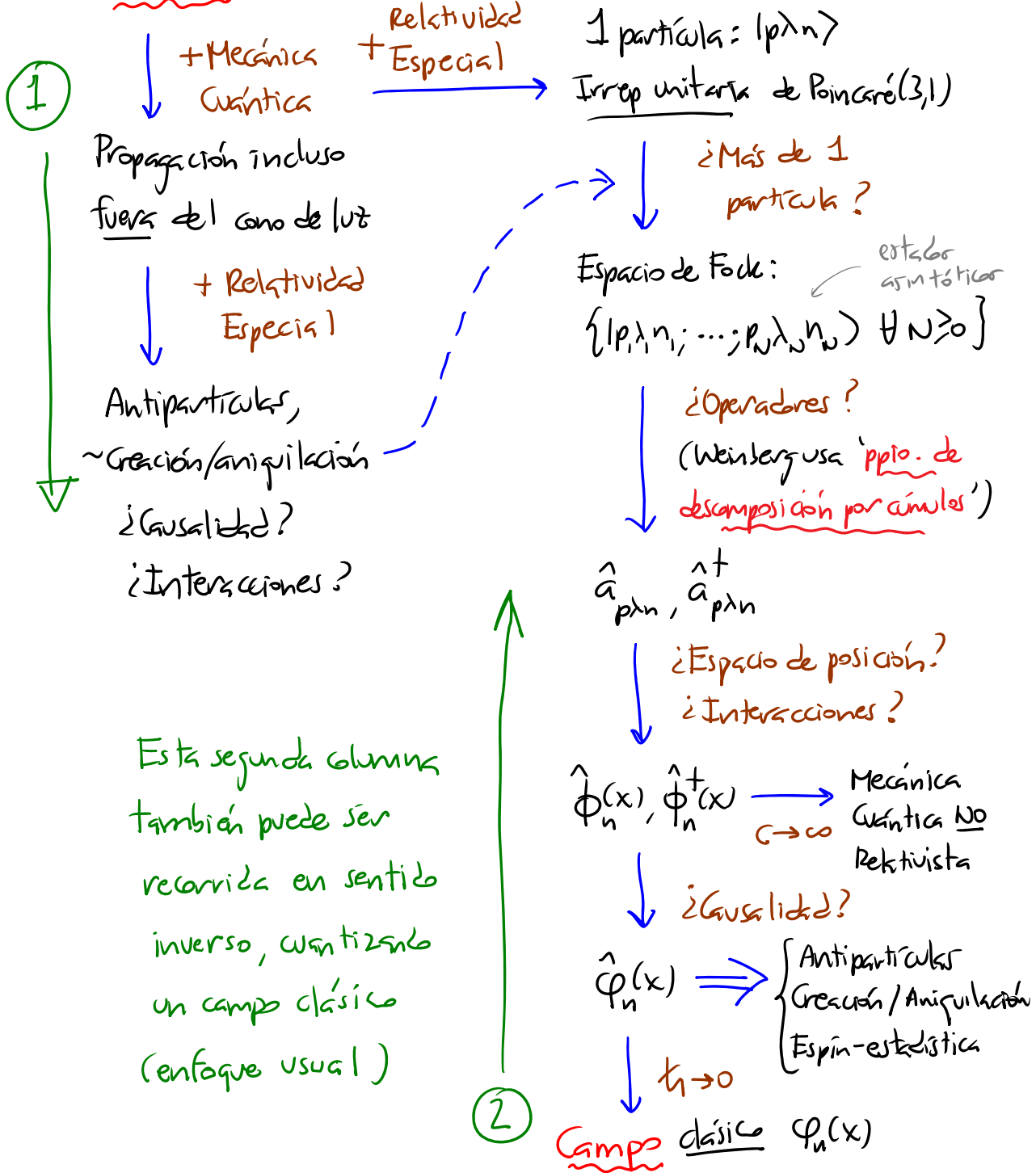
donde las matrices  $M(\Lambda)$  dan una rep del grupo de Lorentz (a diferencia de las  $D_{\lambda\lambda}(\omega)$ , que constituyen una rep solo del grupito  $Sol(3,1)|_P$ , y en general son par lo tanto matrices de menor dimensión:  $2j+1 \leq L$ ).

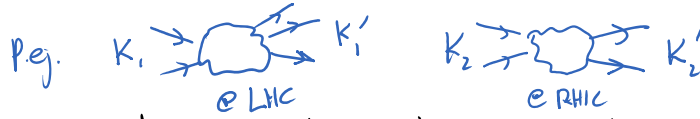
Con tales  $\hat{\phi}_{ln}(x)$ , podremos construir una densidad Hamiltoniana  $\hat{H}(x)$  que transforme de manera apropiada (o, más fácil, una densidad Lagrangiana  $\hat{L}(x)$  que sea escalar bajo Poincaré). Más adelante veremos en detalle los casos  $j=1/2$  y  $j=1$ , que corresponden respectivamente a un campo espinorial y a un campo vectorial.

Cualquier tipo de partículas relativistas cuánticas tiene entonces un operador de campo asociado,  $\hat{\phi}_{ln}(x)$ . En el límite clásico, este operador se reduce a un campo clásico,  $\phi_{ln}(x)$ .

Vale la pena tratar de resumir en un diagrama la lógica que hasta ahora hemos seguido en este curso :

Partícula ( $E \geq 0$ )





Para motivar el uso de operadores de creación y aniquilación  $\hat{a}_{p\lambda}^\dagger, \hat{a}_{p\lambda}$ , Weinberg enfatiza la importancia del principio de descomposición por cúmulos ("cluster decomposition principle"), que básicamente afirma que los resultados de 2 o más experimentos realizados en lugares suficientemente alejados deben ser independientes.

Más concretamente, en términos de la matriz de dispersión  $S_{k'_1 \dots k'_N; k_1 \dots k_N} \equiv \langle k'_1, \dots, k'_N; - | k_1, \dots, k_N; + \rangle$ , el principio de descomposición por cúmulos afirma que el resultado para 2 experimentos de dispersión distintos debe factorizarse:

$$S_{K'_1 K'_2; K_1 K_2} \rightarrow S_{K'_1; K_1} S_{K'_2; K_2}$$

← las K se refieren a colecciones de partículas:  $K_i \equiv k_1, k_2, \dots, k_{N_i}$ , etc.

(Esto equivale a decir que la "parte conexa" de S para partículas distantes debe anularse, es decir, tales partículas no se pelean.)

Se puede mostrar [ver Weinberg 4.4] que los Hamiltonianos que respetan este principio pueden escribirse como suma de productos de  $\hat{a}_s$  y  $\hat{a}_s^\dagger$ , con coeficientes que contienen solo una delta de Dirac (que refleja la conservación del momento total,  $\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N - \vec{p}'_1 - \vec{p}'_2 - \dots - \vec{p}'_N)$ ).

Entendemos entonces finalmente par qué hablamos de campos : con ello obtenemos un formalismo extremadamente útil para resumir la física que resulta de combinar la noción de partículas con la mecánica cuántica y la relatividad especial. Este es el lenguaje que usaremos en el resto del curso, siguiendo la ruta ②. Pero, antes de finalizar con esta discusión, vale la pena hacer 2 comentarios adicionales :

- i) Ciertamente es posible hablar de esta misma física sin utilizar el lenguaje de campos. Es decir, en lugar de seguir el camino ②, cuantizando campos ('segunda cuantización'), podemos simplemente insistir en estudiar la evolución cuántica de partículas, siguiendo el camino ① ('primera cuantización'). (Esto resulta parcialmente intuitivo en el método de cuantización por integral de trayectoria.) Este, de hecho, fue el enfoque utilizado por Feynman (en realidad usó un

enfoque mixto: electrones como partículas interactuando a través del campo electromagnético). Así que es posible desarrollar las 'reglas de Feynman' para agregar interacciones sin pensar en campos [ver Bjorken y Drell, vol. 1]. Pero este método resulta ser en general menos poderoso: hay que inventar las interacciones muy a mano (verificando después también a mano que se respeten las condiciones de causalidad y unitariedad), y la descripción es puramente perturbativa: da una buena aproximación cuando las interacciones son débiles, pero no captura toda la física del sistema — existen efectos 'no perturbativos' —, y es completamente inútil cuando las interacciones se vuelven fuertes. (A pesar de todo esto, cabe destacar que el camino ① facilita algunos cálculos en la práctica [ver, por ej., Schubert, hep-th/0101036].) En cualquier caso, como iremos aprendiendo en este curso, ¡el concepto de campo resultará

más fundamental que el de partículas!

ii) No sería del todo preciso decir que el formalismo de campos es la única manera de combinar a la mecánica cuántica con la relatividad especial: si no estamos casados con la noción de partícula, entonces podemos formular la teoría de cuerdas (que logra incluso incorporar a la relatividad general). Pero a bajas energías o, lo que es lo mismo, a grandes distancias, incluso la teoría de cuerdas se reduce a la teoría de campos ( $\leftrightarrow$  partículas). Así que, independientemente de cuál resulte ser la 'teoría última', el lenguaje de la teoría cuántica de campos será para siempre parte de nuestra descripción de la naturaleza, que es cuántica, relativista y compuesta de ingredientes 'básicos' que, al menos en cierto rango de distancias, parecen partículas.

21:07/09/22

## 2. Campo Escalar Libre

Basándonos en lo que hasta ahora hemos aprendido, en el resto del curso tomaremos el punto de vista de que el sistema físico que nos interesa estudiar es un campo cuántico relativista. Empezaremos analizando a un campo clásico.

Por definición, un campo es una propiedad del universo que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo:

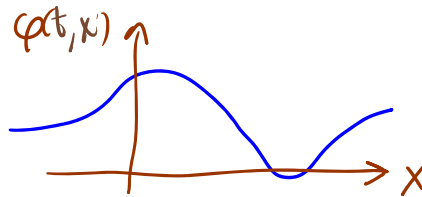
$$\underbrace{\varphi(t, \vec{x})}_{\text{lo escribimos así}} \leftrightarrow \underbrace{\varphi_{\vec{x}}(t)}_{\text{lo pensamos así}},$$

$\uparrow$  índice discreto  $n=1, \dots, N$        $\uparrow$  índice continuo  $\in \mathbb{R}^3$

análogo a  $X_n(t)$  en sistema con  $N$  partículas.

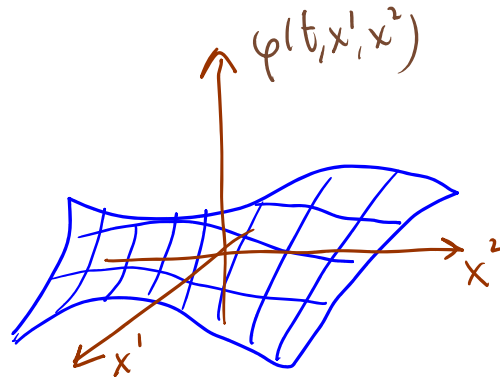
Un 'campo' en 0+1 dimensiones  $\varphi(t)$  sería exactamente análogo a un sistema de 1 partícula que se mueve en 1 dim,  $y(t)$ .

Un campo en 1+1 dim  $\varphi_x(t)$  es exactamente análogo a una cuerda que puede oscilar en 1 dim transversa,  $y(t, x)$ .





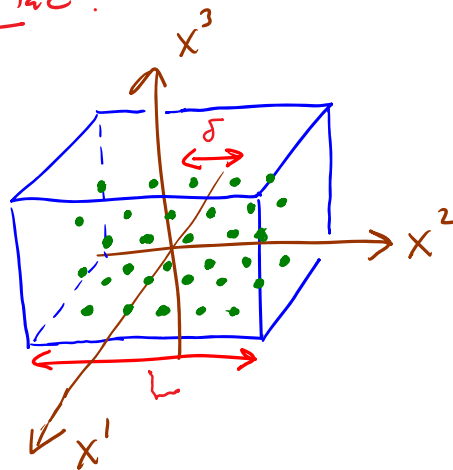
Un campo en  $2+1$  dimensiones  $\varphi(t, x^1, x^2)$  es exactamente análogo a la membrana de un tambor, que oscila en 1 dim transversa,  $y(t, x^1, x^2)$ .



Un campo en  $3+1$  dim  $\varphi(t, \vec{x})$  es entonces análogo a 1 gelatina/jalea que llena 3 dim espaciales y oscila en 1 dim transversa,  $y(t, \vec{x})$ . Ejemplos sencillos serían los campos que describen a la temperatura o la presión o la densidad o la velocidad del aire en un cuarto.

A partir de la definición, vemos que cualquier campo (en  $d+1$  dim con  $d \geq 1$ ) es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad. uno/vector en cada  $\vec{x}$

Se le puede pensar como el límite  $L \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$  del caso con un volumen finito  $L^3$  en un espacio discretizado con espaciamiento  $\delta$ , sistema que tendría  $(L/\delta)^3$  grados de libertad.



(de hecho, esta perspectiva se utiliza para hacer cálculos numéricos en el caso de la interacción fuerte - empresa conocida como 'QCD en la retícula' (lattice QCD).)

En este curso nos interesa estudiar campos relativistas

$\varphi_l(t, \vec{x}) \equiv \varphi_l(x)$  ( $l=1, \dots, L$ ), que transforman de manera definida bajo Poincaré:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a \Rightarrow \varphi'_l(x') = \sum_{l'} M_{ll'}(\Lambda) \varphi_{l'}(x).$$

$\leftarrow$  números finitos  
 $\leftarrow$  rep de Lorentz no unitaria  $\leftarrow$  a diferencia de  $\hat{U}(\Lambda)$ , No actúa sobre espinores

En las próximas semanas analizaremos detenidamente el caso más sencillo: un campo escalar,  $\varphi(x)$ , tal que  $\varphi'(x') = \varphi(x)$  (es decir,  $L=1$ ,  $M(\Lambda) = 1$ ).  $\leftarrow$  rep trivial

Conviene tomar como punto de partida la descripción

Lagrangiano de la dinámica. La cantidad fundamental es

entonces la acción  $S[\varphi] \equiv \int dt L[\varphi(t)]$ ,

donde estamos usando corchetes para indicar Lagrangiano  $\sim$  energía cinética - potencial

que tanto  $S$  como  $L$  son 'funcionales' - es decir, mapeos de funciones a números: para determinar  $L$  hace falta

conocer  $\varphi(t, \vec{x}) \forall \vec{x}$  a un  $t$  dado; para calcular  
 Si se necesita conocer  $\varphi(t, \vec{x}) \forall t, \vec{x}$ .

Nos interesa formular teorías locales, donde la evolución  
 dinámica del campo en un punto espaciotemporal dado depende  
 solo del valor del campo en puntos vecinos, requisito que  
 descarta la acción a distancia y está por tanto estrechamente  
 vinculado con el de causalidad. Podemos escribir entonces

$$L[\varphi(t)] \equiv \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \partial_\nu \partial_\mu \varphi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi(x))$$

$\swarrow$  omitimos variables que no tienen un valor fijo  
 $\swarrow$  densidad Lagrangiana  
 $\swarrow$  Número finito de derivadas  
 $\leftarrow \partial_t$  y  $\vec{\nabla}$  juntas, por covarianza bajo Lorentz

(a diferencia de, p.ej.,  $L[\varphi(t)] = \int d^3x d^3x' \mathcal{L}(\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{x}'))$ ,  
 que es no local y podría reescribirse en términos de una  
 densidad Lagrangiana que depende de un número infinito de  
 de derivadas de  $\varphi(x)$ , definiendo  $y \equiv x' - x$  y tomando

$$\mathcal{L} = \int d^3y \mathcal{L}(\varphi(x), \varphi(x) + y^\mu \partial_\mu \varphi(x) + \frac{1}{2!} y^\mu y^\nu \partial_\mu \partial_\nu \varphi(x) + \dots)$$

Con  $D=0$ , tendríamos una teoría ultralocal, donde la  
 evolución en cada  $\vec{x}$  es independiente. (semejante sistema  
 sería análogo no a una gelatina, sino a polvo.)

El caso más común es  $D=1$ , que conduce a ecuaciones de movimiento con segundas derivadas  $\partial_t^2 \varphi$ ,  $\partial_x^2 \varphi$ , para las cuales es preciso por tanto especificar condiciones iniciales sobre  $\varphi(t, \vec{x})$  y  $\partial_t \varphi(t, \vec{x})$ . Tenemos entonces

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$$

←  $\mathcal{L}$  es función ordinaria (No función!) de 5 argumentos

que será invariante bajo Poincaré si la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$  es también invariante (condición más fácil que pedir que  $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$  transforme como la componente 0 de un cuadrivector). Notar que  $L = L[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ ,  $S = S[\varphi]$ .

Justo como en el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, las ecs. de mov. para el campo  $\varphi(x)$  se deducen a partir del principio variacional — las soluciones clásicas  $\varphi_{cl}(x)$  serán aquellas configuraciones donde la acción es estacionaria:

$$\varphi_{cl}(x) \rightarrow \varphi_{cl}(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow S[\varphi] \rightarrow S[\varphi_{cl} + \delta\varphi] \equiv S[\varphi_{cl}] + \delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi]$$

con  $\delta S[\varphi_{cl}, \delta\varphi] = 0$  para cualquier variación  $\delta\varphi(x)$  que

satisface condiciones de borde apropiadas en la frontera de la región de integración (normalmente  $\int_{t_i}^{t_f} \int d^3x$ , quizás también con  $t_i \rightarrow -\infty$ ,  $t_f \rightarrow +\infty$ ).

Dado que

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \Rightarrow \partial_\mu \varphi(x) \rightarrow \underbrace{\partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)}_{\equiv \delta(\partial_\mu \varphi(x))}$$

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x) + \partial_\mu \delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \delta(\partial_\mu \varphi(x)) \right\}$$

← suma sobre  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x),$$

← en condiciones de borde tales que el término de superficie se anula

expresión que se anula para  $\delta\varphi(x)$  arbitrario solo si se satisface la ec. de mov.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} \right)}$$

Equación de Euler-Lagrange

L12: 22/02/17

Notemos que esta ecuación efectivamente es covariante (de hecho, invariante) bajo Poincaré si  $\mathcal{L}$  es escalar:

$\varphi$  es escalar,  $\partial_\mu \varphi$  es vector dual,  $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi$  es escalar,  $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi)$  es vector,  $\partial_\mu (\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi))$  es escalar ✓.

Si nuestro sistema incluye más de un campo, con un razonamiento análogo obtendremos por supuesto una ec. de mov. para cada campo: variando  $S[\varphi_1, \varphi_2, \dots]$  con respecto a cada  $\varphi_l(x)$ , encontramos que se extremiza solo si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_l(x)} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l(x))} \right) \quad \forall l=1, 2, \dots$$

l aquí denota distintos campos escalares, y/o componentes de campo NO escalares

Para este tipo de cálculos, dada una funcional  $F[\varphi]$ , conviene definir la derivada funcional

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi(x')} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\varphi(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x-x')] - F[\varphi(x)]}{\epsilon}$$

↖ número de argumentos fijos en F (4 para S, 3 para L)

↖ evalúa en un punto específico

(análoga a la derivada parcial usual  $\varphi_i + \epsilon \delta_{i,k}$ )

$$\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2, \dots)}{\partial \varphi_k} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k + \epsilon, \dots) - f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots)}{\epsilon}$$

Esta derivada satisface la regla de Leibniz y la regla de la cadena. Ejemplos importantes de su aplicación son:

•  $F[\varphi] = \varphi(x)$  (evaluar en  $x$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(x')} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x'-x) - \varphi(x)}{\epsilon} = \delta^{(n)}(x'-x)$$

(resultado exactamente análogo a  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_{k'}} = \delta_{k,k'}$ ),

•  $F[\varphi] = \int \mathcal{L}^n x f(\varphi(x))$   $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x')} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{L}^n x \left( \frac{f(\varphi(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x'-x)) - f(\varphi(x))}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{L}^n x \left( \frac{f(\varphi(x)) + \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial \varphi} \epsilon \delta^{(n)}(x'-x) - f(\varphi(x))}{\epsilon} \right) \\ &= \frac{\partial f(\varphi(x'))}{\partial \varphi}, \quad \left( \Rightarrow \delta F = \int \mathcal{L}^n x \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \delta \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

•  $F[\varphi] = \int \mathcal{L}^n x f(\partial_\mu \varphi(x))$   $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x')} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{L}^n x \left( \frac{f(\partial_\mu \varphi(x) + \epsilon \partial_\mu \delta^{(n)}(x'-x)) - f(\partial_\mu \varphi(x))}{\epsilon} \right) \\ &= \int \mathcal{L}^n x \frac{\partial f(\partial_\mu \varphi(x))}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta^{(n)}(x'-x) = - \partial_k \frac{\partial f(\partial_\mu \varphi(x'))}{\partial (\partial_k \varphi(x))} \end{aligned}$$

se anula si  $\mu$  es dirección fija

↑ cambio bajo  $\delta \varphi$  arbitrario

↑  $\frac{\partial f}{\partial \varphi(x)}$

↑  $n$  direcciones no fijas

Con esta definición, bajo  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x)$  se tiene

$$\delta S[\varphi] \equiv \int \mathcal{L}^4 x \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \delta\varphi(x) = \int \mathcal{L}^4 x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right) \delta\varphi(x)$$

es decir, la ec. de Euler-Lagrange se resume como

$$\delta S / \delta\varphi(x) = 0.$$

Una de las principales virtudes del formalismo Lagrangiano es que permite fácilmente establecer una conexión entre simetrías continuas y cantidades conservadas.

Supongamos que la acción  $S[\varphi]$  es invariante ( $\Rightarrow$  las ecs. de mov. son conservadas) bajo una transformación infinitesimal

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \omega^\alpha X_\alpha^\mu(x) \\ \varphi_l(x) \rightarrow \varphi'_l(x') = \varphi_l(x) + \delta\varphi_l(x) \equiv \varphi_l(x) + \omega^\alpha \Phi_{l\alpha}(x) \end{array} \right.$$

parámetros de variación  $|\omega^\alpha| \ll 1$

suma implícita sobre  $\alpha$  que afecta distintas simetrías  $\rightarrow$  forma de la variación

$\uparrow$  como  $\rightarrow$  Taylor

Notando que, por otra parte,  $\varphi'_l(x') = \varphi_l(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x)$ ,

podemos (y nos conviene) hacer

una distinción entre

$$\approx \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x)$$



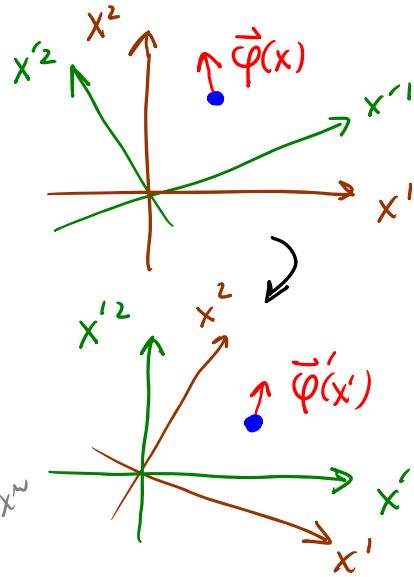
la variación intrínseca (o 'local')

$$\delta\varphi_l(x) \equiv \varphi'_l(x') - \varphi_l(x) \quad \leftarrow \text{comparación física}$$

y la variación funcional (o 'total')

$$\tilde{\delta}\varphi_l(x) \equiv \varphi'_l(x) - \varphi_l(x) \quad \leftarrow \text{comparación matemática}$$

$$\begin{aligned} & \varphi'_l(x') - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x) \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ & = \delta\varphi_l(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x) \end{aligned}$$



P.ej., para un campo  $\varphi(x)$  que es escalar bajo la transformación en cuestión se tiene  $\delta\varphi(x) = 0$  pero  $\tilde{\delta}\varphi(x) \neq 0$ ; en el caso general incluso  $\delta\varphi_l(x) \neq 0$  (como se ilustra en la figura de arriba para un campo  $\vec{\varphi}(x)$  que transforma como vector bajo rotaciones).

LS: 01/09/22

Una diferencia importante entre  $\delta\varphi_l(x)$  y  $\tilde{\delta}\varphi_l(x)$  es que

$$\partial_\mu \tilde{\delta}\varphi_l(x) = \partial_\mu \varphi'_l(x) - \partial_\mu \varphi_l(x) = \tilde{\delta} \partial_\mu \varphi_l(x),$$

mientras que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \delta\varphi_l(x) &= \partial_\mu (\varphi'_l(x') - \varphi_l(x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi'_l(x') - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_l(x) \end{aligned}$$

sumamos y restamos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \delta \varphi_l(x) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \varphi'_l(x') - \partial_\mu \varphi_l(x)}_{\delta \partial_\mu \varphi_l(x)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \varphi'_l(x) - \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \varphi'_l(x')}_{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\nu}} \\ &= \delta \partial_\mu \varphi_l(x) + \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\mu} \end{aligned}$$

$x'^\nu = x^\nu + \delta x^\nu$

es decir,

$$\boxed{\partial_\mu \delta \varphi_l(x) = \delta \partial_\mu \varphi_l(x) + \partial_\mu \delta x^\nu \partial_\nu \varphi_l(x)}$$

Con la intención de aclarar más nuestra notación para las variaciones  $\delta x^\mu$  y  $\delta \varphi_l(x)$  asociadas a una simetría, conviene mencionar algunos ejemplos:

1) Traslaciones en el espaciotiempo

$$\left. \begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + a^\mu \\ \varphi'_l(x') &= \varphi_l(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Versión infinitesimal} \\ a^\mu = \omega^\mu \quad |\omega^\mu| \ll 1 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta x^\mu = \omega^\alpha \delta_\alpha^\mu \quad \alpha=0,1,2,3 \\ \delta \varphi_l(x) = 0 \end{array} \right.$$

$\omega^\mu \equiv X_\alpha^\mu$   
 $\omega^\mu \equiv \Phi_{\alpha l}$

Para lograr que  $S[\varphi_l]$  sea invariante, simplemente debemos usar  $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \partial_\mu \varphi_l(x))$  sin dependencias explícitas de  $x^\mu$ .

2) Transformaciones de Lorentz (restringidas)

$$\left. \begin{aligned}
 x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\
 \varphi'_l(x') &= M_{ll'}(\Lambda) \varphi_l(x)
 \end{aligned} \right\} \text{, que en versión infinitesimal}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \quad \text{c/ } \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

$$= \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\sigma\rho} (\eta^{\mu\sigma} \delta^{\rho}_{\nu} - \eta^{\mu\rho} \delta^{\sigma}_{\nu})$$

$i(\tilde{J}^{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu}$  (p.20)  
 $\uparrow \equiv \alpha$  (6 valores)

rep de  $SO^+(3,1)$   
 (suma sobre l implícita)

$$M_{ll'} = \delta_{ll'} + \frac{1}{2} \omega_{\sigma\rho} i(S^{\sigma\rho})_{ll'}$$

generadores: rep de álgebra  $so^+(3,1)$   
 (p.ej., en rep. vectorial,  $S^{\sigma\rho} = \tilde{J}^{\sigma\rho}$ )

implica

$$\left\{ \begin{aligned}
 \delta x^{\mu} &= \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \frac{1}{2} \omega^{\sigma\rho} (\delta^{\mu}_{\sigma} \eta_{\rho\nu} x^{\nu} - \delta^{\mu}_{\rho} \eta_{\sigma\nu} x^{\nu}) \\
 \delta \varphi_l(x) &= \frac{1}{2} \omega^{\sigma\rho} (i S_{\sigma\rho})_{ll'} \varphi_{l'}(x)
 \end{aligned} \right.$$

$$\underbrace{\delta^{\mu}_{\sigma} x_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho} x_{\sigma}}_{\equiv X_{\sigma\rho}^{\mu}}$$

$$\underbrace{\delta \varphi_l(x)}_{\equiv \Phi_{ll'}(x)}$$

Para que  $S[\varphi_l]$  sea invariante, debemos combinar los  $\varphi_l$ 's de tal manera que  $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \partial_{\mu} \varphi_l(x))$  sea escalar.

1) y 2) claramente modifican  $x^{\mu}$  y son por tanto ejemplos de simetrías espatiotemporales.

L13: 07/09/18 (-10 min)

### 3) Simetría Interna

$x'^{\mu} = X^{\mu}$   
 $\varphi'_{lI'}(x') = M_{I'I} \varphi_{lI}(x)$

Version infinitesimal  $\rightarrow$ 

$$\begin{cases} \delta X^{\mu} = 0 \\ \delta \varphi_{lI}(x) = \omega^{\alpha} (i T_{\alpha})_{II'} \varphi_{lI'}(x) \end{cases}$$

$\alpha = 1, \dots, \dim G$   
 $\equiv \Phi_{lI\alpha}(x)$

$M = \exp(i\theta^{\alpha} T_{\alpha})$   
 (sumas sobre I y sobre  $\alpha$  implícitas)

generadores: rep de álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$   
 $[T_{\alpha}, T_{\beta}] = i f_{\alpha\beta}^{\gamma} T_{\gamma}$  ( $\gamma \leq \alpha, \beta$ )  
 ctes. de estructura

Índice interno  $\uparrow$   
 rep de grupo de Lie  $G$

Regresemos ahora al argumento general, para deducir las implicaciones de la existencia de una simetría continua. Si la transformación  $\delta X^{\mu} = \omega^{\alpha} X^{\mu}$ ,  $\delta \varphi_{lI}(x) = \omega^{\alpha} \Phi_{lI\alpha}(x)$  es una simetría, entonces, aún sin usar las ecs. de mov.,

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) = 0$$

$$\equiv \mathcal{L}(\varphi'_{lI}(x'), \frac{\partial \varphi'_{lI}(x')}{\partial x'^{\mu}})$$

$\uparrow$  En el contexto clásico, podríamos tener más en general  $\delta S = \int d^4x \partial_{\mu} \xi^{\mu}$  y así preservar las ecs. de mov.  
 En el contexto cuántico, para tener una verdadera simetría necesitamos  $\delta S = 0$ .

Usando

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \tilde{\delta} \mathcal{L}(x) + \delta X^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L}(x)$$

p. 164                      p. 164

$$y$$

$$d^4x' = \left| \det \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| d^4x = \left| \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & \dots \\ \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & 1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right| d^4x$$

$$= (1 + \partial_{\nu} \delta x^{\nu}) d^4x, \quad \leftarrow \text{ignorando términos de orden } (\delta x)^2$$

la condición  $\delta S = 0$  equivale a

$$L'(x) = L(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} L(x) + \tilde{\delta} L(x)$$

$$0 = \int d^4x \left[ \underbrace{(1 + \partial_{\nu} \delta x^{\nu}) L(x)}_{\partial_{\nu} (\delta x^{\nu} L(x))} + \underbrace{\delta x^{\mu} \partial_{\mu} L(x) + \tilde{\delta} L(x)}_{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{\ell}} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \tilde{\delta} \partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x)} - L(x) \right]$$

p.164

$$\stackrel{\text{p.161}}{=} \underbrace{\partial_{\nu} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \right)}_{\text{E-L}} \underbrace{\tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x)}_{\partial_{\nu} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x)}$$

apenas ahora usamos ecs. de mov.

$$\underbrace{\partial_{\nu} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x) \right)}_{\delta \varphi_{\ell}(x) - \delta x^{\nu} \partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x)}$$

p.164

es decir,

$$0 = \int d^4x \partial_{\nu} \left[ \delta x^{\nu} L + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell})} (\delta \varphi_{\ell} - \delta x^{\nu} \partial_{\nu} \varphi_{\ell}) \right].$$

Recordando que  $\delta x^{\mu} = \omega^{\alpha} X_{\alpha}^{\mu}$ ,  $\delta \varphi_{\ell}(x) = \omega^{\alpha} \Phi_{\ell \alpha}(x)$ , esto es

$$0 = \int d^4x \omega^\alpha \partial_\mu \left[ X_\alpha^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} (\Phi_{l\alpha} - X_\alpha^\nu \partial_\nu \varphi_l) \right].$$

Concluimos entonces que la (densidad de quadri-) corriente

de Noether

suma sobre l

$$\boxed{J_\alpha^\mu \equiv X_\alpha^\nu \left( -\delta_\nu^\mu \mathcal{L} + \partial_\nu \varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \Phi_{l\alpha}} \quad (10)$$

una corriente por cada transformación independiente

se conserva:  $\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0$

(si  $\delta S = \int d^4x \omega^\alpha \partial_\mu \Xi_\alpha^\mu \neq 0$ , entonces la corriente conservada es  $J_\alpha^\mu - \Xi_\alpha^\mu$ )

$$\partial_0 J_\alpha^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

densidad de carga  $\uparrow$  densidad de corriente

$$\frac{dx^2}{dx^1}$$

lo cual implica a su vez que la carga de Noether

$$\boxed{Q_\alpha \equiv \int d^3x J_\alpha^0}$$

se conserva:  $\frac{d}{dt} Q_\alpha = \int d^3x \partial_0 J_\alpha^0 = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = 0$

ec. de continuidad

condiciones de borde apropiadas

Es importante resaltar que para deducir esta ley

de conservación fue necesario utilizar las ecs. de mov.

Hemos demostrado entonces (por construcción explícita) el teorema de Noether: cada simetría continua da lugar a una ley de conservación, es decir, a la existencia de una corriente/carga conservada.

Como veremos en breve, la carga de Noether  $Q_\alpha$  resulta ser el generador de la transformación en cuestión.

(Antes habíamos mencionado ya esta conexión en sentido inverso, y a nivel cuántico: en la p.142 vimos que a partir de una carga conservada  $\hat{Q}$  se puede definir una simetría continua.) Pero para hacer nuestra discusión más concreta,

13: 01/03/17

conviene primero aplicar el resultado general (10) a ejemplos:

1) Traslaciones  $X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$ ,  $\Phi_{l\nu} = 0$  (p.165)

$\Rightarrow$  existen 4 corrientes conservadas  $T_\nu^\mu$   $\leftarrow$  componente  $\leftarrow$  nombre de la corriente

$$T_\nu^\mu \equiv X_\nu^\rho \left( -\delta_\rho^\mu \mathcal{L} + \partial_\rho \varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \Phi_{l\nu}$$

$$T_\nu^\mu = \partial_\nu \varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

Tensor de Energía-Momento  
(o Energía-Esfuerzo) canónico

$\left( \begin{array}{c|c} T^0_0 & T^0_i \\ \hline T^j_0 & T^j_i \end{array} \right)$

corriente por translaciones en  $t$       corriente por translaciones en  $x^i$

densidad de carga      densidad de corriente espacial

Por construcción,  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , y

Las cargas conservadas correspondientes son

$$P_\nu \equiv \int d^3x T^0_\nu = \int d^3x \left( \partial_\nu \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\ell(x))} - \delta^0_\nu \mathcal{L} \right)$$

(Cuadri-) Momento de nuestros campos

En particular, la carga para  $\nu=0$  es el Hamiltoniano

$$H = P_0 = \int d^3x \left( \partial_0 \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \mathcal{L} \right) \quad \text{Energía}$$

Densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H} \equiv T^0_0$

Notemos que esta relación entre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{L}$  es análoga

a la conexión usual entre el Hamiltoniano y el Lagrangiano.

En efecto, para un sistema con  $N$  grados de libertad  $q_c(t)$ ,

descrito por  $S[q_c] = \int dt L(q_c(t), \dot{q}_c(t))$ ,  $\leftarrow 1, \dots, N$

definimos el momento canónico conjugado a  $q_c(t)$ ,  $p_c(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c(t)}$ ,

y el Hamiltoniano

$$H(q_c, p_c) \equiv \sum_{c=1}^N \dot{q}_c p_c - L(q_c, \dot{q}_c).$$



Para un sistema de campos  $\varphi_l(x)$ , donde tenemos un número infinito de grados de libertad, etiquetados con el subíndice discreto  $l$  y el índice continuo  $\vec{x}$ , procedemos de manera similar: recordando que en este caso el Lagrangiano es una funcional

$$L[\varphi_l(t), \dot{\varphi}_l(t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_l(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_l(t, \vec{x}), \dot{\varphi}_l(t, \vec{x})) \equiv L(t),$$

$\uparrow$  independiente de  $\varphi_l(t)$  a  $t$  fijo       $\leftarrow \equiv \partial_t \varphi_l(\vec{x}, t)$   
 $\leftarrow$  independiente de  $\varphi_l(t, \vec{x})$  a  $\vec{x}$  fijo

definimos la densidad de momento canónico conjugado a  $\varphi_l(t, \vec{x})$ ,

$$\pi_l(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_l(x)} \stackrel{p.162}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_l(x)}$$

y el Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^3x (\dot{\varphi}_l(x) \pi_l(x) - \mathcal{L}(x))$$

$\swarrow \quad \searrow$  suma sobre  $l$  implícita  
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \mathcal{H}}$

que en verdad coincide con la carga de Noether asociada a transiciones en el tiempo,  $H = P_0$  ( $\leftrightarrow \mathcal{H} = T^0$ ) ✓

El teorema de Noether nos permite además deducir la forma de las cargas asociadas a la invariancia bajo traslaciones espaciales, es decir, el momento espacial del campo,

$$\vec{P} = - \int d^3x \vec{\nabla} \varphi_\ell \Pi_\ell \quad \text{p. 171}$$

↑ signo por índice espacial subido:  $P^i \equiv \int d^3x T^{0i}$

Es importante NO confundir a la densidad de momento espacial  $T^{0i}(x)$  con la densidad de momento canónico  $\Pi_\ell(x)$ .

## 2) Transformaciones de Lorentz (p. 166)

$$X_{\sigma\rho}^\mu = \delta_\sigma^\mu x_\rho - \delta_\rho^\mu x_\sigma, \quad \Phi_{\text{Lorentz}} = (iS_{\sigma\rho})_{\ell\ell'} \varphi_{\ell'}(x)$$

$\underbrace{\quad}_{\equiv \alpha} \quad \underbrace{\quad}_{\equiv \alpha} \quad \uparrow \text{generadores de Lorentz}$

⇒ 6 corrientes conservadas

$$J_{\sigma\rho}^\mu = \underbrace{(\delta_\sigma^\nu x_\rho - \delta_\rho^\nu x_\sigma)}_{X_{\sigma\rho}^\nu} \underbrace{(-\delta_\nu^\mu \mathcal{L} + \partial_\nu \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)})}_{T_{\nu}^\mu \text{ p. 170}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\ell)} \underbrace{(iS_{\sigma\rho})_{\ell\ell'} \varphi_{\ell'}}_{\Phi_{\text{Lorentz}}}$$

i.e.,

$$J_{\sigma\rho}^\mu = T_{\sigma}^\mu x_\rho - T_{\rho}^\mu x_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\ell)} (iS_{\sigma\rho})_{\ell\ell'} \varphi_{\ell'}$$

$$\pi_l \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_l)}$$

Las cargas asociadas serán los generadores de Lorentz

$$J_{\sigma\rho} \equiv \int d^3x \mathcal{J}_{\sigma\rho}^0 = \int d^3x \left( T^0_{\sigma\rho} - T^0_{\rho\sigma} - \pi_l (iS_{\sigma\rho})_{ll'} \varphi_{l'} \right).$$

Las 3 cargas conservadas por la invariancia rotacional son el momento angular (generadores de rotaciones)

$$J_{ij} = \int d^3x \left( T^0_{ij} - T^0_{ji} - \pi_l (iS_{ij})_{ll'} \varphi_{l'} \right).$$

momento angular orbital ( $\sim \vec{x} \times \vec{p}$ )
momento angular de espín (es decir, por cambio de aspecto interno del campo bajo rotaciones)

Las 3 cargas relacionadas con la invariancia bajo empujones son

$$J_{0i} = \int d^3x \left( T^0_{0i} - T^0_{i0} - \pi_l (iS_{0i})_{ll'} \varphi_{l'} \right).$$

Tendremos q no pensar en estas como cantidades conservadas, porque tienen dependencias explícitas del tiempo, así que a nivel cuántico

$$0 = \frac{d\hat{J}_{0i}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{J}_{0i}] + \frac{\partial \hat{J}_{0i}}{\partial t} \leftrightarrow [\hat{J}_{0i}, \hat{H}] \neq 0.$$

3) Simetría Interna  $X_{\alpha}^M = 0$ ,  $\Phi_{lI\alpha} = (iT_{\alpha})_{II'} \varphi_{I'}$  (p.167)

$\alpha = 1, \dots, \dim G$   
 $\Rightarrow \dim G$  corrientes conservadas

$$J_\alpha^M = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_{II})} (iT_\alpha)_{II'} \phi_{II'}$$

y cargas conservadas

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J_\alpha^0 = - \int d^3x \Pi_{II} (iT_\alpha)_{II'} \phi_{II'}$$

L16: 12/09/22

p.ej., carga eléctrica solo caso particular

Habiendo visto ejemplos, intentemos ahora entender el sentido en el que la carga de Noether en el caso general,  $Q_\alpha$ , es el generador de la transformación de simetría correspondiente. Para ello, necesitamos extender la noción de paréntesis de Poisson al caso de campos.

Recordemos primero que para un sistema discreto con

variables canónicas  $q_c, p_c$  y hamiltoniano  $H(q_c, p_c)$ ,  
 las ecu. de movimiento son  $\leftarrow c=1, \dots, C$

$$\dot{q}_c = \frac{\partial H}{\partial p_c}, \quad \dot{p}_c = - \frac{\partial H}{\partial q_c}$$

Ecuaciones de Hamilton

Para cualquier función en el espacio fase,  $f(q_c(t), p_c(t), t)$ ,  
 tenemos entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{c=1}^C \left( \frac{\partial f}{\partial q_c} \dot{q}_c + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c \right) \stackrel{\text{Hamilton}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{c=1}^C \left( \frac{\partial f}{\partial q_c} \frac{\partial H}{\partial p_c} - \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial H}{\partial q_c} \right)$$

es decir,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_{\mathcal{P}},$$

donde definimos, para cualesquiera 2 funciones  $A, B$  en el espacio fase,

$$\boxed{\{A, B\}_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{c=1}^C \left( \frac{\partial A}{\partial q_c} \frac{\partial B}{\partial p_c} - \frac{\partial A}{\partial p_c} \frac{\partial B}{\partial q_c} \right)}$$

Paréntesis de Poisson (no confundir con anticomutador)

Notemos que  $\boxed{\{q_c, p_d\}_{\mathcal{P}} = \delta_{cd}}$ , y las ecs. de Hamilton son  $\dot{q}_c = \{q_c, H\}_{\mathcal{P}}$ ,  $\dot{p}_c = \{p_c, H\}_{\mathcal{P}}$ .

Los paréntesis de Poisson tienen las mismas propiedades que los conmutadores: son claramente antisimétricos, y se puede mostrar que satisfacen la identidad de Jacobi,

$$\{A, \{B, C\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} + \{B, \{C, A\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} + \{C, \{A, B\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} = 0.$$

De hecho, la receta para la cuantización canónica de un sistema es justamente reemplazar a los paréntesis de Poisson

entre un par de variables clásicas con el conmutador entre los operadores cuánticos correspondientes:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}}_{\text{P}}.$$

Para funciones  $A, B$  arbitrarias, puede haber problemas de ordenamiento. Lo que hacemos es postular la relación

básica 
$$[\hat{q}_c, \hat{p}_d] = i\hbar \delta_{cd},$$
 ← proveniente de  $\{q_c, p_d\}_{\text{P}} = \delta_{cd}$   
 donde  $\hbar = 1$

y deducir los otros conmutadores a partir de este.

En el caso de campos, tenemos variables canónicas

$$\varphi_{\ell}(x), \pi_{\ell}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\ell}(x)}, \text{ y Hamiltoniano}$$

$$H[\varphi_{\ell}(t), \pi_{\ell}(t)] \equiv \int d^3x \mathcal{H}(\varphi_{\ell}(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_{\ell}(t, \vec{x}), \pi_{\ell}(t, \vec{x})).$$

↑ independiente de  $\varphi_{\ell}$  a  $\vec{x}$  fijo

Las ecs. de Hamilton (equivalentes a E-L) son ahora

$$\dot{\varphi}_{\ell}(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_{\ell}(x)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{\ell}(x)},$$

← No manifiestamente  
 ✓ covariantes bajo Poincaré

$$\dot{\pi}_{\ell}(x) = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_{\ell}(x)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{\ell}(x)} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \varphi_{\ell}(x))}.$$

Para funciones en el espacio fase,  $A[\varphi_l(t), \pi_l(t), t]$   
 $B[\varphi_l(t), \pi_l(t), t]$  (como  $H$  ó  $L$ ), definiremos los  
paréntesis de Poisson

$$\{A(t), B(t)\}_P \equiv \sum_l \int d^3x \left( \frac{\delta A}{\delta \varphi_l(x)} \frac{\delta B}{\delta \pi_l(x)} - \frac{\delta A}{\delta \pi_l(x)} \frac{\delta B}{\delta \varphi_l(x)} \right)$$

y tenemos nuevamente

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}_P,$$

$$\{\varphi_l(t, \vec{x}), \pi_{l'}(t, \vec{x}')\}_P = \delta_{ll'} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

Podemos ahora finalmente retomar nuestra discusión del  
 papel de las cargas de Noether. Recordando que en el  
 caso general la densidad de carga de Noether es (p. 169, 170, 172)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\alpha^0 &= X_\alpha^\nu T_{\nu}^0 - \pi_{l'} \Phi_{l'\alpha} \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \text{implícita} \\ &= X_\alpha^0 \mathcal{H} + X_\alpha^i \underbrace{\pi_{l'} \partial_i \varphi_{l'}}_{\text{densidad de } P_i} - \pi_{l'} \Phi_{l'\alpha}, \end{aligned}$$

y suponiendo que, como en todos los ejemplos que vimos,  $\Phi_{l'\alpha}$   
 es función solo de  $\varphi_l$  y no de  $\dot{\varphi}_l \leftrightarrow \pi_l$ , podemos calcular

el paréntesis de Poisson a tiempos iguales  $\circ$

$$\left\{ \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}'), \varphi_\ell(t, \vec{x}) \right\}_P = \sum_{\ell''} \int d^3x'' \left( \frac{\delta \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')}{\delta \varphi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} \frac{\delta \varphi_\ell(t, \vec{x})}{\delta \pi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} - \frac{\delta \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')}{\delta \pi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} \frac{\delta \varphi_\ell(t, \vec{x})}{\delta \varphi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} \right) \int d^3x'' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'')$$

p. 162

$$= - \frac{\delta \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})} = X_\alpha^0 \mathcal{H} + X_\alpha^i \pi_{\ell'} \partial_i \varphi_{\ell'} - \pi_{\ell'} \Phi_{\ell'}$$

$$= -X_\alpha^0(t, \vec{x}') \underbrace{\frac{\delta \mathcal{H}(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\ell} \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} - X_\alpha^i(t, \vec{x}') \underbrace{\frac{\delta \pi_{\ell'}(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})}}_{\delta_{\ell'\ell} \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} \partial_i \varphi_{\ell'} + \underbrace{\frac{\delta \pi_{\ell'}(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})}}_{\delta_{\ell'\ell} \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} \bar{\Phi}_{\ell'}$$

$$= \partial_0 \varphi_\ell \text{ por ec. de Hamilton}$$

es decir,

$$\left\{ \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}'), \varphi_\ell(t, \vec{x}) \right\}_P = \left( -X_\alpha^0(t, \vec{x}') \partial_\omega \varphi_\ell(t, \vec{x}) + \bar{\Phi}_{\ell'}(t, \vec{x}) \right) \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Integrando sobre  $\vec{x}'$  para obtener la carga  $Q_\alpha(t) \equiv \int d^3x' \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')$ ,  
concluimos entonces que

$$\left\{ Q_\alpha(t), \varphi_\ell(t, \vec{x}) \right\}_P = \underbrace{-X_\alpha^0(t, \vec{x})}_{\frac{1}{\omega_\alpha} \delta X^\omega} \partial_\omega \varphi_\ell(t, \vec{x}) + \underbrace{\bar{\Phi}_{\ell'}(t, \vec{x})}_{\frac{1}{\omega_\alpha} \delta \varphi_\ell},$$



o en otras palabras,

$$\left\{ \omega^\alpha Q_\alpha(t), \varphi_\ell(\vec{x}, t) \right\}_{\mathbb{P}} = \delta \varphi_\ell(\vec{x}, t) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_\ell(\vec{x}, t) = \tilde{\delta} \varphi_\ell(\vec{x}, t)$$

↑ ↑  
sin (o con) suma sobre  $\alpha$

Este es el resultado que habíamos prometido: es en este sentido que la carga de Noether  $Q_\alpha$  genera la transformación de simetría en cuestión.

Es posible también mostrar que las cargas "Poissonizan" entre sí de la manera esperada con base en el grupo de simetrías involucrado — p.ej. para los generadores de Lorentz se obtienen las reglas de conmutación (2) del álgebra de Lie  $so^+(3,1)$ ,

$$\left\{ J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho} \right\}_{\mathbb{P}} = \eta^{\mu\rho} J^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\lambda} J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} J^{\mu\lambda}.$$

Al cuantizar nuestra teoría de campo(s), las variables canónicas  $\varphi_\ell, \Pi_\ell$  se convertirán en operadores  $\hat{\varphi}_\ell, \hat{\Pi}_\ell$ , con lo cual las cargas de Noether  $Q_\alpha$  se volverán también

operadores (hermitianos)  $\hat{Q}_\alpha$ , que serán los generadores de la transformación de simetría en el sentido de que

$$[i\omega \hat{Q}_\alpha(t), \hat{\phi}_l(\vec{x}, t)] = -\tilde{\delta} \hat{\phi}_l(\vec{x}, t),$$

y satisfarán las relaciones de conmutación del álgebra de simetría  $g$ ,  $[\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma \hat{Q}_\gamma$ .

Obtendremos así expresiones explícitas para el cuadrimomento  $\hat{P}^\mu$ , los generadores de Lorentz  $\hat{J}^{\mu\nu}$  y las cargas asociadas a simetrías internas  $\hat{Q}_\alpha$ , → p.ej. carga eléctrica definidos todos como operadores cuánticos que actúan sobre el espacio de Hilbert de nuestro(s) campo(s).

LI4: 10/09/18

Antes habíamos definido generadores  $\hat{P}^\mu$ ,  $\hat{J}^{\mu\nu}$ ,  $\hat{Q}_\alpha$  que actuaban sobre un espacio que a primera vista podría parecer MUY distinto: el espacio de Fock asociado a un sistema de partículas. Por supuesto, con base en lo que aprendimos anteriormente en este curso, esperamos que el operador de campo  $\hat{\phi}_l(x)$  se pueda relacionar con operadores de

creación y aniquilación  $\hat{a}_{p\lambda n}^+$ ,  $\hat{a}_{p\lambda n}$ , por lo que sospecharíamos que estos 2 espacios de Hilbert resultarían ser idénticos, y ambos conjuntos de generadores coincidirán.

Verificaremos esto en detalle más adelante; pero por ahora, podemos notar que, según vimos antes, el operador de campo  $\hat{\phi}_l(x)$  entendido como un operador que actúa sobre el espacio de Fock transformaba bajo, p.ej., translaciones de acuerdo con (p.149)

$$e^{i\hat{P}_m a^m} \hat{\phi}_l(x) e^{-i\hat{P}_m a^m} = \hat{\phi}_l(x+a),$$

que en versión infinitesimal corresponde a

$$[i\epsilon^m \hat{P}_m, \hat{\phi}_l(x)] = \hat{\phi}_l(x+\epsilon) - \hat{\phi}_l(x) = \epsilon^m \partial_m \hat{\phi}_l(x),$$

lo cual justamente coincide con la variación  $\tilde{\delta} \hat{\phi}_l(x)$  del operador  $\hat{\phi}_l(x)$  que se obtiene al cuantizar el campo clásico  $\phi_l(x)$  que hemos analizado aquí.

Lo mismo sucede para los otros generadores ( $\hat{J}^{\mu\nu}$ ,  $\hat{Q}$ , etc.), con lo cual comenzamos a vislumbrar que en efecto habrá una conexión muy directa entre el sistema de partículas

que estudiamos anteriormente (siguiendo la "ruta I" de la p.151) y el sistema de campos que estamos estudiando ahora (siguiendo la "ruta II").

Para ver esta conexión en completo detalle, habiendo ya entendido bien la manera en que se describe un sistema de campos a nivel clásico, procedamos ahora sí a la descripción cuántica. Sabemos que el procedimiento de cuantización canónica está basado en el formalismo hamiltoniano, y consiste en promover las variables canónicas  $\varphi_{\ell}(t, \vec{x}), \pi_{\ell}(t, \vec{x})$  a operadores  $\hat{\varphi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell}(t, \vec{x})$  en el cuadro de Heisenberg — ó  $\hat{\varphi}_{\ell}(\vec{x}) \equiv \hat{\varphi}_{\ell}(0, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell}(\vec{x}) \equiv \hat{\pi}_{\ell}(0, \vec{x})$  en el cuadro de Schrödinger —, que a tiempos iguales satisfacen las reglas de conmutación básicas

$$[\hat{\varphi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell'}(t, \vec{x}')] = i \delta_{\ell\ell'} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$[\hat{\varphi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}_{\ell'}(t, \vec{x}')] = 0 = [\hat{\pi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell'}(t, \vec{x}')] .$$

Este procedimiento NO es manifiestamente covariante bajo

Lorentz; pero para nosotros la covariancia resultará de partir de una  $\mathcal{L}$  escalar. (Más adelante aprenderemos un procedimiento alternativo, el método de cuantización por integral de trayectoria, que está directamente basado en el formalismo Lagrangiano y es por tanto manifiestamente covariante.)

Llevaremos ahora a cabo la cuantización canónica del sistema de campos más sencillo posible: un solo campo escalar real y 'libre'  $\equiv \mathcal{L}$  cuadrática,  $\varphi(x)$ , que con base en lo que aprendimos en la parte anterior del curso esperaríamos que describa partículas con espín cero, bosónicas, sin carga y sin interacciones.

Nuestro punto de partida es la densidad Lagrangiana cuadrática más general posible construida con este campo:

↙ elegimos coeficiente por convención, ajustando la normalización del campo

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

$\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$  'Término cinético'

'Término de masa':  $m$  resultará ser la masa de las partículas asociadas a  $\varphi(x)$

(Término lineal en  $\varphi$  no cambiaría sustancialmente la física — ver p. 108.)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Usando la fórmula de Euler-Lagrange,  $\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$ ,  
deducimos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad \text{Ec. de Klein-Gordon}$$

ec. de mov. lineal,  
gracias a que  
 $\mathcal{L}$  es cuadrático

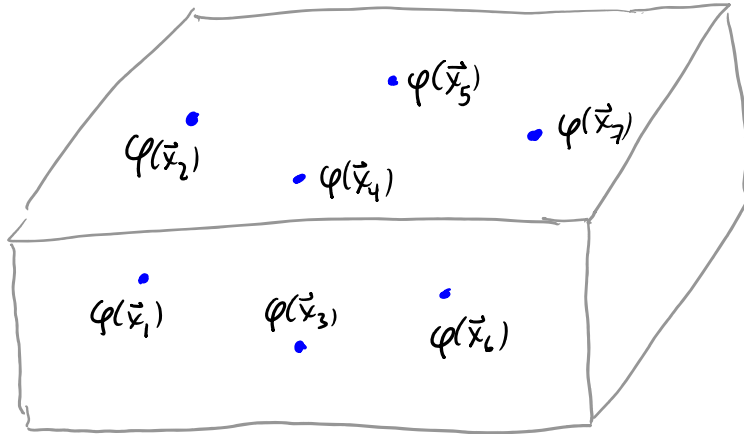
$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\downarrow} \equiv \partial^2 - \vec{\nabla}^2 \equiv \partial^2 \equiv \square \quad \text{Laplaciano/D'Alembertiano}$$

Para  $m^2=0$ , esto no es otra cosa que la ec. de ondas, con  
velocidad de propagación  $= 1$ . Cuando  $m^2 \neq 0$ , la ec.  
de Klein-Gordon todavía describe la propagación de ondas  
en el campo, en general con velocidad  $\neq 1$ . Para ver  
esto, conviene cambiar nuestras variables básicas  $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_x(t)$   
a unas nuevas variables  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \tilde{\varphi}_p(t)$  obtenidas a través  
de una transformada de Fourier,

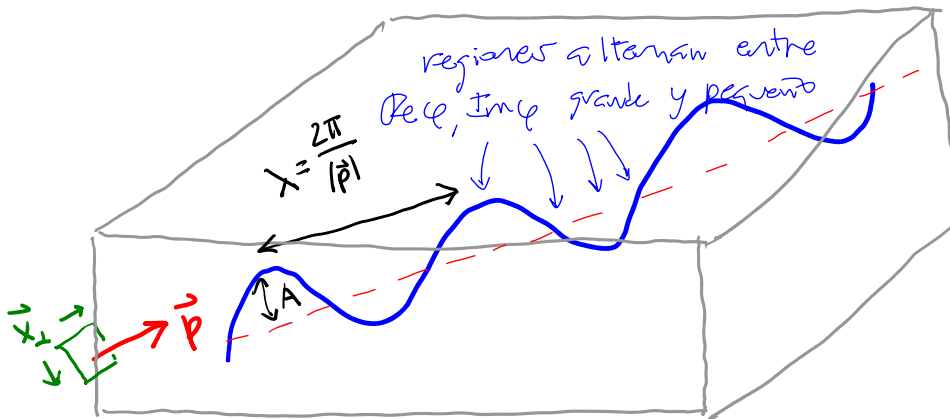
$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int \int^3 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{\int^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

que satisfacen  $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$ , como consecuencia de  $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ .

¿Qué significan las nuevas variables? En lugar de describir la configuración del campo (a un tiempo dado) especificando su valor en cada punto espacial  $\vec{x}$ ,



damos ahora la amplitud  $\tilde{\varphi}(\vec{p})$  de cada uno de sus modos de Fourier - p.ej.  $\tilde{\varphi}(\vec{p}') = A (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) + (\vec{p}' \rightarrow -\vec{p})^*$   
 corresponde a  $\varphi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(\vec{p}') = A e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \text{conjugado complejo}$ ,  
 que es una onda plana (independiente de  $\vec{x}_\perp \perp \vec{p}$ ):



En términos de estas nuevas variables, la ec. de mov. es

$$\underbrace{\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2}_{\partial_t^2 \partial^m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \underbrace{\varphi(t, \vec{x})}_{\tilde{\varphi}(t, \vec{p})} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0,$$

es decir,

$$(\underbrace{\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2}_{\equiv E_{\vec{p}}^2}) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial_t^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

$E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia

$\omega = E_{\vec{p}}$ , y cuya solución general (con  $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$ ) es

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = A_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + A_{-\vec{p}}^* e^{i\omega t}.$$

Vemos entonces que los modos de Fourier  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  son los

modos normales del campo  $\varphi(t, \vec{x})$ : patrones

colectivos de movimiento que están desacoplados

entre sí, cada uno tiene simplemente la dependencia temporal

de un oscilador armónico, y cualquier configuración

del campo  $\varphi(t, \vec{x})$  puede ser expresada como una

superposición de modos normales. Todo esto es exactamente

análogo a lo que sucede para una cuerda de guitarra o la

membrana de un tambor — como dijimos antes,  $\varphi(t, \vec{x})$  se

puede visualizar como una gelatina que llena todo el espacio y



$\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  no interactúan  
aunque  $\varphi(t, \vec{x})$  sí

es capaz de oscilar. Según hemos visto aquí, un campo libre es una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados.  
uno por cada  $\vec{p}$

En el modo normal caracterizado por el vector  $\vec{p}$ , el campo  $\varphi(t, \vec{x}) \propto e^{+iE_{\vec{p}}t + i\vec{p} \cdot \vec{x}}$  oscila como una onda plana con número de onda  $|\vec{p}|$ , que se propaga en la dirección especificada por  $\vec{p}$ , con una velocidad de fase  $v_f \equiv \omega/|\vec{p}| = E_{\vec{p}}/|\vec{p}|$ . Por otra parte, un paquete de ondas con número de onda promedio  $\vec{p}$  se propaga con una velocidad de grupo  $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial E_{\vec{p}}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad \leftrightarrow \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}_g}{\sqrt{1 - \vec{v}_g^2}}$$

L14: 06/03/17 tal como partícula clásica

Para llevar a cabo la cuantización canónica, pasamos primero a la descripción Hamiltoniana, calculando a

partir de  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$  el

momento canónico  $\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi(x))} = \partial_0 \varphi(x) \equiv \dot{\varphi}(x)$   
y el Hamiltoniano

$$H[\varphi(t), \Pi(t)] \equiv \int d^3x \left\{ \dot{\varphi} \Pi - \mathcal{L} \right\} \\ = \int d^3x \left\{ \dot{\varphi}^2 - \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] \right\},$$

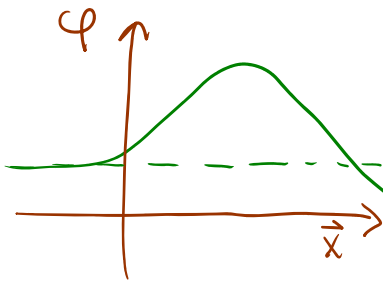
es decir,

$\varphi^2$

$$\mathcal{H}(\varphi(x), \vec{\nabla}\varphi(x), \pi(x)) = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Energía cinética:  
Costo por variación temporal

Energía potencial  $V(\varphi)$ :  
Costo por tener  $\varphi \neq 0$



Costo energético por variar el valor del campo de un punto a otro. Se trata en realidad de energía potencial, aunque

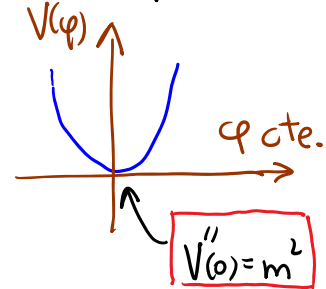


figura dentro del término  $\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$  en  $\mathcal{L}$ , que convencionalmente se llama 'cinético'.

(Notar que es término lineal,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + n\varphi$$

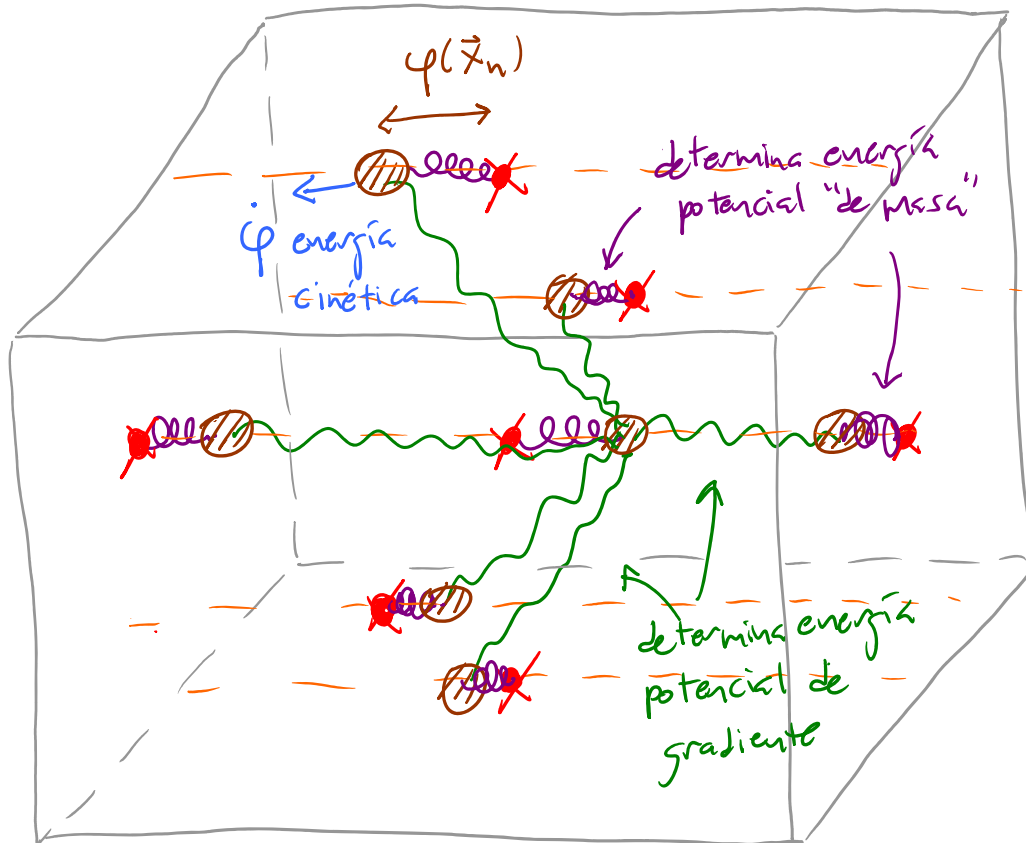
$$\equiv \frac{1}{2} m^2 (\varphi - \varphi_0)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi_0^2$$

$\varphi_0 \equiv -n/m^2$

el mínimo se corre a  $\varphi = \varphi_0$ .  
Y podemos redefinir  $\varphi - \varphi_0 \rightarrow \varphi$ ,  
 $V \rightarrow V + \frac{1}{2} m \varphi_0^2$ .)

Vemos aquí que el campo de Klein-Gordon real se puede interpretar como la versión continua de una colección de pelotitas esparcidas sobre una red 3-dimensional, que se mueven solo en 1-dim y están acopladas a la red y entre sí con resortes:

- $\times$  = punto de la red
- $\textcircled{\text{///}}$  = pelotita
- $\text{---}$  = resorte a la red
- $\text{---}$  = resorte interpelota



Para cuantizar, imponemos las relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] = 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')]$$

$\underbrace{\quad}_{\partial_t \hat{\varphi}(t, \vec{x}')} \quad \swarrow \text{a tiempo iguales} \quad \searrow$

Al igual que en el caso discreto, la ec. de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} \hat{O}(t) = i [\hat{H}, \hat{O}(t)] + \partial_t \hat{O}(t)$$

implica en particular las ecs. de Hamilton

$$\hat{H} = \int d^3x' \left( \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right)$$

$$\partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) = i \left[ \int d^3x' \frac{1}{2} \hat{\pi}(t, \vec{x}')^2, \hat{\phi}(t, \vec{x}) \right] = \hat{\pi}(t, \vec{x}) \quad \left( = \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\pi}(x)} \right),$$

dependencia total de t;  
parcial por que  $\vec{x}$  fijo

$$\int d^3x' \frac{1}{2} \left( \hat{\pi}(t, \vec{x}') [\hat{\pi}(t, \vec{x}'), \hat{\phi}(t, \vec{x})] + [\hat{\pi}(t, \vec{x}'), \hat{\phi}(t, \vec{x})] \hat{\pi}(t, \vec{x}') \right)$$

$-i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad -i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$

$$\partial_t \hat{\pi}(t, \vec{x}) = i \left[ \int d^3x' \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}(t, \vec{x}'))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}')^2 \right\}, \hat{\pi}(t, \vec{x}) \right]$$

$-\phi(t, \vec{x}') \vec{\nabla}^2 \phi(t, \vec{x}')$

$$= + \vec{\nabla}^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}) - m^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}) \quad \left( = - \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\phi}(x)} \right),$$

que juntas implican a su vez la ec. de Euler-Lagrange

$$\boxed{(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}(x) = 0}. \quad \text{Klein-Gordon} \quad \checkmark$$

Sabemos ya (p.186) que esta ecuación dice que la combinación

$$\hat{\tilde{\phi}}(t, \vec{p}) = \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{\phi}(t, \vec{x})$$

← 1 operador por cada  $\vec{p}$   
(en lugar de uno por cada  $\vec{x}$ )

es un oscilador armónico, por lo que conviene descomponerlo,

junto con su variable conjugada  $\hat{\tilde{\pi}}(t, \vec{p}) = \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$ ,

en operadores de ascenso y descenso  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ :

$$\hat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)$$

signo necesario para tener  $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi} \leftrightarrow \hat{\tilde{\phi}}_{\vec{p}}^\dagger = \hat{\tilde{\phi}}_{-\vec{p}}$

↑  
t=0 para hacer contacto con versión de Schrödinger

$\hat{\tilde{\phi}}(0, \vec{p}) \quad \left( \text{análogo a } \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right),$

$$\hat{\Pi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \underbrace{(-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)}_{\hat{\Pi}(0, \vec{p}) \text{ (análogo a } \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger))}.$$

Usando el hecho de que  $\hat{\Pi}(0, \vec{x}) = \partial_t \hat{\varphi}(0, \vec{x})$ , podemos reconstruir

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}} t} \right),$$

o, cambiando la variable de integración  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  en el 2do. término,

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

L17: 14/09/22 (130 min)

↑ término de "frecuencia positiva"

También hubiéramos podido obtener este resultado

usando  $\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \exp(i\hat{H}t) \hat{\varphi}(0, \vec{x}) \exp(-i\hat{H}t)$ , o simplemente

notando que este es la solución más general a la ec. de K-6:

es la versión cuántica de  $\varphi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{-\vec{p}}^* e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$ .

Reconocemos aquí justamente al operador de campo que

armamos para partículas en la etapa anterior del curso (p.139),

comenzando con  $\hat{a}_{\vec{p}}$  y  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ , entendiendo ahora sí la conexión que existe con el oscilador armónico.

L15: 12/09/18

Más aún, a partir de la relación de conmutación básica

$$i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = \left[ \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] \overset{\hat{\varphi}(t, \vec{x}')}{\leftarrow}$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{p'}}{2}} i \left( -\hat{a}_{\vec{p}'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}} \left\{ \begin{aligned} & -[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{-i(E_p+E_{p'})t+i\vec{p}\cdot\vec{x}+i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ & +[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{-i(E_p-E_{p'})t+i\vec{p}\cdot\vec{x}-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ & -[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{i(E_p-E_{p'})t-i\vec{p}\cdot\vec{x}+i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ & +[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{i(E_p+E_{p'})t-i\vec{p}\cdot\vec{x}-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \end{aligned} \right\},$$

podemos deducir las relaciones

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'), \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] \quad \forall \vec{p}, \vec{p}'$$

no manifiestamente evidente, justo como  $[\hat{\varphi}, \hat{\Pi}]$

que coinciden exactamente con las de los operadores de creación y aniquilación de partículas que vimos antes.

Concluimos entonces que el espacio de Hilbert de un campo libre relativista coincide con el espacio de Fock que describe a un número arbitrario de partículas relativistas libres!

Es decir, tenemos una correspondencia entre los estados de estos 2 espacios de Hilbert:

- $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$ , con  $\langle 0|0\rangle = 1$

Estado con el campo sin excitar (tods los osciladores en su estado base: " $|0,0,0,0,\dots\rangle$ ")  $\longleftrightarrow$  Vacío (estado sin partículas)

- $|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$  (con  $\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$ )

Estado con el oscilador (onda plana)  $\vec{p}$  excitado a su primer nivel (" $|0,0,0,1,0,0,\dots\rangle$ ")  $\longleftrightarrow$  Estado con 1 partícula con momento  $\vec{p}$

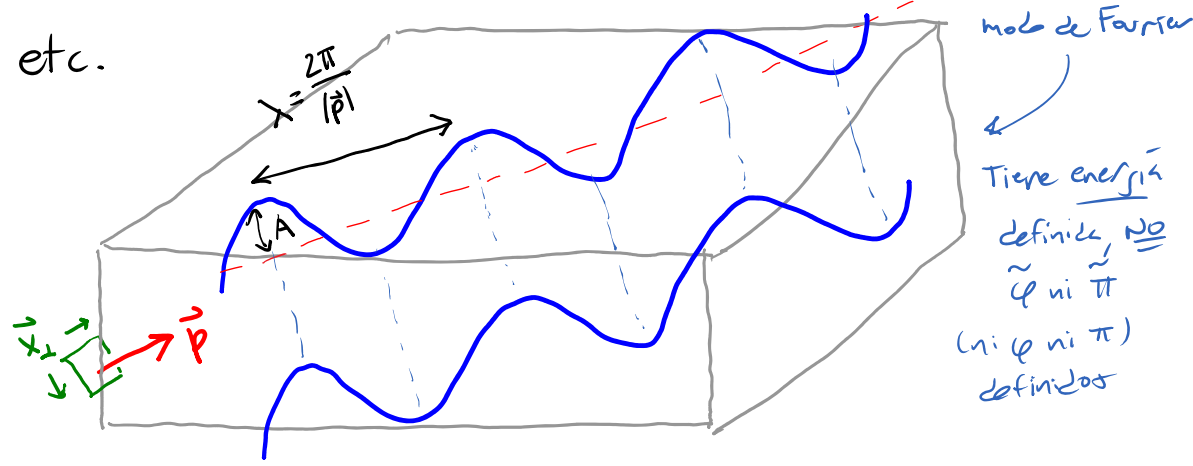
↖ lugar  $\vec{p}$

- $|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$  (con  $\frac{1}{\sqrt{2!}}$  adicional si  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ )

Estado con 2 osciladores excitados  $\longleftrightarrow$  Estado con 2 partículas con momentos  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$

al 1er. nivel (" $|0,0,0,1,0,0,1,0,0,\dots\rangle$ ")  
 o, si  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ , 1 oscilador en el 2do. nivel (" $|0,0,0,2,0,0,\dots\rangle$ ")

• etc.



Para tener una equivalencia total, solo nos falta verificar que los estados cuánticos del campo tienen las energías apropiadas, es decir, que el hamiltoniano de Klein-Gordon es el correcto para describir a partículas relativistas libres. Tenemos

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(0) = \int d^3x \frac{1}{2} \left\{ \hat{\Pi}(0, \vec{x})^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}))^2 + m^2 \hat{\phi}(0, \vec{x})^2 \right\},$$

↑  
H se conserva

$$\text{con } \hat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger),$$

↑  
cambiar  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  por factorizar fase

$$\vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} i\vec{p} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger),$$

$$\hat{\Pi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} iE_{\vec{p}} (-\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger).$$

Usando el hecho de que  $\int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{p}'\cdot\vec{x}} f(\vec{p}, \vec{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, -\vec{p})$ ,  
podemos deducir que  $(2\pi)^3 \delta^0(\vec{p} + \vec{p}')$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left\{ -E_{\vec{p}}^2 (-\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)(-\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) \right. \\ &\quad + \vec{p}^2 (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)(\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) \\ &\quad \left. + m^2 (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)(\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{p}}} \left\{ \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} (-E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger (-E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger (E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}} (E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) \right\}, \end{aligned}$$



o, tras un cambio de variable  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  en el segundo término,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}}).$$

Este es justo el resultado esperado desde el punto de vista de cuantizar el campo: obtenemos el Hamiltoniano usual  $\frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)$  para cada oscilador armónico.

Y casi coincide con el Hamiltoniano que escribimos antes para un sistema de partículas (p. 119). De hecho, usando

$$\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}),$$

veamos que

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( E_{\vec{p}} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}}_{\text{operador de número } \hat{N}_{\vec{p}}} + \frac{1}{2} E_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})}_{\text{energía de punto cero de cada oscilador armónico}} \right)$$

es, salvo una constante, el mismo  $\hat{H}$  que tenemos definido sobre el espacio de Fock. Con esta definición del Hamiltoniano, la energía del vacío ( $\equiv$  estado base del campo)  $|0\rangle$  sería

$$E_{vac} \equiv \int \int^3 p \frac{1}{2} E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) = \infty,$$

$$\propto \int |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| |\vec{p}| \int \int^3 x e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}} = V$$

infinito por  $|\vec{p}_{max}| \rightarrow \infty$  infinito por  
 ( $\lambda_{min} \rightarrow 0$ )  $V \rightarrow \infty$

doblemente infinito, porque nuestro sistema incluye distancias arbitrariamente grandes y pequeñas  
 Este es el primer lugar donde el hecho de tener infinitos grados de libertad no causa problemas.

la energía de 1 partícula ( $\equiv$  1 único oscilador excitado a su primer nivel) es

$$\hat{H} |\vec{p}\rangle = (E_{\vec{p}} + E_{vac}) |\vec{p}\rangle,$$

y más en general, la energía de un estado de multipartículas ( $\equiv$  varios osciladores excitados a niveles arbitrarios) es

$$\hat{H} |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle = (E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_N} + E_{vac}) |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle.$$

Es decir, las diferencias de energía entre los distintos estados son exactamente las mismas que encontramos en la etapa anterior del curso. En ausencia de la gravedad, lo único que importa físicamente son estas diferencias. Podemos entonces simplemente redefinir  $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - E_{vac}$ , es decir, adoptar la convención de que

todas las energías se miden con respecto a  $k$  del vacío.

Otra manera de decir esto mismo es que en lugar de  $\hat{H}$  elegimos usar

$$:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}},$$

donde el símbolo  $: \quad :$  denota el orden normal,

que por definición requiere colocar todos los operadores de creación a la izquierda de los de aniquilación. P.ej.,

$$:\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger: = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \quad :\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_3}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_4}^\dagger: = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_4}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_3}^\dagger, \text{ etc.}$$

(Vale la pena tener presente que  $E_{\text{vac}}$  podría tener una interpretación física directa si comparamos 2 'vacíos' distintos —p.ej., con el campo sujeto a 2 diferentes condiciones de frontera—, o en presencia de la gravedad, donde presumiblemente figura en la ec. de Einstein

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}$ . El primer caso involucra la llamada 'energía de Casimir' —ver Tarea 3—; el segundo tiene relación con la llamada 'constante cosmológica'. )

Hemos logrado verificar entonces que los estados cuánticos del campo de Klein-Gordon real  $\phi(x)$  no solo coinciden con los de un sistema de un número arbitrario de partículas relativistas, sino que además tienen la misma energía / evolución temporal (ver nota en p. 197a).

De manera similar, podemos mostrar que los generadores de traslaciones espaciales que obtuvimos aplicando el teorema de Noether (p. 173),

podemos evaluar en cualquier  $t$ ,  
porque  $\hat{\vec{P}}$  se conserva

$$\hat{\vec{P}} \equiv - \int d^3x \frac{1}{2} \left( \hat{\pi}(0, \vec{x}) \vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}) + \vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}) \hat{\pi}(0, \vec{x}) \right),$$

simetrizamos para estar seguros de que  $\hat{\vec{P}}^\dagger = \hat{\vec{P}}$

se puede reescribir en términos de operadores de creación y aniquilación en la forma

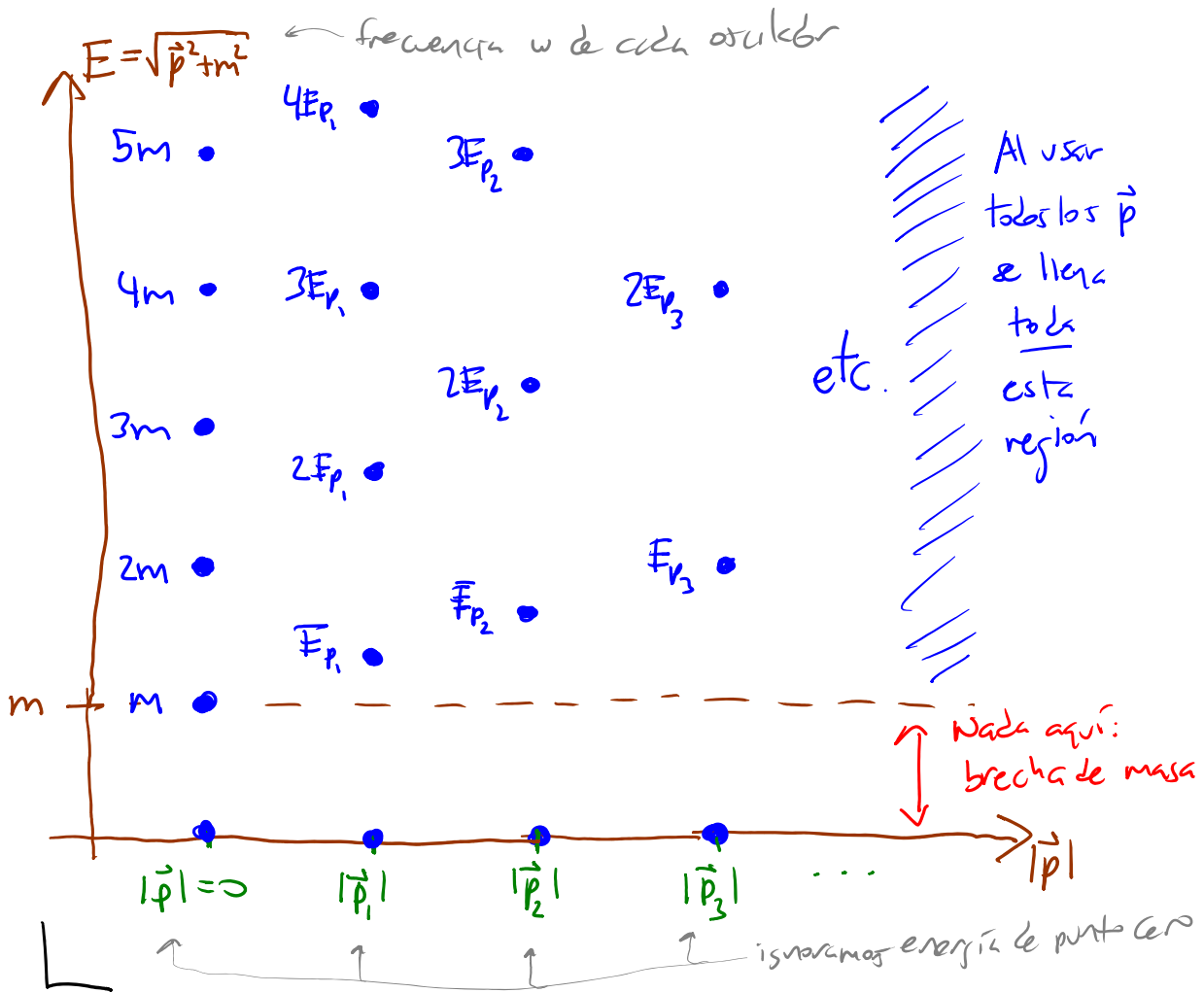
$$\begin{aligned} \hat{\vec{P}} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \frac{1}{2} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \vec{p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \right) = : \hat{\vec{P}} :, \end{aligned}$$

○ (impar)

que coincide con el  $\hat{\vec{P}}$  que teníamos en el espacio de Fock.

Podemos ver aquí que  $\vec{p}$ , originalmente solo una etiqueta para los modos de Fourier en el campo, en verdad es momento espacial.

NOTA: Vale la pena enfatizar que, si bien el espectro de energías para cada oscilador armónico es, como siempre, discreto, al incluir todos los osciladores (uno por cada  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ ) se obtiene para el campo cuántico un espectro continuo — aunque con una 'brecha de masa' ("mass gap"):



Algo parecido puede decirse para los generadores de Lorentz  $\hat{J}^{\mu\nu}$  (ver Tarea 3).

Hemos visto entonces que la cuantización canónica del campo de Klein-Gordon real  $\phi(x)$  reproduce correctamente toda la física asociada a partículas relativistas libres, neutras, bosónicas y sin espín. En particular, sabemos que en este sistema no habrá ningún problema de causalidad, puesto que se satisface la condición (p. 140)

$$\boxed{[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = 0 \quad \forall (x-x')^2 < 0} \quad \text{Microcausalidad}$$

Conocemos también (pp. 146, 23) el propagador de Feynman (= amplitud de propagación de partículas/antipartículas libres):

$$G(x-x') = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-x')}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$\uparrow$  Orden temporal

$\equiv K_F(x-x')$   
 frecuentemente denotado  $D_F$

Por supuesto, aquí las antipartículas = partículas ( $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$ ).

Es fácil e interesante generalizar toda esta historia a un campo escalar libre pero complejo, que esperaríamos describa a partículas no interactuantes sin espín pero con carga.

Un campo escalar complejo  $\varphi(x)$  representa por supuesto el doble de grados de libertad que un campo real, puesto que sus partes real e imaginaria son variables independientes. En la práctica, es más conveniente tratar directamente a  $\varphi$  y  $\varphi^*$  como variables independientes.

Para el caso libre, partimos entonces de la densidad Lagrangiana (escalar y real)

por convención omitimos  $\frac{1}{2}$  que usamos en el caso real

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \varphi^*, \partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

(que puede ser fácilmente reescrita en términos de

los 2 campos reales  $\varphi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \varphi^*)$ ,  $\varphi_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}i}(\varphi - \varphi^*)$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi_2^2$$

Las ecs. de movimiento son

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^*} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad \text{Klein-Gordon}$$

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* = 0,$$

como era de esperarse.

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi - m^2 \varphi^2$$

Los momentos canónicos conjugados a  $\varphi(x)$  y  $\varphi(x)^*$  son respectivamente

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}^*(x) \quad \text{y} \quad \pi^*(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*(x)} = \dot{\varphi}(x),$$

y la densidad Hamiltoniana es por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &\equiv \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} \\ &= \pi \pi^* + \pi^* \pi - (\pi \pi^* - \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi - m^2 \varphi^* \varphi) \\ &= \pi^* \pi + \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \\ &= \frac{1}{2} (\pi_1^2 + (\vec{\nabla} \varphi_1)^2 + m^2 \varphi_1^2) + \frac{1}{2} (\pi_2^2 + (\vec{\nabla} \varphi_2)^2 + m^2 \varphi_2^2). \end{aligned}$$

Al cuantizar, promovemos  $\varphi, \varphi^*, \pi, \pi^* \rightarrow \hat{\varphi}, \hat{\varphi}^\dagger, \hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger$ , e imponemos las relaciones de conmutación básicas

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = [\hat{\varphi}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')], \\ [\hat{\varphi}, \hat{\pi}^\dagger] &= 0 = [\hat{\varphi}^\dagger, \hat{\pi}], \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= [\hat{\pi}, \hat{\pi}] = 0 = [\hat{\varphi}^\dagger, \hat{\varphi}^\dagger] = [\hat{\pi}^\dagger, \hat{\pi}^\dagger]. \end{aligned}$$



Sabiendo que el operador de campo  $\hat{\varphi}(x)$  satisface nuevamente la ec. de Klein-Gordon, podemos otra vez desarrollarlo en la forma

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

"frecuencias positivas"  $\nearrow$   $\neq \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ , puesto que  $\hat{\varphi}^\dagger \neq \hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

donde las  $\hat{a}$ 's y  $\hat{b}$ 's satisfacen entonces

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger],$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger]$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger].$$

usualer, gracias a que  $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}$  son coef. de ondas planas con frecuencias positivas

Es decir, obtenemos no 1 sino 2 pares independientes de operadores de creación/aniquilación. Este campo describe entonces simultáneamente a 2 tipos distintos de partículas,

LU: 19/05/22

que tienen la misma masa  $m$ . Por lo que aprendimos en la etapa anterior del curso, esperamos que estos 2 objetos que aparecen empaquetados en el mismo campo sean respectivamente partícula y antipartícula, es decir,  $\hat{a}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}n}$ ,  $\hat{b}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}\bar{n}}$ . Y en efecto, sabemos que al agregar términos de interacción hermitianos a  $\hat{H}$ , como pej.  $(\hat{\psi}^\dagger \psi)^2$ , tendríamos procesos de creación/aniquilación por pares  $n-\bar{n}$  (como vimos antes). Pero, ¿cuál es la carga conservada que distingue a  $n$  y  $\bar{n}$ ?

Recordando el teorema de Noether, una posibilidad sería que se tratara de la carga asociada a una simetría continua. Y examinando  $S(\psi) = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x (\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi)$ , podemos ver que efectivamente es invariante no solo bajo Poincaré, sino también bajo la transformación interna

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\eta} \psi(x) \\ \psi^*(x) &\rightarrow \psi'^*(x) = e^{-i\eta} \psi^*(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Grupo de simetría} \\ U(1) \end{array}$$

$\eta$  es número fijo, elegido por convención, y caracteriza a  $\psi$ : carga (no separar  $\eta$  equivale a  $\eta=1$ )  $\theta$  es parámetro de la rotación  $\downarrow$  obligatorio si se fuerza real

El efecto de la rotación sobre  $\psi$  desaparecería si  $\eta \rightarrow 0$ .

↙ el cambio de fase  $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\vartheta} \varphi$

Esto equivale a mezclar entre sí las partes real e imaginaria de  $\varphi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x))$  a través de una rotación abstracta:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{rotación en} \\ \text{espacio de campos} \end{matrix}$$

número fijo, elegido por convención  
 ↙ parámetro de la transformación  
 ↖ matriz de  $SO(2) \cong U(1)$

Para deducir la correspondiente carga de Noether, notamos que en la versión infinitesimal de esta transformación,  $\varphi'(x) = e^{i\vartheta} \varphi(x)$  con  $\vartheta = \omega \ll 1$ , se tiene  $\delta x^\mu \equiv x'^\mu - x^\mu = 0 \leftarrow \equiv \chi^\mu(x)$ ,

$$\delta\varphi(x) \equiv \varphi'(x) - \varphi(x) = \omega i\vartheta \varphi(x) \quad \text{y} \quad \delta\varphi^*(x) \equiv \varphi'^*(x) - \varphi^*(x) = \omega(-i\vartheta \varphi^*(x))$$

1 solo valor de  $\alpha$  ↖  $\equiv \Phi(x)$   $\equiv \Phi^*(x)$

así que, a partir de nuestra fórmula general (10)

(p. 169), obtenemos 1 corriente conservada

$$J^\mu(x) \equiv -\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \Phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}$$

↖ Notar la suma sobre los 2 campos independientes  
 $\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$

$$J^\mu(x) = -i\vartheta \varphi \partial^\mu \varphi^* + i\vartheta \varphi^* \partial^\mu \varphi \quad \equiv \quad i\vartheta \varphi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \varphi$$

(que efectivamente satisface

$$\partial_\nu J^\nu = \cancel{-i\vartheta \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi^*} - \cancel{i\vartheta \varphi \partial^2 \varphi^*} + \cancel{i\vartheta \partial_\nu \varphi^* \partial^\nu \varphi} + \cancel{i\vartheta \varphi^* \partial^2 \varphi} = 0 \quad \checkmark$$

$\underbrace{-i\vartheta \varphi \partial^2 \varphi^*}_{-m^2 \varphi^*} \leftarrow \text{por E-L} \rightarrow \underbrace{i\vartheta \varphi^* \partial^2 \varphi}_{-m^2 \varphi}$

16:14 los/18

$$J^0(x) = \underbrace{-i\psi\partial^0\psi^*}_{\pi} + i\psi^*\partial^0\psi_{\pi^*}$$

y la carga conservada asociada

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x) = i \int d^3x \psi (\psi^* \pi^* - \psi \pi) \quad Q^* = Q$$

El operador correspondiente a nivel cuántico es  
orden normal: medir carga con respecto a k  
carga del  $u_4^0$

$$\hat{Q} \equiv i \int d^3x \psi : (\hat{\psi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \hat{\pi} \hat{\psi}) :$$

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t})$$

$$\hat{\pi} = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \sqrt{\frac{E_{p'}}{2}} i (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t})$$

$$= i \int d^3x \psi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}} \left\{ \right.$$

$$e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{p}'\cdot\vec{x}} : (\hat{a}_{\vec{p}} e^{iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-iE_p t}) (-i) (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{iE_{p'} t}) :$$

$$- e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\vec{p}'\cdot\vec{x}} : i (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t}) (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t}) :$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \psi \frac{1}{2} \left\{ : (\hat{a}_{\vec{p}} e^{iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-iE_p t}) (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{iE_{p'} t}) \right.$$

$$\left. + (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t}) (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t}) : \right\}$$

Este renglón →  
operadores hermitianos del anterior

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \psi \frac{1}{2} : (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} - \cancel{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}}} e^{i2E_p t} + \cancel{\hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}} e^{-i2E_p t} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-i2E_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} e^{i2E_p t}) :$$

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \psi (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}})$$

← cambiamos  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  en segundo término

A partir de este resultado podemos deducir que los estados

$$|p_n\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle \quad \text{y} \quad |p_{\bar{n}}\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{b}_p^\dagger |0\rangle$$

tienen respectivamente carga

$$\begin{aligned} \hat{Q}|p_n\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \underbrace{q \left( \underbrace{\hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_{p'}}_{\hat{N}_{p'n}} - \cancel{\hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_{p'}} \right)}_{\hat{q} \hat{N}_n} \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle \\ &= q |p_n\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}|p_{\bar{n}}\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \underbrace{q \left( \hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_{p'} - \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_{p'} \right)}_{-\hat{q} \hat{N}_{\bar{n}}} \sqrt{2E_p} \hat{b}_p^\dagger |0\rangle \\ &= -q |p_{\bar{n}}\rangle, \end{aligned}$$

es decir,  $q_n = q$  y  $q_{\bar{n}} = -q$ , justo como esperábamos.

Esta propiedad está también codificada en los conmutadores

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( \hat{a}_p e^{-ipx} + \hat{b}_p^\dagger e^{ipx} \right)$$

$$\begin{aligned} [\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] &= -\hat{a}_p^\dagger (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{p}') \\ [-\hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^\dagger] &= -\hat{b}_p^\dagger (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{p}') \end{aligned}$$

$$\begin{cases} [\hat{Q}, \hat{\phi}(x)] = -q \hat{\phi}(x) & \leftarrow \hat{\phi}(x) \text{ aniquila } n, \text{ crea } \bar{n}, \\ [\hat{Q}, \hat{\phi}^\dagger(x)] = +q \hat{\phi}^\dagger(x) & \leftarrow \hat{\phi}^\dagger(x) \text{ crea } n, \text{ aniquila } \bar{n}, \end{cases}$$

que como vimos antes expresan el cambio infinitesimal

$$\leftarrow = \delta \hat{\varphi}^{\dagger} \quad (\text{porque } \delta x = 0)$$

$\delta \hat{\varphi}(x)$ ,  $\delta \hat{\varphi}^{\dagger}(x)$ , y dan lugar (a través de BCH) a la regla de transformación finita

$$\begin{cases} e^{i\hat{Q}\theta} \hat{\varphi}(x) e^{-i\hat{Q}\theta} = e^{-i\theta} \hat{\varphi}(x), \\ e^{i\hat{Q}\theta} \hat{\varphi}^{\dagger}(x) e^{-i\hat{Q}\theta} = e^{i\theta} \hat{\varphi}^{\dagger}(x). \end{cases}$$

Como de costumbre, los signos aquí parecen estar al revés...

Vale la pena notar que los campos hermitianos

$$\hat{\varphi}_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\varphi}(x) + \hat{\varphi}^{\dagger}(x)), \quad \hat{\varphi}_2(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}^{\dagger}(x))$$

No tienen una carga definida. P.ej.,  $\hat{a}_{(1)\vec{p}}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_{\vec{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger})$

por sí solo crearía la superposición  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\vec{p}\hbar\rangle + |1\vec{p}\bar{\hbar}\rangle)$ ,

estado cuya existencia queremos prohibir (impugnando una 'regla de superselección') para tener claridad con respecto a

la conservación de la carga. Otra manera de decir lo

mismo es observar que  $\hat{\varphi}_1$  y  $\hat{\varphi}_2$  No tienen por

separado una regla de transformación análoga a la de  $\hat{\varphi}$

bajo las rotaciones  $U(1)$ . Es por ello que nos conviene en todo momento considerar a  $\hat{\varphi}_1$  y  $\hat{\varphi}_2$  como componentes de

un solo paquete  $\hat{\varphi}(x)$ .

Concluimos con esto el estudio del campo escalar libre.

Hemos visto que al cuantizarlo se obtienen partículas (y antipartículas) relativistas sin espín y no interactuantes.

En la etapa anterior del curso nos habíamos encontrado con el campo y después de cuantizar: entendimos que  $\hat{\phi}(x)$  es una herramienta útil para describir la física de un sistema de partículas; pero no nos quedaba claro el significado del límite clásico de este operador.

Habiendo procedido ahora en la dirección opuesta, partiendo de un campo clásico cuyo significado es totalmente transparente antes de cuantizar, nos debe quedar mucho más clara la relación entre las partículas y el campo: las partículas son los 'cuantos' del campo, que corresponden a pequeñas fluctuaciones cuánticas por encima del valor preferido del campo (es decir, pequeñas excitaciones de los modos normales de oscilación de la 'gelatina' cuántica).

Antes de dar por terminado este capítulo, conviene hacer 5 observaciones/clarificaciones adicionales:

i) El vacío  $|0\rangle$  tiene norma  $\langle 0|0\rangle = 1$ ; pero los estados multi-partículas  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle$  tienen norma  $\propto (\delta^{(3)}(\vec{0}))^N$ . El hecho

de que  $\hat{\varphi}(x)|0\rangle$  sea NO normalizable implica que  $\hat{\varphi}(x)$ , en sentido matemático estricto, NO es un operador en fl. Sob

$\hat{\varphi}_f \equiv \int d^3x f(x) \hat{\varphi}(x)$  lo será (con  $f(x)$  apropiada). [Ver Duncan 8.1]   
 ← "función de prueba"  
 ← campo "embarrado" (smeared)

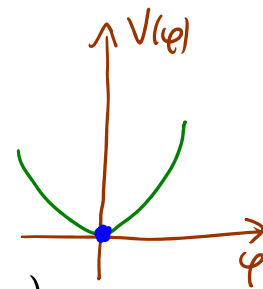
ii) Cuando mencionamos arriba el "valor preferido del campo", nos referimos por supuesto a su configuración de mínima energía, que es el estado que hemos denominado 'el vacío'.

Para el campo de Klein-Gordon (KG), donde

$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$ , ese valor preferido es

$\varphi(x) = 0$ , por lo que en el vacío  $|0\rangle$

tenemos  $\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle = 0$  (NO  $\hat{\varphi}(x) | 0 \rangle = 0$ ).



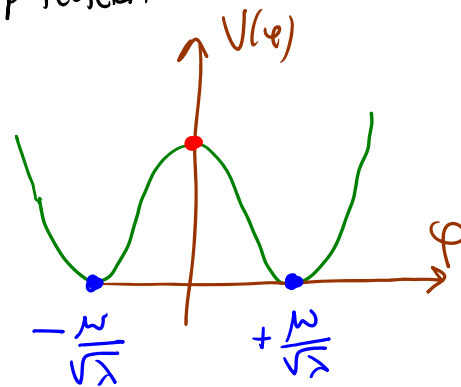
Pero es importante notar que esto no tiene por qué ser así en todos los casos. P.ej., para KG sin masa,  $V(\varphi) = 0$  y por tanto no hay un único valor preferido. Para KG con término lineal en  $\varphi$ , vimos que el mínimo está desplazado.

Para  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi)$  con un potencial

más complicado, puede haber un valor preferido  $\varphi \neq 0$ . P.ej., con el potencial

del sombrero mexicano' ( $c/\mu^2, \lambda > 0$ )

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4 + \frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda}$$





(similar al potencial del campo de Higgs en el Modelo Estándar), existen 2 valores igualmente preferidos: los mínimos del potencial,  $\varphi(x) = \pm \mu/\sqrt{\lambda}$ . En casos así, separamos al campo en 2 partes:

$$\hat{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x) + \hat{\phi}(x)$$

Valor de fondo:

$$\bar{\varphi}(x) \equiv \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle$$

↑ Fluctuación que se describe en  $\hat{a}$ 's y  $\hat{a}^\dagger$ 's  $\Rightarrow$  partículas

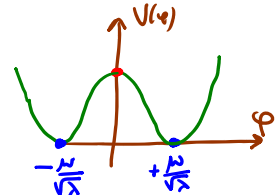
Lib: 10/03/17

En el ejemplo con  $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$ , tomando  $\bar{\varphi} = +\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$  y desarrollando en Taylor el potencial,

$$V(\varphi) = V(\bar{\varphi}) + V'(\bar{\varphi})\phi + \frac{1}{2}V''(\bar{\varphi})\phi^2 + \dots,$$

tendremos

$$-\mu^2 + 3\lambda\bar{\varphi}^2 = 2\mu^2 > 0$$

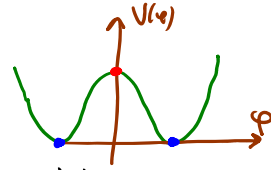


$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(2\mu^2)\phi^2 - \dots,$$

↙  $\phi$  pequeño

que, en la medida en que los "... " sean despreciables, dará lugar a nivel cuántico a partículas (aproximadamente) libres con masa  $M^2 \equiv V''(\bar{\varphi}) = 2\mu^2$ .

Notemos por otro lado que si tomamos como valor de fondo

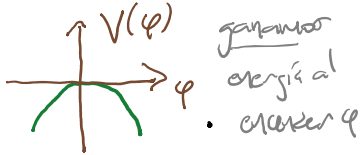


$\bar{\varphi} = 0$ , estaríamos en el máximo en lugar del mínimo del potencial, y razonando de manera similar tendríamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\bar{\varphi}) - \frac{1}{2} V''(\bar{\varphi}) \phi^2 - \dots \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (-\mu^2) \phi^2 - \frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} - \dots, \end{aligned}$$

que describiría partículas (aproximadamente) libres con masa  $m^2 \equiv V''(\bar{\varphi}) = -\mu^2 < 0$  — es decir, itagiones!

Claro está que en este caso  $\bar{\varphi}$  No representa una configuración estable, por lo que no tiene sentido considerar 'pequeñas fluctuaciones' alrededor de  $\varphi = \bar{\varphi}$ . Entendemos entonces lo que habíamos prometido en la p. 74: la existencia

de itagiones es un síntoma de que el 'vacío' es inestable. Itagiones libres serían descritos por 

iii) Para el caso de un (sistema de) campo(s) interactuante(s),  $\mathcal{L}$  contiene términos cúbicos o más altos, y el (los) campo(s) satisfacen (en) por tanto ecuación(es) de movimiento no lineal(es), que en general no se pueden resolver de manera

exacta. Esperamos (pp.104-109) que aún en este caso el (los) campos estar(án) asociados con partículas de finidas como estados asintóticos, ¿pero cómo podemos analizar cuantitativamente el efecto de las interacciones? Si las interacciones son suficientemente débiles, las partículas físicas ( $\leftrightarrow$  estados asintóticos) deben ser aproximadamente modos de Fourier, como lo eran en el caso libre. Desde esta perspectiva, la no linealidad de la(s) ec(s). de mov., que hace que los modos de Fourier ya NO estén desacoplados entre sí (puesto que superponer soluciones ya NO da una solución) refleja justamente el hecho de que las partículas interactúan. Como veremos más adelante, es posible incorporar estas interacciones sistemáticamente a través de una expansión perturbativa, es decir, expresando cada cantidad física como una serie de Taylor en potencias de los coeficientes de los términos cúbicos y más altos en  $\mathcal{L}$ , conocidos como constantes de acoplamiento (serie descrita por los llamados 'Diagramas de Feynman'). A través de este método

entenderemos también la manera en que las partículas físicas difieren de los modos de Fourier del campo. Un ejemplo donde las interacciones son débiles (es decir, una teoría cuántica de campos 'débilmente acoplada') es QED, que describe a fotones en interacción con electrones. Es mucho más difícil visualizar (¡y no digamos calcular!) lo que sucede cuando las interacciones son fuertes. Pej., los ingredientes básicos del Lagrangiano de QCD, gluones y quarks, ciertamente no existen como estados asintóticos: no podemos separarlos a distancias arbitrariamente grandes unos de otros, sino que están permanentemente 'confinados' en el interior de las partículas que sí observamos en nuestros detectores: los 'hadrones' como el protón, el neutrón, los piones, etc.

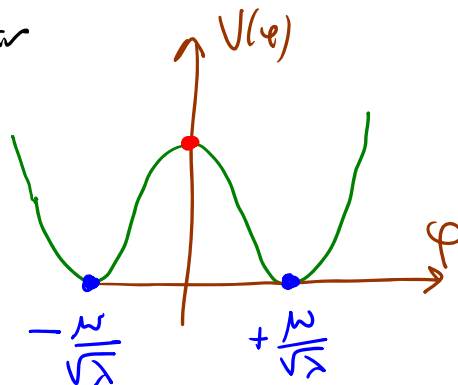
Así que, cuando las interacciones son fuertes, la relación entre el campo y las correspondientes partículas físicas dista mucho de ser obvia, y nuestra principal herramienta de cálculo, la expansión perturbativa, resulta completamente inútil.

iv) Aún cuando las interacciones son débiles, existe en general información física que NO es capturada por la expansión perturbativa (cosa que es visible en el hecho de que genéricamente la serie de Taylor NO converge).

P.ej., en la teoría de un campo escalar en 1+1 dimensiones con el mismo potencial que vimos arriba, la ec. de movimiento

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi - \mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = 0$$

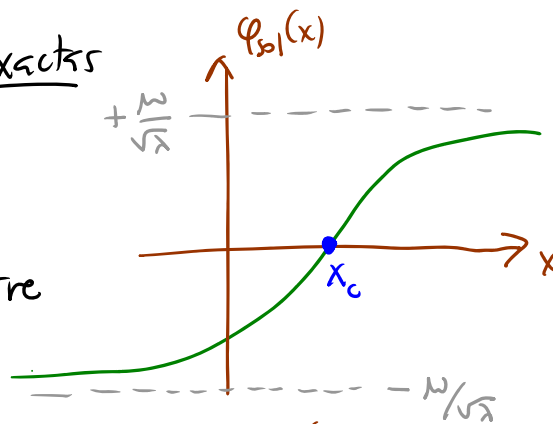
cte. de desplazamiento



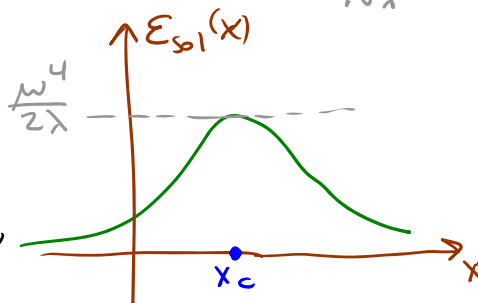
tiene una familia de soluciones exactas

$$\varphi_{sol}(x) \equiv \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left[\frac{M}{\sqrt{2}}(x-x_c)\right]$$

que son estáticas e interpolan entre los 2 mínimos  $\varphi = \pm M/\sqrt{\lambda}$ .



Esta configuración tiene una densidad de energía (por encima de la del vacío,  $V(\varphi = \pm M/\sqrt{\lambda}) = 0$ ) localizada en  $x \approx x_c$ ,



$$E_{\text{sol}}(x) \equiv \mathcal{H}(\varphi_{\text{sol}}(x), \partial_x \varphi_{\text{sol}}(x), \cancel{\partial_t \varphi_{\text{sol}}(x)}) \\ = \frac{\mu^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{\mu}{\sqrt{2}}(x-x_c) \right],$$

distribuida de tal manera que la energía total es finita:

$$E_{\text{sol}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx E_{\text{sol}}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} \gg \mu \quad \leftarrow \sim \text{masa de partículas perturbativas}$$

¡Claramente este no es un resultado que hubiéramos podido obtener comenzando en alguno de los mínimos y trabajando con una serie de Taylor en potencias de  $\lambda$ !

$\varphi_{\text{sol}}(x)$  es un ejemplo de lo que llamamos un solitón: una solución estática con energía finita, excitación macroscópica que se mantiene localizada solo gracias a la no linealidad del sistema, es decir, a la presencia de una interacción del

campo consigo mismo. Físicamente, representa un nuevo tipo de partícula, con masa  $M_{\text{sol}} \equiv E_{\text{sol}}$ , que forma parte del espectro no perturbativo de la teoría. Para mayores detalles, ver [Rajaraman, Solitons and Instantons].

127: 17/09/18

119: 21/09/22

v) Incluso para un campo libre, el concepto asociado de partícula resulta mucho menos claro si el espaciotiempo es curvado, o si, aún en un fondo plano, consideramos la perspectiva de un observador no inercial ( $\Rightarrow g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ ).

En el espaciotiempo de Minkowski, hemos visto que, en las coordenadas cartesianas  $x^\mu$  asociadas a un sistema inercial, el operador de campo libre se puede desarrollar como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}}_{\substack{\text{modo} \\ \text{positivo}}} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

donde las funciones  $\equiv u_{\vec{p}}(x)$  y  $\equiv u_{\vec{p}}^*(x)$  constituyen un conjunto completo de soluciones a la ec. de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)u(x) = 0, \text{ con } \square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \text{ Es fácil verificar}$$

que estas soluciones son ortogonales con respecto al producto interno de Klein-Gordon (independiente de  $t$ )

$$\begin{aligned} (u, v)_{KG} &\equiv i \int d^3 x \, u^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t v(x) \\ &= i \int d^3 x \, [u^*(x) \partial_t v(x) - \partial_t u^*(x) v(x)] \end{aligned}$$

es decir, que  $(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'})_{KG} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = -(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*)$ .

← Nota: misma estructura que en carga de Noether pp. 203-4

¿Cómo se generaliza esta descomposición al caso con coordenadas arbitrarias  $x'^{\mu}(x)$ ? [ver libro de Birrell & Davies]

La métrica será entonces  $g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho}(x)$ ,  $\eta_{\mu\nu}$  si el espaciotiempo es plano

y usándola podemos escribir la acción de Klein-Gordon

$$S_{KG} = \int d^4x' \mathcal{L}'_{KG}(x') = \int d^4x' \sqrt{-\det g'_{\lambda\rho}} \frac{1}{2} (g'^{\mu\nu} \partial'_{\mu} \phi' \partial'_{\nu} \phi' - m^2 \phi'^2)$$

que implica la ecuación de movimiento  $\square' \phi' = 0$

$(\square' + m^2)\phi' = 0$ , donde ahora el D'Alembertiano se define como

$$\square' \phi' \equiv g'^{\mu\nu} \nabla'_{\mu} \nabla'_{\nu} \phi' = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \partial'_{\mu} (\sqrt{-g'} g'^{\mu\nu} \partial'_{\nu} \phi')$$

derivadas covariantes (usan  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ )

Eligiendo un conjunto completo de soluciones  $u'_s(x)$ ,  $u'^*_s(x)$  a esta ecuación, podemos volver a descomponer

$$\hat{\phi}'(x') = \sum_s (\hat{a}'_s u'_s(x') + \hat{a}'^{\dagger}_s u'^*_s(x'))$$

será integral si el índice  $s$  es continuo

Si las  $u'_s, u'^*_s$  son ortonormales con respecto al producto

métrica inducida sobre  $C$  (antes  $\delta_{ij}$ )

$$(u', v')_{KG} \equiv i \int d^3x' \sqrt{|g'_C|} u'^* \overleftrightarrow{\partial}'_{\mu} v' n^{\mu}_C$$

vector unitario

ortogonal a  $C$

$C$  ← superficie tipo espacio (antes usamos  $t = cte.$ )

(antes usamos  $\eta^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}_0$ )





se puede mostrar que la cuantización canónica del campo  $\phi(x')$  equivale a imponer las relaciones de conmutación esperadas:

$$[\hat{a}'_s, \hat{a}'_r{}^\dagger] = \delta_{sr}, \quad [\hat{a}'_s, \hat{a}'_r] = 0 = [\hat{a}'_s{}^\dagger, \hat{a}'_r{}^\dagger].$$

↳ delta de Dirac si el índice  $s$  es continuo

El espacio de Hilbert completo para nuestro campo puede ser obtenido entonces con la construcción de Fock usual, comenzando con un vacío  $|0'\rangle$  tal que  $\hat{a}'_s|0'\rangle = 0 \forall s$ , y actuando sobre él con los  $\hat{a}'_s{}^\dagger$  para obtener estados multiparticulares  $|s_1, s_2, \dots\rangle \propto \hat{a}'_{s_1}{}^\dagger \hat{a}'_{s_2}{}^\dagger \dots |0'\rangle$ .

(El ejemplo más sencillo sería usar coordenadas esféricas  $x'^\mu \equiv (t, r, \theta, \varphi)$ , donde uno tiene soluciones a Klein-Gordon

$$u'_{pLM}(x') = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-iE_p t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} p J_L(pr) Y_{LM}(\theta, \varphi)$$

$\swarrow \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$       Bessel      Armónico esférico

[ver p.ej. Greiner, ejercicio 4.3, pp. 86-90], y los estados correspondientes de 1 partícula,  $|pLM\rangle \propto \hat{a}'_{pLM}{}^\dagger |0'\rangle$ , son eigenestados de  $\hat{P}^0, \hat{P}^2, \hat{J}^2, \hat{J}^3$ , con respectivos eigenvalores

← en lugar de autovalores  $p^w$  en  $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$  lo?

$$E_{\vec{p}}, p^2, L(L+1), M.)$$

Ahora, dado que  $u_{\vec{p}}(x)$  y  $u_{\vec{p}}^*(x)$  representaban un conjunto completo de soluciones a la ec. de Klein-Gordon en las coords. originales  $x^w$ , debemos tener

$$u'_s(x'(x)) = \sum_{\vec{p}} \left( \alpha_{s\vec{p}} u_{\vec{p}}(x) + \beta_{s\vec{p}} u_{\vec{p}}^*(x) \right),$$

$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \rightarrow \vec{p}$

con ciertos valores específicos de los coeficientes  $\alpha_{s\vec{p}}, \beta_{s\vec{p}}$

$$(\text{de hecho, } \alpha_{s\vec{p}} = (u_{\vec{p}}, u'_s)_{KG}, \beta_{s\vec{p}} = -(u_{\vec{p}}^*, u'_s)_{KG}).$$

A partir de

$$\begin{aligned} \varphi(x'(x)) &= \sum_s \left[ \underbrace{a'_s u'_s(x'(x))}_{\sum_{\vec{p}} (\alpha_{s\vec{p}} u_{\vec{p}} + \beta_{s\vec{p}} u_{\vec{p}}^*)} + \underbrace{a_s^* u_s^*(x'(x))}_{\sum_{\vec{p}} (\alpha_{s\vec{p}}^* u_{\vec{p}}^* + \beta_{s\vec{p}}^* u_{\vec{p}})} \right] \\ &= \sum_{\vec{p}} \left[ \sum_s (\alpha_{s\vec{p}} a'_s + \beta_{s\vec{p}}^* a_s^*) u_{\vec{p}} + \sum_s (\alpha_{s\vec{p}}^* a_s^* + \beta_{s\vec{p}} a'_s) u_{\vec{p}}^* \right] \\ &= \varphi(x) \leftarrow \text{porque el campo es } \underline{\text{escalar}} \end{aligned}$$

podemos deducir que

$$\hat{a}_{\vec{p}} = \sum_s (\alpha_{s\vec{p}} \hat{a}'_s + \beta_{s\vec{p}}^* \hat{a}'_s{}^\dagger), \quad \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger = \sum_s (\alpha_{s\vec{p}}^* \hat{a}'_s{}^\dagger + \beta_{s\vec{p}} \hat{a}'_s).$$

↑ "coeficientes de Bogoliubov"

Y el punto al que queremos llegar es que, si resulta ser el caso que  $\beta_{s\vec{p}} \neq 0$  para algún valor de  $s, \vec{p}$ , entonces  $|0'\rangle \neq |0\rangle$ . Es decir, el estado que  $\mathcal{O}'$  considera 'vacío', ¡consiste de cierta colección de partículas desde la perspectiva del observador  $\mathcal{O}$ !

Esto se evita solo si  $\hat{a}_{\vec{p}}$  es una combinación lineal únicamente de operadores de aniquilación  $\hat{a}'_s$ , y no de creación,  $\hat{a}'_s{}^\dagger$ . Pero, ¿cómo distinguimos en primer lugar entre  $\hat{a}'_s$  y  $\hat{a}'_s{}^\dagger$ ? Hemos visto una y otra vez que lo que distingue a  $\hat{a}_{\vec{p}}$  de  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$  es que el primero multiplica a  $u_{\vec{p}}(x) = e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} = e^{-ip\cdot x}$ , que tiene 'frecuencia positiva' con respecto al tiempo  $t$ , es decir,  $\partial_t u_{\vec{p}}(x) = -i\omega u_{\vec{p}}(x)$  con  $\omega = E_{\vec{p}} > 0$  (mientras que  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$  multiplica a  $u_{\vec{p}}^*(x) = e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ , que tiene 'frecuencia negativa'). (Cualquier otro observador inercial nota igualmente que  $u_{\vec{p}}(x) = e^{-ip\cdot x} = e^{-ip'\cdot x'} = u_{\vec{p}'}(x')$  tiene también frecuencia positiva con respecto a su tiempo

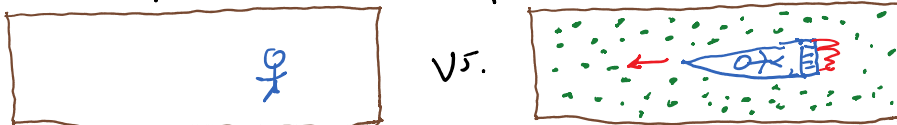
Lo mismo en el ejemplo de la cámara de partículas a cósmico

$t'$ , y por tanto está de acuerdo en que su coeficiente es un operador de aniquilación y no de creación. Pero esto No resulta ser cierto para un observador  $O'$  no inercial.

En particular, se puede mostrar que un observador uniformemente acelerado con aceleración propia  $A$  detecta en el vacío  $|0\rangle$  un baño térmico de partículas con temperatura  $T = A/2\pi$  (en unidades donde  $k_B = 1$ )!! Es decir,

$$\langle 0 | \hat{a}_s^\dagger \hat{a}'_s | 0 \rangle = \frac{1}{e^{\omega_s/T} - 1} \neq 0 \quad [\text{ver Birrell \& Davies}]$$

$\hat{N}'_s$  operador de número para  $O'$



Este es el llamado "efecto Unruh" (y está relacionado con el "efecto Hawking", que implica que los agujeros negros radian).

La moraleja es entonces que el número de partículas depende del observador!

Por esta razón, y por los puntos anteriores (incluyendo el valor de fondo del campo, y la posible existencia de solitones), consideramos al concepto de campo más fundamental que el de partícula. Sorprendentemente, ¡nuestro universo está en verdad hecho de 'gelatinas' cuánticas!!

### 3. Campo de Dirac Libre

Con el ejemplo del campo escalar, hemos entendido ya las ideas esenciales sobre la relación campo  $\leftrightarrow$  partículas en el caso libre. Antes de intentar agregar interacciones, nos conviene primero estudiar otros tipos de campos libres.

Vimos que un campo escalar está asociado a partículas sin espín. Las partículas con espín se describen entonces con un campo que transforma de manera no trivial bajo

Poincaré:

$$\varphi_l(x) \rightarrow \varphi_{l'}(\underbrace{\Lambda x + a}_{x'}) = \sum_{l=1}^L M_{ll'}(\Lambda) \varphi_l(x) \quad \text{a nivel clásico,}$$

o, en términos de operadores cuánticos,

$$\hat{\varphi}_l(x) \rightarrow \hat{U}(\Lambda, a) \hat{\varphi}_l(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{l'=1}^L M_{ll'}(\Lambda) \hat{\varphi}_{l'}(\Lambda x + a)$$

donde las  $M$ 's son matrices  $L \times L$  que forman una rep de  $SO^+(3,1)$ . Esta rep es necesariamente no unitaria si  $L < \infty$ ,

aunque esperamos que en algún sentido contenga a las matrices  $D_{\lambda\lambda}(W)$  que constituirían una rep unitaria del grupito  $SO^+(3,1)|_{\mathbb{R}}$ .

Nos interesan por supuesto reps irreducibles, pues de otra manera las componentes  $\varphi_l(x)$  ( $l=1, \dots, L$ ) se subdividen en 2 o más subconjuntos que no se mezclan entre sí bajo Lorentz.

¿Qué reps irreducibles de  $so^+(3,1)$  con dimensión finita existen?

Además de la rep trivial  $M(\Lambda) = 1$  que define al campo escalar, hasta ahora conocemos solo a la rep vectorial ( $l \rightarrow \mu = 0, 1, 2, 3$ )  $M(\Lambda)^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu$ , bajo la cual transforma el llamado campo vectorial  $\varphi^\mu(x)$  (como el potencial electromagnético  $A^\mu(x)$ ), y a partir de esta, a la rep tensorial de rango  $(m, n)$

$$M(\Lambda) \underbrace{\begin{matrix} \mu'_1 \dots \mu'_m \\ \nu'_1 \dots \nu'_n \end{matrix}}_l \underbrace{\begin{matrix} \mu_1 \dots \mu_m \\ \nu_1 \dots \nu_n \end{matrix}}_{l'} = \Lambda^{\mu'_1}_{\nu'_1} \dots \Lambda^{\mu'_m}_{\nu'_m} \cdot \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \Lambda^{\nu_n}_{\nu'_n} \\ \equiv (\Lambda^{-1})^{\nu_i}_{\nu'_i} \quad (\text{p. 35})$$

bajo la cual transforma el llamado campo tensorial de rango  $(m, n)$ ,  $\varphi^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x)$ .

De hecho esta rep es reducible: es fácil verificar que las



Es decir, si encontramos una rep del álgebra de Dirac, entonces Dirac nos promete que tendremos una rep del álgebra (y por tanto del grupo) de Lorentz. Podemos verificar explícitamente que esto funciona: dado un conjunto de matrices  $\gamma^\mu$  que satisfacen (11), tenemos

$$\begin{aligned}
 [\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}] &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\lambda \gamma^\rho] - \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\rho \gamma^\lambda] \\
 &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\lambda] \gamma^\rho - \frac{i}{4} \gamma^\lambda [\gamma^\mu, \gamma^\rho] - \frac{i}{4} \gamma^\rho [\gamma^\mu, \gamma^\lambda] + \frac{i}{4} \gamma^\lambda [\gamma^\mu, \gamma^\rho] \\
 &= \frac{i}{2} (\eta^{\mu\lambda} \gamma^\rho - \eta^{\mu\rho} \gamma^\lambda - \eta^{\mu\rho} \gamma^\lambda + \eta^{\mu\lambda} \gamma^\rho) \\
 &= i (\eta^{\mu\lambda} \gamma^\rho - \eta^{\mu\rho} \gamma^\lambda),
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 [S^{\mu\nu}, S^{\lambda\rho}] &= \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu, S^{\lambda\rho}] - \frac{i}{4} [\gamma^\nu \gamma^\mu, S^{\lambda\rho}] \\
 &= \frac{i}{4} (\gamma^\mu [\gamma^\nu, S^{\lambda\rho}] + [\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}] \gamma^\nu - (\nu \leftrightarrow \mu)) \\
 &= i \frac{i}{4} (\eta^{\nu\lambda} \gamma^\mu \gamma^\rho - \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu \gamma^\lambda + \eta^{\mu\lambda} \gamma^\rho \gamma^\nu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\lambda \gamma^\nu \\
 &\quad - \eta^{\mu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\rho + \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\lambda - \eta^{\nu\lambda} \gamma^\rho \gamma^\mu + \eta^{\nu\rho} \gamma^\lambda \gamma^\mu),
 \end{aligned}$$



es decir,

$$[S^{\mu\nu}, S^{\lambda\rho}] = i(\eta^{\nu\lambda} S^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho} S^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} S^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} S^{\mu\lambda}),$$

que efectivamente coincide con el álgebra de Lorentz (2). ✓

L20: 23/09/22

p.43

Ahora, para construir una rep del álgebra de Dirac,

notemos que si combinamos a las  $\gamma^m$  por pares,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv \frac{1}{2}(\gamma^0 + \gamma^1), & \Gamma_1^\dagger &\equiv \frac{1}{2}(\gamma^0 - \gamma^1), \\ \Gamma_2 &\equiv \frac{1}{2}(i\gamma^2 + \gamma^3), & \Gamma_2^\dagger &\equiv \frac{1}{2}(i\gamma^2 - \gamma^3), \end{aligned}$$

las dagas aquí no necesariamente se refieren a conjugación hermitiana; por el momento en solo parte del nombre de estas matrices

entonces tendremos

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_1^\dagger\} = \frac{1}{4}(\{\gamma^0, \gamma^0\} - \{\gamma^1, \gamma^1\}) = \frac{1}{4}(2 - (-2)) = 1,$$

$$\{\Gamma_2, \Gamma_2^\dagger\} = \frac{1}{4}(-\{\gamma^2, \gamma^2\} - \{\gamma^3, \gamma^3\}) = \frac{1}{4}(-(-2) - (-2)) = 1,$$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_1\} = \frac{1}{4}(\{\gamma^0, \gamma^0\} + \{\gamma^1, \gamma^1\}) = \frac{1}{4}(2 + (-2)) = 0,$$

$$\{\Gamma_1^\dagger, \Gamma_1^\dagger\} = \{\Gamma_2, \Gamma_2\} = \{\Gamma_2^\dagger, \Gamma_2^\dagger\} = 0,$$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_2\} = \{\Gamma_1, \Gamma_2^\dagger\} = \{\Gamma_1^\dagger, \Gamma_2\} = \{\Gamma_1^\dagger, \Gamma_2^\dagger\} = 0.$$

$$\Gamma_1, \Gamma_1^\dagger, \Gamma_2, \Gamma_2^\dagger \quad L \times L$$

Es decir, estas 4 matrices se comportan como si fueran

2 pares independientes de operadores de creación/aniquilación

fermiónicos (en el sentido de que obedecen relaciones <sup>o ascenso / descenso</sup> de anticmutación en lugar de conmutación, p. 113),

de anticmutación en lugar de conmutación, p. 113),

$$\{\hat{a}_I, \hat{a}_J^\dagger\} = \delta_{IJ}, \quad \{\hat{a}_I^\dagger, \hat{a}_J^\dagger\} = 0 = \{\hat{a}_I, \hat{a}_J\}$$

con  $I, J = 1, 2$ .  $\Rightarrow \hat{a}_I^{\dagger 2} = 0$  que implementa el principio de exclusión de Pauli

Tales operadores generaban un 'espacio de Fock' de dimensión finita: comenzando con un 'vacío'  $|0,0\rangle$  tal que

$\hat{a}_I |0,0\rangle = 0 \quad \forall I$ , actuando con los operadores de creación obtenemos solo otros 3 estados independientes,

$$|1,0\rangle \equiv \hat{a}_1^\dagger |0,0\rangle, \quad |0,1\rangle \equiv \hat{a}_2^\dagger |0,0\rangle, \quad |1,1\rangle \equiv \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0,0\rangle.$$

Con las matrices  $\Gamma_I, \Gamma_I^\dagger$  la situación es exactamente análoga. Comenzando con un vector  $L$ -dimensional  $V_{(0,0)} \neq 0$  podemos tomar  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

que es 'aniquilado' por  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_I V_{(0,0)} = 0$ , podemos

definir  $V_{(1,0)} \equiv \Gamma_1^\dagger V_{(0,0)}$ ,  $V_{(0,1)} \equiv \Gamma_2^\dagger V_{(0,0)}$ ,  $V_{(1,1)} \equiv \Gamma_1^\dagger \Gamma_2^\dagger V_{(0,0)}$ .

Es fácil mostrar que estos 4 vectores son linealmente independientes - p.ej., es imposible tener

$$V_{(1,0)} + \alpha V_{(0,1)} = (\Gamma_1^\dagger + \alpha \Gamma_2^\dagger) V_{(0,0)} \stackrel{?}{=} 0 \text{ porque entonces}$$

$$\Gamma_1 (\Gamma_1^\dagger + \alpha \Gamma_2^\dagger) V_{(0,0)} = (\underbrace{\{\Gamma_1, \Gamma_1^\dagger\}}_1 + \alpha \underbrace{\{\Gamma_1, \Gamma_2^\dagger\}}_0) V_{(0,0)} \stackrel{x}{=} 0$$

implicaría que  $V_{(0,0)} = 0$ .

Y se puede ver también que actuando sobre estos 4 vectores con las matrices  $\Gamma_I, \Gamma_J^\dagger$  no es posible ya obtener otros vectores linealmente independientes - p.ej.,

$$\Gamma_2 V_{(1,1)} = \Gamma_2 \Gamma_1^\dagger \Gamma_2^\dagger V_{(0,0)} = -\Gamma_1^\dagger \underbrace{\{\Gamma_2, \Gamma_2^\dagger\}}_1 V_{(0,0)} = -V_{(1,0)}.$$

Concluimos entonces que esta rep irreducible del álgebra de Dirac tiene dimensión  $L=4=2^2$ , es decir, las  $\gamma^\mu$  serán matrices  $4 \times 4$ .

(En  $D$  dimensiones espaciotemporales, con  $D$  par, razonando de manera análoga concluiríamos que la rep espinorial del grupo de Lorentz tiene dimensión  $L=2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ . Si  $D$  es impar, basta con tener  $L=2^{\lfloor (D-1)/2 \rfloor}$ , usando las  $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-2}$  que se

construirían para dimensión  $d-1$ , junto con

$\gamma^{d-1} \equiv (i)^{\frac{d-1}{2}} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-2}$ , que, según se puede mostrar, tiene las propiedades deseadas  $\{\gamma^{d-1}, \gamma^{0,1,\dots,d-2}\} = 0, (\gamma^{d-1})^2 = -1.$

18:19/09/18

Si elegimos trabajar en una base donde

$$v_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

podemos deducir que

$$\Gamma_1^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y a partir de esto, que (p. 225:  $\gamma^0 = \Gamma_1 + \Gamma_1^{\dagger}$ , etc.)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver aquí que a fin de cuentas si tenemos  $\Gamma_1^\dagger = (\Gamma_1)^\dagger$ ,  $\Gamma_2^\dagger = (\Gamma_2)^\dagger$ , y como consecuencia de ello,

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i.$$

Nos resultará más conveniente trabajar no en esta base sino en la llamada base de Weyl (o base 'quiral' - ver más adelante), obtenida a través de la transformación de semejanza  $\gamma^\mu \rightarrow B \gamma^\mu B^{-1}$  (que preserva  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$  que corresponde al cambio de base  $V_{(0,0)} \rightarrow B V_{(0,0)}$ ,  $V_{(1,0)} \rightarrow B V_{(1,0)}$ , etc.), con

$$B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En esta nueva descripción, tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

con  $\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  las matrices de Pauli, que satisfacen  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$ . (Así que 2 ó 3 de ellas servirían como  $\gamma^\mu$  en  $D=1+1$  o  $D=2+1$  dim.)

Podemos resumirlas con la notación

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \text{ y } \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) = \sigma_\mu.$$

Podemos notar que en la base de Weyl sigue siendo cierto que  $\boxed{\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i}$  (gracias a que la matriz de cambio de base es unitaria,  $B^\dagger = B^T = B^{-1}$ ).

Cualquier otra irrep del álgebra de Dirac es equivalente a la de Weyl bajo un cambio de base.

Otra elección que se encuentra frecuentemente en los libros de texto es la llamada base de Dirac, donde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

(Dirac en realidad usó originalmente no estas  $\gamma^\mu$  sino las matrices  $\beta \equiv \gamma^0$  y  $\alpha^i \equiv \gamma^0 \gamma^i$ .) Esta base facilita el análisis del límite no relativista. Es fácil verificar

que  $\gamma_{\text{Dirac}}^\mu = B' \gamma_{\text{Weyl}}^\mu B'^{-1}$ , con  $B' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$

(matriz de cambio de base que es nuevamente unitaria,  $B'^\dagger = B'^{-1}$ ).

La razón por la cual nosotros preferiremos trabajar en la base de Weyl quedará clara más adelante.

Llamamos espinor de Dirac a un vector  $\psi$  que transforma bajo Lorentz en la rep espinorial, llamada también rep de Dirac. Es decir, a un paquete de 4 componentes

Complejos  $\psi_a$  ( $a=1,2,3,4$ ) que se mezclan entre sí bajo

Lorentz de acuerdo con

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}}} \psi' \equiv \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}}_{M(\Lambda)} \psi.$$

de finición análoga a la de un vector  $v^\mu \rightarrow \tilde{v}$

En la base de Weyl, los generadores de Lorentz toman

la forma  $\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$   $\rightarrow \sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k \Rightarrow [\sigma^i, \sigma^j] = 2i \epsilon^{ijk} \sigma^k$

$$S^{ij} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}$$

para rotaciones y

$$S^{0i} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -\sigma^i - \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i + \sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{pmatrix}$$

para empujones.

Resumiendo,

$$S^{0i} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que las matrices  $S^{ij}$  son hermitianas, mientras que las  $S^{0i}$  son antihermitianas ( $\leftrightarrow$  rep no unitaria).

LF: 13/03/17

Y vemos además que la rep de Dirac es, en cuanto al grupo de Lorentz restringido  $SO^+(3,1)$ , una representación reducible: los generadores  $S^{mn}$  (y por tanto también los elementos del grupo,  $M(\Lambda) = \exp(\frac{i}{2} \omega_{mn} S^{mn})$ ,) son diagonales por bloques, de tal manera que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  NO se mezclan con  $\psi_3$  y  $\psi_4$ . (Esto es cierto a pesar de que las matrices  $4 \times 4$   $\gamma^m$  sí constituyen una representación irreducible del álgebra de Dirac.) En la base de Weyl podemos descomponer entonces a los espinores de Dirac  $\psi$  en 2 subpaquetes  $\psi_I \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\psi_D \equiv \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$  conocidos como espinores de Weyl:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{espinor } \underline{\text{izquierdo}} \text{ (= de 'quiralidad' negativa)} \\ \text{espinor } \underline{\text{derecho}} \text{ (= de 'quiralidad' positiva)} \end{array}$$

que transforman por separado bajo Lorentz, con generadores

$$\boxed{S_I^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, \quad S_I^{oi} \equiv -i \frac{\sigma^i}{2}, \quad \text{y} \\ S_D^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, \quad S_D^{oi} \equiv +i \frac{\sigma^i}{2}, \quad \text{respectivamente.}}$$

$\psi_I$  ó  $\psi_D$  son los espinores que nos son familiares del caso no relativista, donde NO tenemos  $S^{oi}$ , solo  $S^{ij} \in su(2)$ .



Reconocemos aquí que  $S_I^{M\nu}$  ó  $S_D^{M\nu}$  son los 6 generadores de  $SL(2, \mathbb{C})$  en la rep 'fundamental' (es decir, la que define al grupo: matrices complejas  $2 \times 2$  con determinante = 1  
 $\longleftrightarrow$  álgebra: matrices complejas  $2 \times 2$  con traza = 0) que estudiamos en la Tarea 1. Pero  $S_I^{M\nu}$  y  $S_D^{M\nu}$  dan 2 irreps NO equivalentes de  $SO^+(3,1)$  (y de  $SL(2, \mathbb{C})$ ), es decir, NO están conectados por un cambio de base. (Por otra parte, la rep de  $S_I^{M\nu}$  resulta ser equivalente a la de  $-S_D^{*M\nu}$ .)

Bajo una transformación de Lorentz finita, los espinores de Weyl  $\psi_{\underline{D}}$  se multiplican entonces por las matrices

$$M_{\underline{D}}(\Lambda) = \exp\left(i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \pm \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right),$$

elementos de  $SL(2, \mathbb{C})$  (que como sabemos por la Tarea 1 es el grupo cubriente de  $SO^+(3,1) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$  parámetro de empujón).

En particular, las rotaciones se implementan con matrices

$$\exp\left(i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \in SU(2) \quad (\text{el grupo cubriente de } SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2)$$

que coinciden con las matrices  $D^{[1/2]}(\underline{W})$  que construimos en la p. 88 para obtener la rep de espín  $j=1/2$  (proyectiva) de  $SO(3)$ .

Hemos aprendido entonces que los espinores de Dirac/Weyl transforman en una rep reducible/irreducible de  $SL(2, \mathbb{C})$ , y anticipamos ya que los campos correspondientes  $\Psi(x)/\Psi_{\frac{D}{I}}(x)$  describirán partículas con espín  $\frac{1}{2}$ .

Otra notación común para los espinores de Weyl es

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{espinor izquierdo} \\ \text{con } \alpha = 1, 2, \text{ conocida como notación de} \\ \leftarrow \text{espinor derecho} \end{array}$$

van der Waerden (espinores "con punto" y "sin punto").  
dotter                      undotter

Como veremos más adelante, la transformación de paridad  $P$  intercambia  $\Psi_I \leftrightarrow \Psi_D$ , así que los espinores de Dirac si transforman en una rep irreducible de  $O^+(3, 1)$ .

Conviene definir a la matriz de quiralidad

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

que satisface

$$(\gamma^5)^2 = - \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = +1,$$

$$(\gamma^0)^2 = +1, \quad (\gamma^i)^2 = -1$$

$$\{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = i(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^{\mu} + \gamma^{\mu} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = 0$$

3 signs - y 1+, due to  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$

(de tal forma que  $\gamma^4 \equiv i\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  sería la quinta matriz de Dirac necesaria para representar el álgebra de Dirac en 4+1 dimensiones — ver p. 228).

Como consecuencia de la anticomutación en  $\gamma^\mu$ , tenemos además

$$\begin{aligned} [\gamma^5, S^{\mu\nu}] &= \frac{i}{4} [\gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu] - \frac{i}{4} [\gamma^5, \gamma^\nu\gamma^\mu] \\ &= \frac{i}{4} \left( \{\cancel{\gamma^5, \gamma^\mu}\} \gamma^\nu - \gamma^\mu \{\cancel{\gamma^5, \gamma^\nu}\} - (\mu \leftrightarrow \nu) \right) \\ &= 0. \quad \Rightarrow \gamma^5 \text{ es un } \underline{\text{Commutar}} \end{aligned}$$

$\swarrow \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

Dado que  $\gamma^5$  no es un múltiplo de la identidad, esto nos da por el 'lema de Schur' otra manera (independiente de base) de ver que la rep de Dirac es una rep reducible del grupo de Lorentz.

En la base de Weyl se encuentra que  $\gamma^5$  es diagonal,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \text{esto es lo que tiene de útil la base de Weyl}$$

irreps, respetando el lema de Schur

así que  $\begin{cases} \begin{pmatrix} \psi_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\pm} \end{pmatrix} \end{cases}$  tienen quiralidad  $\begin{cases} \text{negativa} \\ \text{positiva} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \psi_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\pm} \end{pmatrix} &= + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\pm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De hecho, dado un espinor de Dirac en cualquier base,  
podemos definir

$$\Psi_{\text{I}} \equiv \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en base de Weyl}} \Psi, \quad \Psi_{\text{D}} \equiv \underbrace{\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en base de Weyl}} \Psi$$

y tendremos entonces la descomposición  $\Psi = \Psi_{\text{I}} + \Psi_{\text{D}}$   
con  $\gamma^5 \Psi_{\text{I}} = \frac{1}{2}(\gamma^5 - 1)\Psi = -\Psi_{\text{I}}$ ,  $\leftarrow$  *quiralidad negativa*  
 $\gamma^5 \Psi_{\text{D}} = \frac{1}{2}(\gamma^5 + 1)\Psi = +\Psi_{\text{D}}$ .  $\leftarrow$  *quiralidad positiva*

Podemos notar que  $\left(\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)\right)^2 = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$ , es decir,  
 $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$  son matrices de proyección ( $\Rightarrow (\Psi_{\text{I}})_{\text{D}} = \Psi_{\text{I}}$ ),  
con la mitad de sus eigenvalores = 0 ( $\Rightarrow \Psi_{\text{I}}$  tiene 2 componentes).

Para construir la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  para un  
campo de Dirac  $\psi(x)$ ,  $\leftarrow$  un espinor en cada  $x$  necesitamos saber cómo formar  
escalares a partir de los espinores de Dirac  $\Psi$  y las  
matrices  $\gamma^{\mu}$ . Dado que

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{\Lambda}} \Psi' = M(\hat{\Lambda})\Psi = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\Psi$$

(es decir,  $\Psi'_a = M_{ab}\Psi_b$ , con suma implícita sobre  $b$ ),

$$\psi' = M(\underline{\Lambda})\psi = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi$$

tenemos

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger M^\dagger(\underline{\Lambda}) = \psi^\dagger \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger}\right)$$

$$\text{(es decir, } \psi'_a{}^* = \psi_b^*(M^\dagger)_{ba} = \psi_b^*(M^*)_{ab} \text{)}.$$

$$\left(\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)^\dagger = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

Como  $S^{\mu\nu\dagger} \neq S^{\mu\nu}$  ( $\Rightarrow M^\dagger \neq M^{-1}$ ) para empujones (p.231),

concluimos que  $\psi^\dagger\psi$  ( $= \psi_a^*\psi_a$ ) no es escalar.

Por otro lado, las matrices  $S^{\mu\nu\dagger}$  también satisfacen el álgebra de Lorentz (porque las matrices  $\gamma^{\mu\dagger}$  satisfacen el álgebra de Dirac,  $\{\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$ ), por lo que deben estar relacionadas con las  $S^{\mu\nu}$  a través de una transformación de semejanza.

Y efectivamente, notando que (p.230)

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 = \gamma^0(\gamma^0)\gamma^{0-1} \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i = \gamma^0(\gamma^i)\gamma^{0-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^{0-1}$$

$$\text{es decir, } \boxed{\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu}$$

veamos que

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu\dagger} &= -\frac{i}{4}[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}] = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] \\ &= \frac{i}{4}[\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^{0-1}, \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^{0-1}] = \gamma^0 S^{\mu\nu} \gamma^{0-1}, \end{aligned}$$

$\gamma^0$  sirve para 'daguear' o 'desdaguear'

o lo que es lo mismo,  $S^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu}$ . ← aquí de nuevo,  $\gamma^0$   
deja y devolvés

Así que si definimos el espinor conjugado de Dirac

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

tendremos

$$\psi \xrightarrow{\Lambda} \psi' = \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \psi = M(\Lambda) \psi,$$

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}' = \psi'^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu\dagger}\right) \gamma^0$$

$$= \psi^\dagger \left( 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu\dagger} + \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu\dagger}\right) \left(-\frac{i}{2} \omega_{\rho\lambda} S^{\rho\lambda\dagger}\right) + \dots \right) \gamma^0$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \left( 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \left(-\frac{i}{2} \omega_{\rho\lambda} S^{\rho\lambda}\right) + \dots \right)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right)$$

$$= \bar{\psi} \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) = \bar{\psi} M(\Lambda)^{-1}.$$

Y dados 2 espinores de Dirac  $\psi$  y  $\chi$ , la combinación  $\bar{\psi} \chi$  ( $\equiv \bar{\psi}_a \chi_a = \psi_b^* \gamma_{ba}^0 \chi_a$ ) es

un escalar:  $\bar{\psi}' \chi' = \bar{\psi} M^{-1} M \chi = \bar{\psi} \chi$ .

L21: 26/09/22

De manera similar, notando que nuestro resultado previo

$$[\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}] = i (\eta^{\mu\lambda} \delta_\nu^\rho - \eta^{\mu\rho} \delta_\nu^\lambda) \gamma^\nu \quad (\text{p. 224})$$

$$= (J^{\lambda\rho})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad \begin{array}{l} S^{\lambda\rho} \text{ mezcla las 4 } \gamma^\mu \text{ entre} \\ \text{sí como un covector} \end{array}$$

↑ generador de Lorentz en rep vectorial (p. 42)

podemos ver cómo transformamos  $\bar{\Psi} \gamma^\mu \chi \equiv \bar{\Psi}_a \gamma_{ab}^\mu \chi_b$  :  
índice vectorial

$$\bar{\Psi}' \gamma^\mu \chi' = \bar{\Psi} M^{-1} \gamma^\mu M \chi$$

NO quedan índices espinoriales libres

$$= \bar{\Psi} \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}\right) \gamma^\mu \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\sigma\tau} S^{\sigma\tau}\right) \chi$$

p. 62  $\xrightarrow{\text{BCH}}$

$$= \bar{\Psi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}, \gamma^\mu \right]_n \chi$$

$$\equiv \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\lambda_1 \rho_1} S^{\lambda_1 \rho_1}, \left[ \dots, \left[ -\frac{i}{2} \omega_{\lambda_n \rho_n} S^{\lambda_n \rho_n}, \gamma^\mu \right] \dots \right] \right]$$

$$= \left( \left( +\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} J^{(\lambda\rho)} \right)^n \right)^\mu \gamma^\nu \chi$$

p. 238  
no tiene índices a, b

$$= \bar{\Psi} \left( \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} J^{(\lambda\rho)}\right) \right)^\mu \gamma^\nu \chi$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu \chi.$$

Es decir, gracias a que  $\boxed{M^{-1} \gamma^\mu M = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu}$ ,

$\bar{\Psi} \gamma^\mu \chi$  transforma como un vector bajo Lorentz.

Evidentemente, si definimos  $\gamma_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$ ,

$\bar{\Psi} \gamma_\mu \chi$  transforma como un vector dual.

119: 2/01/13

Tomando productos de las  $\gamma^\mu$  podremos formar también tensores. Y de hecho, dado que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \underbrace{\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]}_{\equiv \gamma^{\mu\nu} (= -2iS^{\mu\nu})} + \underbrace{\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{\eta^{\mu\nu} \text{ matriz } \mathbb{1} \text{ implícita}},$$

para cubrir todas las posibilidades basta con considerar productos totalmente antisimétricos:

$$\gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \frac{1}{n!} (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n} - \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n} + \dots)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si 2 o más índices se repiten} \\ \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n} & \text{si no se repiten.} \end{cases}$$

Sabiendo que  $\mu$  solo puede tomar 4 valores distintos, vemos que las únicas posibilidades independientes son

$$n=0 : \quad \mathbb{1} \quad \leftarrow \quad 1 \text{ matriz}$$

$$n=1 : \quad \gamma^\mu \quad \leftarrow \quad 4 \text{ matrices}$$

$$n=2 : \quad \gamma^{\mu\nu} \quad \leftarrow \quad \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ matrices}$$

$$n=3 : \quad \gamma^{\mu\nu\lambda} \quad \leftarrow \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 4 \text{ matrices}$$

$$n=4 : \quad \gamma^{\mu\nu\lambda\rho} \quad \leftarrow \quad 1 \text{ matriz.}$$

LIB-15/03/17



Esto nos da un total de 16 matrices independientes, que es justo el mismo número de componentes que tiene una matriz arbitraria  $4 \times 4$ . Estas 16 matrices constituyen entonces una base para el espacio de matrices  $4 \times 4$ .

Podemos notar además que

$$\gamma^{\mu\nu\lambda\sigma} = -i \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}}_{\epsilon^{0123} \equiv +1} \gamma^5$$

$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  ←

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu\lambda} &= \underbrace{\gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}}_{\substack{\gamma^{\mu\nu\lambda}\gamma^\sigma \\ \text{con } \sigma \neq \mu, \nu, \lambda}} \gamma_\sigma = -i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma^5 \gamma_\sigma \\ &= i \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5, \end{aligned}$$

$\gamma^\sigma \gamma_\sigma = +1$  sin suma sobre  $\sigma$   
( $\gamma^\sigma \gamma_\sigma = +4 \mathbb{1}$  con suma)

de modo que podemos contabilizar a las 16 matrices como

$$\mathbb{1}, \gamma^\mu, S^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5.$$

Dado un espinor  $\psi$ , los tensores independientes que podemos formar son entonces

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}S^{\mu\nu}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi$$

escalar      vector      tensor (2,0)      pseudovector      pseudoscalar  
antisimétrico      ( $\equiv$  vector axial)

(naturalmente, podríamos reemplazar  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\chi}$  ó  $\psi \rightarrow \chi$ ),

El adjetivo "pseud" aplicado a los 2 últimos objetos se refiere a la manera en que transforman bajo paridad.

Para entender esto, debemos primero preguntarnos cómo se implementa en la rep de Dirac la operación de paridad,

$$\underline{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{esta es una transformación de Lorentz (una } \underline{\Lambda} \text{)}$$

Por definición, cualquier vector

$$v^\mu = (v^0, \vec{v}) \xrightarrow{\underline{P}} \underline{P}^\mu{}_\nu v^\nu = (v^0, -\vec{v}),$$

así que buscamos una matriz  $4 \times 4$   $M(\underline{P})$  tal que

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \xrightarrow{\underline{P}} \bar{\psi} M(\underline{P})^{-1} \gamma^\mu M(\underline{P}) \psi = \underline{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi,$$

es decir, deseamos tener  $M^{-1} \gamma^0 M = \gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$ ,  $M^{-1} \gamma^i M = -\gamma^i = \gamma^{i\dagger}$ .

Sabemos ya <sup>γ-237</sup> que esto se logra tomando  $M(\underline{P}) = \gamma^0$  ( $=\gamma^{0^{-1}}$ ).

Vemos entonces que  $\{ \gamma^\mu, \gamma^5 \} = 0$

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi \xrightarrow{\underline{P}} \bar{\psi} \overset{M(\underline{P})^{-1}}{\gamma^0} \gamma^5 \overset{M(\underline{P})}{\gamma^0} \psi = -\bar{\psi} \gamma^5 \psi,$$

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{\underline{P}} \gamma^0 \psi \\ \psi^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger \gamma^0 \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \gamma^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi &\xrightarrow{\underline{P}} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi = \begin{cases} -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{si } \mu=0 \\ +\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{si } \mu=i \end{cases} \\ &= -\underline{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^5 \psi, \end{aligned}$$

donde aparecen signos menos adicionales, que son justamente a lo que se refiere el adjetivo "pseud".

Ahora que conocemos  $M(\underline{P})$ , podemos ver además que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{P}} \psi' = \gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_D \\ \psi_I \end{pmatrix},$$

es decir, justo como habíamos prometido, **la paridad intercambia a los espinores de Weyl izquierdos y derechos.**

Podemos verificar que este resultado es independiente

de nuestra elección de base para las matrices de Dirac:

recordando (p.236) la definición  $\psi_D \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi$ ,

veremos que  $M(\underline{P})$  efectivamente invierte la quiralidad,

$$\psi_D \xrightarrow{\underline{P}} \gamma^0 \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5) \underbrace{\gamma^0 \psi}_{\psi'} = \psi'_D.$$

Es cierto entonces que, como dijimos en la p. 234,

**es solo con los espinores de Dirac que obtenemos una rep (irreducible) de  $O^+(3,1)$  (con los espinores de Weyl, en cambio, únicamente tenemos una rep de  $so^+(3,1)$ ).**

Vale la pena resumir lo que hemos aprendido aquí, enfatizando la relación con lo que se cubre en un curso de cuántica no relativista. En ese contexto, los espinores se definen únicamente con referencia al grupo de rotaciones  $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$ : en parámetros  $\xi$  de 2 números complejos que se mezclan entre sí de acuerdo con  $\xi \rightarrow \xi' = \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{ij} J_{[1/2]}^{ij}\right) \xi$ , con  $J_{[1/2]}^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2} = -\frac{i}{4} [\sigma^i, \sigma^j]$ .

Al pasar al caso relativista, considerando primero el grupo  $SO^+(3,1) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ , para incorporar a los empujones (rotaciones por un ángulo imaginario) nos basta con los mismos  $\xi$  y las matrices de Pauli  $\vec{\sigma}$ , pero encontramos que hay 2 maneras no equivalentes de definir a los generadores,

$$J_{[1/2]I}^{0i} \equiv S_I^{0i} \equiv -\frac{i\sigma^i}{2} \quad \text{ó} \quad J_{[1/2]D}^{0i} \equiv S_D^{0i} \equiv +\frac{i\sigma^i}{2}$$

dando lugar por tanto a la noción de espinores (de Weyl) izquierdos y derechos  $\xi_I \equiv \psi_I$  y  $\xi_D \equiv \psi_D$ .

Por último, si queremos incorporar a la pericidad, necesitamos combinar a  $\psi_I$  y  $\psi_D$  en un espinor de Dirac  $\Psi$ , y generalizar  $\vec{\sigma}$  a  $\gamma^\mu$  para formar  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Estamos ya por fin listos para escribir una densidad Lagrangiana para el campo de Dirac

$\Psi(t, \vec{x}) \equiv$  función que asigna un espinor de Dirac a cada punto del espacio, en cada instante del tiempo.

Vale la pena enfatizar que este es, de entrada, un campo complejo, que no se puede restringir fácilmente a ser real, porque las matrices  $M(\underline{\Lambda})$  son complejas (regresaremos a este punto en la Tarea 4: "espinor de Majorana").

Nos convendrá usar como variables independientes no a  $\Psi(x)$  y  $\Psi^*(x)$  ó  $\Psi^\dagger(x)$ , sino a  $\Psi(x)$  y  $\bar{\Psi}(x)$ .

Necesitamos entonces una función

$$\mathcal{L}(\Psi_a, \partial_\mu \Psi_a, \bar{\Psi}_a, \partial_\mu \bar{\Psi}_a) \text{ que sea } \underline{\text{real}} \text{ y } \underline{\text{escalar}}.$$

$\int \Psi_b^* \gamma_{ba}^0$

Copiando del caso del campo de Klein-Gordon complejo, p. 179 podríamos proponer

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \partial_\mu \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi,$$

que efectivamente es invariante bajo

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = M(\underline{\Lambda})\psi(x) \quad \leftarrow p.238$$

( $\Rightarrow \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) M(\underline{\Lambda})^{-1}$ ), y además es real:

$$(\bar{\psi}\psi)^* = (\psi_a^* \gamma_{ab}^0 \psi_b)^* = \psi_a \underbrace{(\gamma_{ab}^{0*})}_{(\gamma^{0\dagger})_{ba}} \psi_b^* = \psi_b^* \gamma_{ba}^0 \psi_a = \bar{\psi}\psi.$$

$\nearrow \gamma^{0\dagger} = \gamma^0$

La ec. de Euler-Lagrange sería entonces obviamente la

ec. de Klein-Gordon:  $\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi - m^2 \bar{\psi} \psi$

$$-\frac{\delta \mathcal{L}_{KG}}{\delta \bar{\psi}_a} = (\partial^2 + m^2) \psi_a = 0. \quad \Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2$$

para las eventuales partículas ✓

↳ cada componente por separado satisface K-G

Pero lo que mostró Dirac es que, gracias a la existencia de las  $\gamma^\mu$ , es de hecho posible escribir otro Lagrangiano que es más sencillo, en el sentido de que el término cinético contiene una sola derivada:

$$\mathcal{L}_D = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

Lagrangiano de Dirac

↑ coeficiente = 1 por convención (ajustando normalización de  $\psi$ )

↑ por análisis dimensional (no  $m^2$ ) signo menor por convención

Vimos ya que  $\bar{\psi}\psi$  es escalar y real. Podemos verificar



es decir,

$$\begin{aligned} (i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi)^* &= -i\partial_{\mu}\Psi_c^*(\gamma^0\gamma^{\mu})_{ca}\Psi_a \\ &= -i\partial_{\mu}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi, \end{aligned}$$

que al integrar por partes (dentro de la acción  $S_D \equiv \int d^4x \mathcal{L}_D$ ) coincide correctamente con el término original

$$= +i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi. \quad \checkmark$$

o si preferimos,  
podríamos usar  
 $\frac{1}{2}(i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - i\partial_{\mu}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)$

Es importante recalcar que el término de masa en  $\mathcal{L}_D$  involucra a  $m$  y no a  $m^2$  como en  $\mathcal{L}_{KG}$ . Esto es necesario por análisis dimensional, porque  $[\partial_{\mu}] = [m]$ . Faltaría ver si esta  $m$  realmente es la masa de las partículas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen a partir de  $\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$  son

$$\frac{\delta S_D}{\delta \bar{\Psi}_a} = i\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu}\Psi_b - m\Psi_a = i\partial_{\mu}(\gamma^{\mu}\Psi)_a - m\Psi_a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi = 0}$$

↖  $m\mathbb{1}$

Ecuación de Dirac

y



$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_D}{\delta\psi_a} = -i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu)_a - m\bar{\psi}_a = 0$$

$$\Rightarrow -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0,$$

que por supuesto es simplemente la versión conjugada de la ec. de Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \Rightarrow \psi^\dagger(-i\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m) = 0$$

$$\Rightarrow \psi^\dagger(-i\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m)\gamma^0 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m) = 0. \quad \checkmark$$

Podemos observar ahora que pasa algo interesante si actuamos sobre la ec. de Dirac con el operador diferencial  $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$  desde la izquierda:

$$0 = (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

$$= (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi$$

$$= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi$$

$$= (\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi,$$

¡que es la ec. de Klein-Gordon! Aprendemos entonces que la ec. de Dirac implica que el campo  $\psi(x)$  satisface la ec. de Klein-Gordon, pero contiene aún más información: al requerir que

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\Psi = \begin{pmatrix} -m\mathbb{1} & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \end{matrix}$$

imponemos una relación entre  $\Psi_I$  y  $\Psi_D$ . Si  $m \neq 0$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} \Psi_I(x) = \frac{i}{m} \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_D(x) \\ \left( \overset{K-G}{\longleftrightarrow} \Psi_D(x) = \frac{i}{m} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_I(x) \right) \end{pmatrix}.$$

Así que, usando  $\mathcal{L}_D$ , el campo de Dirac  $\psi(x)$  acaba teniendo solo la mitad de los grados de libertad que hubiera tenido si usáramos  $\mathcal{L}_{KG}$ : 2 números complejos en cada punto  $x^\mu$ , en lugar de 4.

Se presenta una excepción a esto si  $m=0$ . En ese caso,  $\Psi_I(x)$  y  $\Psi_D(x)$  son dinámicamente independientes, y obedecen las ecs. de movimiento

$$i\bar{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{I}}(x)=0, \quad i\sigma^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{D}}(x)=0.$$

Ecs. de Weyl  
reducen a la mitad  
grada de libertad de  $\psi_{\text{I,D}}$

Este acoplamiento o desacoplamiento entre  $\psi_{\text{I}}(x)$  y  $\psi_{\text{D}}(x)$   
por supuesto puede verse también a nivel del Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{D}} &= i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= i(\psi_{\text{I}}^{\dagger}\psi_{\text{D}}^{\dagger})\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{\mu}\psi_{\text{I}} \\ \partial_{\mu}\psi_{\text{D}} \end{pmatrix} - m(\psi_{\text{I}}^{\dagger}\psi_{\text{D}}^{\dagger})\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{\text{I}} \\ \psi_{\text{D}} \end{pmatrix} \\ &= i\psi_{\text{I}}^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{I}} + i\psi_{\text{D}}^{\dagger}\sigma^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{D}} - m\psi_{\text{I}}^{\dagger}\psi_{\text{D}} - m\psi_{\text{D}}^{\dagger}\psi_{\text{I}} \end{aligned}$$

Una vez más  
para usar  $\psi$  → el término de masa  
acopla a  $\psi_{\text{I}}$  con  $\psi_{\text{D}}$

Así como hicimos antes para la ec. de Klein-Gordon,  
construiremos ahora un conjunto completo de soluciones a  
la ec. de Dirac. Dado que  $\psi(x)$  satisface la ec. de  
Klein-Gordon, debe poderse escribir como una superposición  
de ondas planas  $e^{\pm ip \cdot x}$  con  $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv E_{\vec{p}}$ .

Consideremos primero los modos de frecuencia positiva  
(cuyos coeficientes, al cuantizar, serán operadores de

aniquilación ) :  $\swarrow$  por separado veremos después  $v(p)e^{+ip \cdot x}$

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \text{ con } p^2 = m^2, p^0 > 0$$

$\uparrow$  espinor de Dirac (podríamos denotarlos  $u_{\pm}$ )

Si  $m \neq 0$ , por la p.249 anticipamos que  $u_{\pm}$  y  $u_{\pm}$  están relacionados

Para el caso  $m=0$ , sabemos que podemos analizar por

separado a  $u_{\pm}(p)$  y  $u_{\pm}(p)$ , que satisfacen las ecs. de Weyl  $\leftarrow$  p.250

$$\begin{cases} i\bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\pm}(x) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}^{\mu} p_{\mu} u_{\pm}(p) = (p^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{\pm}(p) = 0 \\ i\sigma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\pm}(x) = 0 \Rightarrow \sigma^{\mu} p_{\mu} u_{\pm}(p) = (p^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{\pm}(p) = 0 \end{cases}$$

Si tomamos p.ej.  $p^{\mu} = p_{\mu} = (1, 0, 0, 1)$ , estas ecs. implican

$$\text{que } \begin{pmatrix} 1 + \sigma^3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\pm}(p_R) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 - \sigma^3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\pm}(p_R) = 0,$$

es decir,  $u_{\pm}(p_R) \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $u_{\pm}(p_R) \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

así que el espinor de Weyl  $u_{\pm}(p_R)$  es un eigenvector del

generador de rotaciones (p.232) alrededor del eje definido por

$$\vec{p}_R, \quad S_{\pm}^{12} = \frac{\sigma^3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con eigenvalor } \mp \frac{1}{2}.$$

LI: 17/03/17

Más en general, si recordamos que la helicidad se define

$$\text{como } h \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{S}, \text{ que para } m=0 \text{ equivale a } h = \frac{\vec{p}}{p^0} \cdot \frac{\vec{S}}{2},$$

$\uparrow$   $\vec{J}$  en representación espinorial

$$(\vec{p} \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{\pm}(p) = 0$$

veamos que las ec. de Weyl implican que el espinor de quiralidad negativa  $u_{-}(p)$  tiene helicidad  $h = -1/2$  es decir, helicidad 'izquierda', mientras que el espinor de quiralidad positiva  $u_{+}(p)$  tiene helicidad 'derecha',  $h = +1/2$ .

Es importante tener presente que esta relación directa entre quiralidad y helicidad es válida solo en el caso no masivo (o, de manera aproximada, en el límite ultrarelativista del caso masivo,  $|\vec{p}| \gg m \leftrightarrow p^0 \sim |\vec{p}|$ ).

[20: 24/09/18]

Para  $m \neq 0$ , la ec. de Dirac con  $\psi(x) \sim u(p) e^{-ip \cdot x}$

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi(x) = 0 \Rightarrow (\gamma^{\mu} p_{\mu} - m) u(p) = 0.$$

Consideremos primero el modo en reposo  $p^{\mu} = p_{R}^{\mu} \equiv (m, \vec{0})$ ,

$$m(\gamma^0 - \mathbb{1}) u(p_R) = m \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{-}(p_R) \\ u_{+}(p_R) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow u(p_R) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \text{ donde } \xi \text{ denota un espinor de}$$

Weyl con 2 componentes arbitrarias. Hemos elegido

normalizar nuestro espinor  $u$  con un factor de  $\sqrt{m}$ , para que los coeficientes arbitrarios de  $u e^{-ip \cdot x}$  (números con dimensión  $-3/2$ , ver p. 261a),  $a_{\vec{p}} (\leftrightarrow \hat{a}_{\vec{p}})$ , tengan los mismos

unidades que antes:  $[\partial_{\mu} \psi^{\dagger} \partial^{\mu} \psi] = 4 \rightarrow [\psi] = 1$  vs.

$$[i\bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi] = 4 \Rightarrow [\psi] = 3/2. \quad \leftarrow \text{al potenciar de masa}$$

Usaremos como base a las 2 opciones independientes

$$\xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \text{Normalización específica. Por eso necesitaremos coeficiente numérico } a_p^s; \quad \xi = a_p^s \xi^s$$

que son ortonormales:  $\xi^r \dagger \xi^s = \delta^{rs} \quad \forall r, s = 1, 2.$

Tenemos entonces los 2 espinores de Dirac independientes

$$u^1(p_R) \equiv \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u^2(p_R) \equiv \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\leftarrow$  No confundir superíndices  $r, s = 1, 2$  con subíndices espinoriales  $a, b, c = 1, \dots, 4$

Como habíamos anticipado, después de imponer la ec. de Dirac, el espinor  $\psi$  contiene solo 2 grados de libertad (complejos) independientes.

Bajo la acción del grupito de rotaciones, generada por (p.231)

$$S^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}, \quad \xi \text{ transforma como un espinor}$$

usual de  $SU(2)$ .  $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  corresponden

respectivamente a eigenvalores  $\pm \frac{1}{2}$  de  $S^{12} \equiv S^3$ , de modo

que al cuantizar al campo de Dirac, anticipamos que los

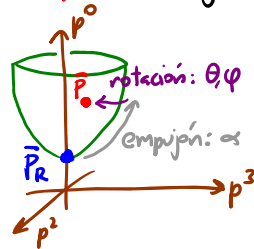
coeficientes  $a_{p_R}^1$  y  $a_{p_R}^2$  de  $u^1(p_R) e^{-ip_R \cdot x}$  y  $u^2(p_R) e^{-ip_R \cdot x}$

serán operadores de aniquilación asociados respectivamente a

partículas en reposo con 'espín arriba' y con 'espín abajo'.

Para  $p^\mu$  arbitrario, podríamos definir

$$u^r(p) \equiv M(\underline{L}(p)) u^r(p_R),$$



donde  $\underline{L}(p)$  es la transformación de Lorentz 'canónica' que convierte a  $p_R^\mu$  en  $p^\mu$  (ver p. 78). Pero resulta más fácil tomar un atajo, notando que para cualquier espín  $u$ ,

↙ operador de Dirac para frecuencia positiva (con  $p^2 = m^2$ )

$$\begin{aligned} (\cancel{\not{p}} + m)(\cancel{\not{p}} - m) u &= (\cancel{\not{p}}^2 - m^2) u \\ &= \left( \frac{1}{2} \{ \cancel{\not{p}}^\mu, \cancel{\not{p}}^\nu \} p_\mu p_\nu - m^2 \right) u \\ &= (\cancel{\not{p}}^\mu p_\mu - m^2) u \\ &= (p^2 - m^2) u = 0, \end{aligned}$$

↙ porque  $p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$

es decir,  $(\cancel{\not{p}} + m)u$  es una solución a Dirac con momento  $p^\mu$  y frecuencia positiva. Dado que

$$(\cancel{\not{p}} + m) u^r(p_R) = m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^r \end{pmatrix} = 2m u^r(p_R),$$

↙ p. 252

veremos entonces que podemos escribir

$$u^r(p) \equiv N_p (\cancel{\not{p}} + m) u^r(p_R),$$

con  $N_p$  algún factor de normalización tal que  $N_{p_R} = \frac{1}{2m}$ .

Podemos determinar  $\mathcal{N}_p$  recordando que la combinación

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(p_2) u^s(p_2) &= m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \xi^{rt} \xi^s \\ &\stackrel{p.253}{=} 2m \delta^{rs} \end{aligned}$$

es un escalar bajo Lorentz, y debe por tanto ser igual a

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(p) u^s(p) &= \underbrace{|\mathcal{N}_p|^2 m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{versión transformada de Lorentz de } \bar{u}(p_2) \\ \mathcal{N}_p(p+m) u^s(p_2) \\ \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ p.254 \\ p.252}} \underbrace{\begin{pmatrix} p^t + m \\ p^t + m \end{pmatrix} \gamma^0(p+m)}_{\substack{\gamma^0(p+m) \\ p^2 + 2mp + m^2 = 2mp + 2m^2 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = p^2 = m^2 \\ p.254 \\ 2m(p+m)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ &= |\mathcal{N}_p|^2 m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} 2m \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ &= 2m |\mathcal{N}_p|^2 m \xi^{rt} \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m\mathbb{1} \end{pmatrix} \xi^s \quad \begin{matrix} \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \end{matrix} \\ &= 2m |\mathcal{N}_p|^2 m \xi^{rt} \underbrace{\left( m\mathbb{1} + \underbrace{\sigma \cdot p + \bar{\sigma} \cdot p}_{2\mathbb{1} p^0} + m\mathbb{1} \right)}_{\substack{\text{debe ser } = 1}} \xi^s \\ &= 2m |\mathcal{N}_p|^2 m 2(m+p^0) \delta^{rs} \end{aligned}$$



Concluimos entonces que necesitamos fijar

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p^0)}} \quad \left( \text{que satisface } N_{p_R} = \frac{1}{2m} \checkmark \right),$$

En resumen, hemos visto explícitamente que

$$u^r(p) \equiv \frac{m+p^0}{\sqrt{2(m+p^0)}} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son 2 espinores independientes que satisfacen la ec. de Dirac en espacio de momentos con frecuencia positiva,

$$(\not{p} - m)u(p) = 0.$$

22:30/09/22

Y en el camino, aprendimos también que  $\frac{1}{2m}(m+\not{p})$  es una matriz de proyección:  $\left[ \frac{1}{2m}(m+\not{p}) \right]^2 = \frac{1}{2m}(m+\not{p})$ .  
proyecta sobre soluciones a Dirac en espacio de momentos en frecuencia positiva

De manera similar, podemos construir soluciones con frecuencia negativa,

$$\psi(x) = v(p) e^{+ip \cdot x} \quad \text{con } p^2 = m^2, \quad p^0 > 0,$$

para las cuales la ec. de Dirac  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$  equivale a  $-(\not{p} + m)v(p) = 0$ .

En el marco en reposo, esto es  $m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(p_R) \\ v_b(p_R) \end{pmatrix} = 0,$

lo cual nos lleva a las 2 soluciones independientes

$$V^r(p_r) \equiv \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^r \\ -\xi^r \end{pmatrix}. \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Razonando como antes, y utilizando ahora a la matriz de proyección  $\frac{1}{2m}(m-p)$ , podemos deducir que

$$V^r(p) \equiv \frac{m-p}{\sqrt{2(m+p^0)}} \begin{pmatrix} \xi^r \\ -\xi^r \end{pmatrix} \quad \text{con } \xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son 2 soluciones independientes a la ec. de Dirac en espacio de momentos con frecuencia negativa,  $(p+m)V(p)=0$ .

Estas 2 soluciones son, como las  $u^r(p)$ , ortogonales en el sentido de que

$$\begin{aligned} \bar{V}^r(p) V^s(p) &= \bar{V}^r(p_r) V^s(p_r) = m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & -\xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\xi^s \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & -\xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = -2m \xi^{rt} \xi^s \\ &= -2m \delta^{rs} \quad \left( = -\bar{u}^r(p) u^s(p) \right). \end{aligned}$$

Podemos ver además que las soluciones  $u^r(p)$  son ortogonales a las  $V^s(p)$ :

$$\bar{u}^r(p) v^s(p) = \bar{u}^r(p_R) v^s(p_R) = m \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{r\dagger} & \xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\bar{\xi}^s \end{pmatrix} = 0,$$

$$\bar{v}^s(p) u^r(p) = v^{s\dagger}(p) \gamma^0 u^r(p) = (u^{r\dagger}(p) \gamma^0 v^s(p))^\dagger = (\bar{u}^r(p) v^s(p))^\dagger = 0.$$

Y podemos igualmente calcular los productos no invariantes

$$u^{r\dagger}(p) u^s(p) = \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{r\dagger} & \xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{m+p}{\sqrt{2(m+p)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix}}_{\gamma^{0\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^m \\ \sigma^m & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 + (\bar{\sigma} \cdot p)^2 & m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p \\ m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p & m^2 + (\sigma \cdot p)^2 \end{pmatrix},$$

$$2p^0$$

que usando

$$m^2 + (\sigma \cdot p)^2 = m^2 + (p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = m^2 + (p^0)^2 + \underbrace{\sigma^i \sigma^j p^i p^j}_{\substack{\delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k \\ \vec{p}^2}} - 2p^0 \bar{\sigma} \cdot \vec{p}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \sigma^m = (1, \vec{\sigma}) \\ \uparrow \bar{\sigma}^m = (1, -\vec{\sigma}) \end{matrix}$$

$$= 2p^0 (p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p}),$$

$$m^2 + (\bar{\sigma} \cdot p)^2 = m^2 + (p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = 2p^0 (p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p}), \text{ se reduce a}$$

$$u^{r\dagger}(p) u^s(p) = \frac{p^0}{(m+p^0)} \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{r\dagger} & \xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p} & m \\ m & p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix},$$

es decir,

$$u^{rt}(p) u^s(p) = \frac{p^0}{m+p^0} \xi^{rt} \left( \cancel{p^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}} + m + m + \cancel{p^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}} \right) \xi^s$$

$$= 2p^0 \xi^{rt} \xi^s = 2p^0 \delta^{rs}.$$

De manera similar,

$$v^{rt}(p) v^s(p) = 2p^0 \delta^{rs},$$

y las  $u$ 's y las  $v$ 's resultan ser ortogonales en el sentido de que

$$u^{rt}(\vec{p}) v^s(-\vec{p}) = 0 = v^{rt}(\vec{p}) u^s(-\vec{p}).$$

Demostraremos esto de manera indirecta en p.269

En varias ocasiones necesitaremos también las "sumas de espín"

$$\sum_{s=1}^2 u^s(p) \bar{u}^s(p) = \frac{(m+p^0)}{2(m+p^0)} \sum_{s=1}^2 \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} (\xi^{st} \xi^{st}) (m+p^0) \gamma^0$$

$$\frac{m+p^0}{\sqrt{2(m+p^0)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \underbrace{\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1010) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0101) \right)}_{\gamma^0(m+p^0)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz que proyecta sobre espinores tipo  $u(p_R)$

$$\underbrace{m+p} \quad \underbrace{\sum_s \binom{s}{\sigma} \binom{m+p-s}{\sigma}}_{\gamma^0} \quad \underbrace{m+p}$$

$$\sum_{s=1}^2 \bar{u}^s(p) \bar{u}^s(p) = \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m+\bar{\sigma} \cdot p & m+\sigma \cdot p \\ m+\bar{\sigma} \cdot p & m+\sigma \cdot p \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} m^2 + m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p + \sigma \cdot p \bar{\sigma} \cdot p & m^2 + (\sigma \cdot p)^2 + 2m\sigma \cdot p \\ m^2 + (\bar{\sigma} \cdot p)^2 + 2m\bar{\sigma} \cdot p & m^2 + m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p + \sigma \cdot p \bar{\sigma} \cdot p \end{pmatrix}$$

$\underbrace{2p^0}_{p.258} \quad \underbrace{2p^0(p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p}) = 2p^0 \sigma \cdot p}_{p.258}$

$$\underbrace{2p^0(p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p}) = 2p^0 \bar{\sigma} \cdot p}_{p.258}$$

$$\begin{aligned} & (\vec{p} - \sigma^i p^i) (\vec{p} + \sigma^j p^j) \\ &= (p^0)^2 - \sigma^i \sigma^j p^i p^j \\ &= (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} 2(m+p^0)m & 2(m+p^0)\sigma \cdot p \\ 2(m+p^0)\bar{\sigma} \cdot p & 2(m+p^0)m \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\sum_{s=1}^2 \bar{u}^s(p) \bar{u}^s(p) = \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} = m + \not{p}.$$

La matriz que aparece del lado derecho es esencialmente la matriz de proyección que conocemos de la p.256, que proyecta sobre espinores tipo  $u(p)$ , es decir, sobre soluciones a la ec. de Dirac con frecuencia positiva.

Igualmente se puede mostrar que

$$\sum_{s=1}^2 v^s(p) \bar{v}^s(p) = -(m - \not{p}) \quad ,$$

donde nuevamente aparece una matriz de proyección conocida (p.257), que proyecta sobre espinores tipo  $v(p)$ , es decir, sobre soluciones a la ec. de Dirac con frecuencia negativa.

Podemos notar por último que

$$\frac{1}{2m} \left( \underbrace{u^1(p) \bar{u}^1(p) + u^2(p) \bar{u}^2(p)}_{m + \not{p}} - \underbrace{v^1(p) \bar{v}^1(p) - v^2(p) \bar{v}^2(p)}_{m - \not{p}} \right) = \mathbb{1} \quad ,$$

relación de completitud que muestra que los  $u$ 's y los  $v$ 's nos dan una base para todo los espinores.

20: 22/03/17

Juntando toda la información anterior,

$$(i\not{D} - m)\psi(x) = 0$$

Klein-Gordon

$$u(p)e^{-ip \cdot x}$$

$$v(p)e^{+ip \cdot x}$$

Dirac  
 $\psi_I = f(\psi_D)$

$$u^1(p) \quad u^2(p)$$

$$v^1(p) \quad v^2(p)$$

concluimos que la solución más general a la ec. de Dirac se puede escribir en la forma

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p^r u^r(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{*s} v^s(p) e^{+ip \cdot x} \right) \Big|_{\vec{p} = \vec{E}_p}$$

↑ ↑  
suma sobre r  
implícita

↑ ↑  
suma sobre s  
implícita

con  $a_p^r, b_p^{*s}$  números complejos arbitrarios

$$\left( \Leftrightarrow \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p^{*r} \bar{u}^r(p) e^{+ip \cdot x} + b_p^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{\vec{p} = \vec{E}_p} \right).$$

Con esto estamos por fin listos para proceder hacia la cuantización canónica del campo de Dirac. El primer paso, como siempre, es identificar a los momentos canónicos conjugados a  $\psi$  y  $\psi^\dagger$  (ó  $\bar{\psi}$ ).

$\gamma^{\mu} \partial_{\mu}$ 

A partir de  $\mathcal{L}_D = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - m\bar{\psi}\psi$   
 podemos deducir los momentos canónicos

$$\pi_{\psi}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\bar{\psi}(x) \gamma^0 = i\psi^{\dagger}(x) \quad (\text{i.e., } \pi_{\psi_a} = i\psi_a^*),$$

$$\pi_{\psi^{\dagger}}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\psi}^{\dagger}(x)} = 0 \quad (\neq (\pi_{\psi})^{\dagger}).$$

$\uparrow$  porque  $\mathcal{L}_D \notin \mathbb{R}$  (aunque  $S_D \in \mathbb{R}$  ✓)

A diferencia de lo que sucedió para el campo escalar complejo (donde teníamos  $\pi_{\varphi} = \dot{\varphi}^*$ ,  $\pi_{\varphi^*} = \dot{\varphi}$ ), estas relaciones no nos permiten despejar a  $\psi$  y  $\psi^{\dagger}$  en términos de  $\pi_{\psi}$  y  $\pi_{\psi^{\dagger}}$ , sino que expresan el hecho de que las variables canónicas  $\psi, \psi^{\dagger}, \pi_{\psi}, \pi_{\psi^{\dagger}}$  no son todas independientes:

$$\chi_1 \equiv \pi_{\psi} - i\psi^{\dagger} = 0 \quad \text{y} \quad \chi_2 \equiv \pi_{\psi^{\dagger}} = 0$$

son constricciones. (Según la clasificación inventada también por Dirac, son constricciones "de segunda clase", es decir, el paréntesis de Poisson  $\{\chi_1, \chi_2\}_P \neq 0$ .)

La existencia de estas constricciones está relacionada con la reducción de grado de libertad inducida por la ec. de Dirac.



El Hamiltoniano es  $H_D = \int d^3x \mathcal{H}_D(x)$ , con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= \underbrace{\pi_\psi \dot{\psi}}_{p.262} + \underbrace{\pi_{\psi^\dagger} \dot{\psi}^\dagger}_{\pi_\psi \dot{\psi} + i \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi} - \mathcal{L}_D \\ &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - (i \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi - m \bar{\psi} \psi) \\ &= -i \bar{\psi} \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi + m \bar{\psi} \psi. \end{aligned}$$

(Podemos reescribirlo en la forma

$$\mathcal{H}_D = \psi^\dagger(x) \left( \underbrace{-i \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}}_{\equiv \vec{\alpha}} + \underbrace{m \gamma^0}_{\equiv \beta} \right) \psi(x),$$

donde la expresión  $-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m \beta$  que aparece entre

paréntesis es el Hamiltoniano original que escribió Dirac para no relativista operar sobre funciones de onda de 1 partícula - cf. p. 129 -)

22-26/09/18

Al cuantizar, promovemos como siempre

$$\psi(x), \pi_\psi(x), \psi^\dagger(x), \pi_{\psi^\dagger}(x) \longrightarrow \hat{\psi}(x), \hat{\pi}_\psi(x), \hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\pi}_{\psi^\dagger}(x)$$

pero NO podemos simplemente pedir que los conmutadores coincidan (como es habitual) con (i par) los paréntesis de Poisson, puesto que, p.ej.,

$$\left\{ \Psi_a^\dagger(t, \vec{x}), \Pi_{\Psi_b^\dagger}(t, \vec{x}') \right\}_P = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \overset{\Pi_{\Psi_b^\dagger}(t, \vec{x}')}{\neq} \left\{ \Psi_a^\dagger(t, \vec{x}), 0 \right\}_P !$$

Es decir, los paréntesis de Poisson No son compatibles con las restricciones de nuestro sistema. La receta

correcta (para sistemas con restricciones "de segunda clase", ver Weinberg o Henneaux & Teitelboim, <sup>→ Bister</sup>) es postular relaciones de conmutación a partir NO de los paréntesis de Poisson sino de los paréntesis de Dirac.

$$\left( \{A, B\}_D \equiv \{A, B\}_P - \{A, \chi_I\}_P \{ \chi_I, \chi_J \}_P^{-1} \{ \chi_J, B \}_P \right),$$

Suma implícita sobre I, J I ≠ J  
↑ restricciones

que se definen justamente para ser compatibles con las restricciones (p.ej., dadas que  $\chi_1 = \Pi_\Psi - i\Psi^\dagger$ ,  $\chi_2 = \Pi_{\Psi^\dagger} \equiv \Pi^\dagger$ ,

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_{a\vec{x}}^\dagger, \Pi_{b\vec{x}'}^\dagger \right\}_D &= \left\{ \Psi_{a\vec{x}}^\dagger, \Pi_{b\vec{x}'}^\dagger \right\}_P \\ &\quad - \left\{ \Psi_{a\vec{x}}^\dagger, \Pi_{c\vec{x}''}^\dagger \right\}_P \left\{ \Pi_{c\vec{x}''}^\dagger, -i\Psi_{d\vec{x}'''}^\dagger \right\}_P^{-1} \left\{ -i\Psi_{d\vec{x}'''}^\dagger, \Pi_{b\vec{x}'}^\dagger \right\}_P \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\chi_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\chi_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\sim \chi_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\sim \chi_1} \\ &= \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Usando los parentesis de Dirac (para mayor detalle ver p.ej. Weinberg 7.6), lo que acabamos pidiendo es que

$$[\hat{\psi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\psi}(t, \vec{x}')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1}, \quad \leftarrow \text{en este caso } \{, \}_{\mathbb{D}} = \{, \}_{\mathbb{F}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{i\hat{\psi}^{\dagger}(t, \vec{x}')}$

es decir,  $[\hat{\psi}_a(t, \vec{x}), \hat{\psi}_b^{\dagger}(t, \vec{x}')] = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ ,

y  $[\hat{\psi}, \hat{\psi}] = 0 = [\hat{\psi}^{\dagger}, \hat{\psi}^{\dagger}]$ ,  $\hat{\pi}_{\psi^{\dagger}} = 0$ .

Pero incluso esto resultará estar mal: más adelante encontraremos que el campo de Dirac (el cual, según ya anticipamos, describe partículas de espín  $j=1/2$ ) se debe cuantizar imponiendo relaciones de anticomutación (lo cual implica que las partículas en cuestión son fermiones). Para cubrir las 2 posibles estadísticas (bosones vs. fermiones) en paralelo y ver qué sucede,

propondremos que

$$[\hat{\psi}(t, \vec{x}), \hat{\psi}^{\dagger}(t, \vec{x}')]_{\mp} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1},$$

↑ porta índices espinoriales

o lo que es lo mismo,

$$\underbrace{[\hat{\Psi}(t, \vec{x}), \hat{\Psi}(t, \vec{x}')]}_{\hat{\Psi}_x \hat{\Psi}_{x'} + \hat{\Psi}_{x'} \hat{\Psi}_x} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \gamma^0.$$

↗ oJo: índices  
espinorides  $a, b$   
abiertos

El operador de campo  $\hat{\Psi}(t, \vec{x})$  satisface la ec. de Dirac

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \hat{\Psi}(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{ec. de Heisenberg}),$$

y podemos por tanto desarrollarlo en términos de nuestro conjunto completo de soluciones (ver p. 261a) :

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p}$$

$$\hat{\bar{\Psi}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p}$$

donde las  $\hat{a}$ 's y las  $\hat{b}$ 's satisfacen entonces

$$[\hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'\dagger}]_{\mp} = \delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$[\hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'\dagger}]_{\mp} = \mp \delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),$$

con los (anti)conmutadores restantes iguales a cero.  
 Podemos verificar que el signo del segundo (anti)conmutador realmente es correcto:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\Psi}(t, \vec{x}), \hat{\Psi}(t, \vec{x}')]_{\mp} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_{p'}}} \sum_{s, s'=1}^2 \left( \right. \\
 & \left. e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \underbrace{\left[ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right]_{\mp}}_{\delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')} u^s(\vec{p}) \bar{u}^{s'}(\vec{p}') + e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \underbrace{\left[ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right]_{\mp}}_{\delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')} v^s(\vec{p}) \bar{v}^{s'}(\vec{p}') \right) \\
 & \quad \text{↑ índices espinores al contrario} \\
 & \quad \text{↘ necesitamos para tener} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left( e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \underbrace{\sum_{s=1}^2 u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p})}_{m+\not{p} \quad p.260} + e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \underbrace{\sum_{s=1}^2 v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p})}_{-(m-\not{p}) \quad p.261} \right) \\
 & \quad \text{↖ cambiar } \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{2E_p} \left( \cancel{m + \not{p} \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}} - \cancel{m + \not{p} \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma}} \right) \Big|_{\vec{p}^0 = E_p} \\
 & \quad \text{↖ } \not{p} \text{ tras } \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \gamma^0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Al cuantizar el campo de Dirac obtenemos entonces

4 pares de operadores de creación/aniquilación,

$$\hat{a}^s, \hat{a}^{s\dagger}; \hat{b}^s, \hat{b}^{s\dagger} \text{ con } s=1,2 \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{partícula; antipartícula} \\ \text{de espín } 1/2 \end{array} \quad \checkmark$$

En el caso bosónico, el conmutador de  $\hat{b}^s$  con  $\hat{b}^{s\dagger}$  aparece con el signo opuesto al usual:

$$[\hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s\dagger}] = -\delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}').$$

L24: 03/12

Parecería entonces que en este caso debiéramos renombrar

$\hat{b}_{\vec{p}}^s \leftrightarrow \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ ; pero en la primera parte del curso,

utilizando un enfoque constructivo vimos que no era una decisión arbitraria armar nuestros campos sumando operadores de aniquilación y de creación ( $\xleftrightarrow{\text{escalar}}$  microcausalidad).

En cualquier caso, podemos ver una clara distinción física entre las alternativas bosónicas y fermiónicas si calculamos

$$\hat{H} = \int d^3x \left( -i \hat{\bar{\Psi}}(t, \vec{x}) \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \hat{\Psi}(t, \vec{x}) + m \hat{\bar{\Psi}}(t, \vec{x}) \hat{\Psi}(t, \vec{x}) \right).$$

p.263

Notar que  $\hat{H}(x)$  es un operador bosónico  $\leftrightarrow$  conmutador; p.ej, ec. de Heisenberg es  $i\partial_t \hat{\Psi} = -[\hat{H}, \hat{\Psi}]_-$ .

Como siempre, podemos evaluar el integrando en  $t=0$  aprovechando el hecho de que, por invariancia bajo  $t$ -trasciones,  $\hat{H}(t) = \hat{H}(0)$ .

Dado que  $\hat{\psi}(x)$  satisface la ec. de Dirac,

$$i\gamma^0 \partial_0 \hat{\psi} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \hat{\psi} - m\hat{\psi} = 0 \leftrightarrow i\gamma^0 \partial_0 \hat{\psi} = \underbrace{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \hat{\psi} + m\hat{\psi}}_{\substack{\text{aparece en } \hat{H} \\ \text{multiplicado por } \hat{\psi}}},$$

podemos reescribir

$$\hat{H} = \int d^3x i\hat{\psi} \gamma^0 \partial_0 \hat{\psi} = \int d^3x i\hat{\psi}^\dagger(0, \vec{x}) \partial_t \hat{\psi}(0, \vec{x}).$$

A partir de

$$\hat{\psi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-iE_{\vec{p}}t} \overset{\substack{\text{suma implícita} \\ \downarrow}}{\hat{a}_{\vec{p}}^s}} u_{\vec{p}}^s + e^{iE_{\vec{p}}t} \overset{\substack{\text{suma implícita} \\ \downarrow}}{\hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger}} v_{-\vec{p}}^s \right)$$

tenemos

$$i\partial_t \hat{\psi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s - \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^s \right),$$

$$\hat{\psi}^\dagger(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}'}^{s\dagger} u_{\vec{p}'}^{s\dagger} + \hat{b}_{-\vec{p}'}^{s'} v_{-\vec{p}'}^{s'\dagger} \right),$$

así que (usando  $\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$ )

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} u_{\vec{p}}^{s\dagger} + \hat{b}_{-\vec{p}}^{s'} v_{-\vec{p}}^{s'\dagger} \right) \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s - \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^s \right)$$

$$\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^{s\dagger} u_{\vec{p}}^s}_{2E_{\vec{p}} \delta^{s's}} - \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} u_{\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^s}_{0} - \underbrace{\hat{b}_{-\vec{p}}^{s'} \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^{s'\dagger} v_{-\vec{p}}^s}_{2E_{\vec{p}} \delta^{s's}} + \underbrace{\hat{b}_{-\vec{p}}^{s'} \hat{a}_{\vec{p}}^s v_{-\vec{p}}^{s'\dagger} u_{\vec{p}}^s}_{0}}$$

← p. 259 →

términos cruzados deben anularse, porque fase  $\exp(\pm 2iE_{\vec{p}}t)$  da  $\hat{H}$  dependiente de  $t$

es decir,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{st} \hat{a}_{\vec{p}}^{ns} - \hat{b}_{\vec{p}}^s \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \right) \quad (c/\sum_{s=1}^2)$$

Podemos ver aquí que en el caso bosónico, ya sea que redefinamos  $\hat{b} \leftrightarrow \hat{b}^\dagger$  o no,  $\hat{b}_{\vec{p}}^s \hat{b}_{\vec{p}'}^{st} = \hat{b}_{\vec{p}'}^{st} \hat{b}_{\vec{p}}^s + \delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{st} \hat{a}_{\vec{p}}^{ns} - \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{b}_{\vec{p}}^s + \text{posible cte. de orden} \right)$$

de modo que las antiparticulas tienen energía negativa! X

no habría estado base

En cambio, en el caso fermiónico tendríamos

$$-\hat{b}_{\vec{p}}^s \hat{b}_{\vec{p}'}^{st} = +\hat{b}_{\vec{p}'}^{st} \hat{b}_{\vec{p}}^s - \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')}_{V} \underbrace{\delta^{ss}}_{=2 \text{ si estamos sumando sobre } s}$$

y por tanto

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{st} \hat{a}_{\vec{p}}^{ns} + \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{b}_{\vec{p}}^s - 4 \cdot \frac{1}{2} V \right)$$

Tanto las partículas como las antiparticulas tienen energía positiva ✓

4 x ∞ osciladores fermiónicos  
 Notar que la energía de punto cero para los fermiones es negativa (para bosones era positiva)

OJO: para antiparticulas, No apelamos a la vieja noción del "mar de Dirac", que además obviamente no aplicaría para espín cero.



Tal como habíamos prometido, concluimos entonces que el campo de Dirac debe cuantizarse usando relaciones de anticomutación:

$$\{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbb{1},$$

$$\{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)\} = 0$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\},$$

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\} = 0 = \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}}^{s'} \right\} = \left\{ \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} \right\}$$

Vale la pena resaltar que en este caso NO podemos distinguir entre  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  ó  $\hat{b}^\dagger$  y  $\hat{b}$  con base en las relaciones de anticomutación, que son simétricas, pero sí con base en el Hamiltoniano: llamamos  $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{b}^\dagger$ ) al objeto que crea (anti)partículas con energía positiva. Justo como sucedió para el campo escalar, vemos que esto equivale

a identificar a los operadores de creación/aniquilación como los coeficientes de  $e^{\pm ip \cdot x}$ , respectivamente.

Notemos que la estadística del campo de Dirac nos da nuestro segundo ejemplo de un enunciado general: el formalismo de la teoría cuántica de campos predice que

Las partículas con espín  $\begin{cases} \text{entero} \\ \text{semientero} \end{cases}$  deben ser  $\begin{cases} \text{bosónicas} \\ \text{fermiónicas} \end{cases}$

Este es el llamado Teorema de Espín-Estadística, enunciado por primera vez por Pauli [el análisis del caso con espín arbitrario se puede consultar en Weinberg, sec. 5.7; para la demostración rigurosa ver Streater & Wightman, "PCT, Spin and Statistics, and All That", 1964. A. Wightman fue el padre de la teoría cuántica de campo axiomática].

Recordemos que, en el caso del campo escalar, el elemento clave para mostrar que las partículas asociadas deben ser bosones fue la causalidad. Para el campo de Dirac, esta condición por sí sola se satisfaría igualmente con conmutadores o anticonmutadores [ver, peji, Greiner, ejercicio 5.5], y el

elemento clave para mostrar la conexión con fermiones fue imponer la condición de energías positivas. Ambas condiciones son entonces prerrequisitos para demostrar el teorema en el caso general. La conexión espín-estadística es una segunda predicción genérica del lenguaje de teoría cuántica de campos (la primera fue la existencia de antipartículas), que hasta el día de hoy está en completo acuerdo con los resultados experimentales.

Regresando a la cuantización del campo de Dirac (y restringiéndonos a anticommutadores de ahora en adelante), podemos construir nuestro espacio de Fock de la manera habitual:

• Vacío  $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0 = \hat{b}_{\vec{p}}^s |0\rangle \quad \forall s, \vec{p}, \langle 0|0\rangle = 1$   
 gelatina de Dirac sin excitar

• Estados de 1 partícula  $|\vec{p}n\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle$   
 modo de Fourier  $\vec{p}$  en su primer nivel excitado

donde  $\lambda \equiv j^3$  en el marco en reposo =  $\begin{cases} +1/2 & \text{si } s=1 \\ -1/2 & \text{si } s=2 \end{cases}$

( $\Rightarrow \langle \vec{p}'n'\lambda' | \vec{p}n\lambda \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta^{\lambda\lambda'}$ ).

[2] = 24/03/17

Para verificar esta identificación entre  $\lambda$  y  $s$ ,  
 recordemos de la p.174 que usando el teorema de Noether,  
 los generadores de rotaciones toman la forma general

$$\hat{J}^{ij} = \hat{J}_{\text{orbital}}^{ij} + \hat{J}_{\text{espín}}^{ij},$$

donde  $\hat{J}_{\text{orbital}}^{ij}$  no contribuirá en el marco en reposo  $\sim \vec{x} \times \vec{p}$

$$\hat{J}_{\text{espín}}^{ij} = - \int d^3x : \hat{\pi}_l^{ij} (i S^{ij})_{ll'} \hat{\varphi}_{l'} :$$

generador de rotación en  
representación a  
la que pertenecen  
los campos

En nuestro caso particular  $(\hat{\pi}_l \rightarrow i \hat{\psi}_a^\dagger, \hat{\varphi}_{l'} \rightarrow \hat{\psi}_b)$  esto es

$$\hat{J}_{\text{espín}}^{ij} = \int d^3x : \hat{\psi}_a^\dagger (S^{ij})_{ab} \hat{\psi}_b :$$

orden Normal tomando en  
cuenta signos fermiónicos  
p.ej.,  $:\hat{b} \hat{b}^\dagger: = -\hat{b}^\dagger \hat{b}$

En particular,

$$\hat{J}_{\text{espín}}^3 \equiv \hat{J}_{\text{espín}}^{12} = \int d^3x : \hat{\psi}_{(0, \vec{x})}^\dagger \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_3/2 & 0 \\ 0 & \sigma_3/2 \end{pmatrix}}_{S^{12} \text{ p.231}} \hat{\psi}_{(0, \vec{x})} :$$

Solo así lo que omitimos  
es una constante

donde sabemos que

$$\hat{\psi}_{(0, \vec{x})} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} v_{\vec{p}}^s \right).$$

Se puede mostrar que los términos cruzados en  $\hat{J}_{\text{espín}}^{ij}$  (tipo

estaría acompañar por  $e^{\pm 2iE_p t}$ , respectivamente

$\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$  ó  $\hat{b} \hat{a}$ ) se cancelan, de modo que

$$- : \hat{b}_p^{s'} \hat{b}_p^{s't} :$$

$$\hat{J}_{\text{espín}}^3 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[ U_p^{s't} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} U_p^s \hat{a}_p^{s't} \hat{a}_p^{s'} - V_p^{s't} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} V_p^s \hat{b}_p^{s't} \hat{b}_p^{s'} \right]$$

*↑ he aquí usó  $\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$*  ↑ por orden normal fermiónico

A partir de esto podemos ver que para 1 partícula en reposo

$$\hat{J}_{\text{espín}}^3 |0_n \lambda\rangle = \sqrt{2E_0} \hat{J}_{\text{espín}}^3 \hat{a}_0^{s\dagger} |0\rangle$$

nombre distinto a s

$$= \sqrt{2E_0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} U_p^{s't} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} U_p^{s''} \hat{a}_p^{s't} \hat{a}_p^{s''} \hat{a}_0^{s\dagger} |0\rangle$$

$$= \delta^{s's} \frac{1}{2E_0} U_0^{s't} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} U_0^s \sqrt{2E_0} \hat{a}_0^{s\dagger} |0\rangle$$

$$= \frac{1}{2E_0} U_0^{s't} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} U_0^s \sqrt{2E_0} \hat{a}_0^{s\dagger} |0\rangle$$

p.253

$$\frac{(\sqrt{m})^2}{2m} \begin{pmatrix} \xi^{s't} & \xi^{s't} \\ \xi^{s't} & \xi^{s't} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} |0_n \lambda'\rangle$$

$$\pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \text{ para } s = \begin{cases} 1 & (\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \\ 2 & (\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{cases}$$

$$\pm \frac{1}{2} 2 \xi^{s't} \xi^s = \pm \frac{1}{2} 2 \delta^{s's}$$

es decir,

$$\hat{J}_{\text{espín}}^3 |\vec{0} n \lambda\rangle = \pm \frac{1}{2} |\vec{0} n \lambda\rangle \quad \text{si } s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases},$$

de modo que, efectivamente,  $\lambda = \pm \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - s$  ✓

[22: 20/09/18]

- Estados de 1 antipartícula  $|\vec{p} \bar{n} \lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle$

donde ahora  $\lambda = \mp \frac{1}{2} = s - \frac{3}{2}$  para  $s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Este resultado es consecuencia del signo relativo en  $\hat{J}_{\text{espín}}^3$ , a través de una cuenta muy similar a la anterior:

$$\hat{J}_{\text{espín}}^3 |\vec{0} \bar{n} \lambda\rangle = - \frac{1}{2E_{\vec{0}}} \underbrace{V^{s\dagger} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} V_{\vec{0}}^s}_{\text{p. 275}} |\vec{0} \bar{n} \lambda''\rangle$$

$$\text{p. 257} \quad \frac{(\sqrt{m})^2}{2m} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} & -\xi^{s\dagger} \\ \xi^{s\dagger} & -\xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s''} \\ -\xi^{s''} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi^{s''} \\ -\xi^{s''} \end{pmatrix}}_{\pm \frac{1}{2} 2 \xi^{s\dagger} \xi^s = \pm \frac{1}{2} \delta^{ss''}}$$

$$= \mp \frac{1}{2} |\vec{0} \bar{n} \lambda\rangle. \quad \checkmark$$

↑

- Estados Multiparticulares (respetan principio de exclusión)

$$|p_1 n \lambda_1, \dots; p_N n \lambda_N; \bar{p}_1 \bar{n} \bar{\lambda}_1, \dots; \bar{p}_N \bar{n} \bar{\lambda}_N\rangle \equiv \sqrt{2E_{p_1}} \dots \sqrt{2E_{p_N}} \hat{a}_{p_1}^{s_1 \dagger} \dots \hat{b}_{p_N}^{s_N \dagger} |0\rangle$$

———— cada ocupador en estado base o primer nivel excitado

Podemos también determinar la carga de estos estados.

Sabemos que el campo de Dirac es complejo, y  $\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi$  es claramente invariante bajo la transformación interna

$$\begin{cases} \Psi(x) \rightarrow e^{i\varphi} \Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) \rightarrow e^{-i\varphi} \bar{\Psi}(x) \end{cases},$$

simetría  $U(1)$

← justo como en Klein-Gordon  
✓ complejo, p.202,  
por conveniencia separamos en la fase  
un coeficiente  $\varphi$ , que interpretamos  
como una propiedad intrínseca de  $\Psi$

que en su versión infinitesimal corresponde a variar los  
campos de acuerdo con  $\delta\Psi = i\varphi\Psi$ ,  $\delta\bar{\Psi} = -i\varphi\bar{\Psi}$ .

Deducimos entonces la corriente de Noether (p.169)

$$J^\omega = - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\omega \Psi)} \delta\Psi - \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\omega \bar{\Psi})} \delta\bar{\Psi} = -i\bar{\Psi} \gamma^\omega (i\varphi\Psi),$$

es decir,

$$J^\omega = \varphi \bar{\Psi} \gamma^\omega \Psi.$$

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Podemos comprobar que esta corriente en verdad se conserva:

$$\partial_\mu J^\mu = \underbrace{\bar{\psi} (\partial_\mu \psi)}_{\text{Dirac} = i m \bar{\psi} \quad \text{p.248}} + \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi}_{\text{Dirac} = -i m \psi} = 0 \quad \checkmark$$

A partir de  $J^\mu$  encontramos la carga conservada

$$Q \equiv \int d^3x J^0(t, \vec{x}) = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi,$$

$\psi^\dagger$

que a nivel cuántico es

$$\hat{Q} \equiv \int d^3x \bar{\psi}^\dagger(0, \vec{x}) \hat{\psi}(0, \vec{x}) : \quad \hat{\psi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_p}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^s \right)$$

$$= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} 2E_p}} \int d^3x e^{i(\vec{p}' - \vec{p})\cdot\vec{x}} \bar{\psi}^\dagger : \left( \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} u_{\vec{p}'}^{s'} + \hat{b}_{-\vec{p}'}^{s'\dagger} v_{-\vec{p}'}^{s'} \right) \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + \hat{b}_{-\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^s \right) :$$

$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} : \left( \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^s}_{2E_p \delta^{ss}} u_{\vec{p}}^{s\dagger} u_{\vec{p}}^s + \underbrace{\hat{b}_{-\vec{p}}^{s'\dagger} \hat{b}_{-\vec{p}}^{s'}}_{2E_p \delta^{s's}} v_{-\vec{p}}^{s'\dagger} v_{-\vec{p}}^s + \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{b}_{-\vec{p}}^{s'}}_0 u_{\vec{p}}^{s\dagger} v_{-\vec{p}}^s + \underbrace{\hat{b}_{-\vec{p}}^{s'\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^s}_0 v_{-\vec{p}}^{s'\dagger} u_{\vec{p}}^s \right) :$$

p.259:  $2E_p \delta^{ss}$        $2E_p \delta^{s's}$       0      0

es decir,

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^s - \hat{b}_{-\vec{p}}^{s'\dagger} \hat{b}_{-\vec{p}}^{s'} \right) \quad \left( c \sum_{s=1}^2 \right).$$

↑



Vemos aquí que, como era de esperarse, las partículas/antipartículas asociadas al campo de Dirac tienen cargas  $+q$  y  $-q$ , respectivamente.

(La identificación de esta carga de Noether como carga eléctrica ocurrirá más adelante, si acoplamos  $\Psi$  a  $A_\mu$ .)

25:05/10/02

Recordando que en el caso especial en  $m=0$  (p.250)

$$\Psi_I \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Psi \quad \text{y} \quad \Psi_D \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Psi$$

se desacoplan,  $\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}_I \not{\partial} \Psi_I + i\bar{\Psi}_D \not{\partial} \Psi_D - m\cancel{\Psi_I \Psi_D} - m\cancel{\bar{\Psi}_D \bar{\Psi}_I}$ ,

vemos que en este caso nuestro grupo de simetría interna es más grande, puesto que podemos cambiarle

la fase a estos 2 campos de manera independiente:

$$\begin{cases} \Psi_I(x) \rightarrow e^{iq_I \theta_I} \Psi_I(x) \\ \bar{\Psi}_I(x) \rightarrow e^{-iq_I \theta_I} \bar{\Psi}_I(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \Psi_D(x) \rightarrow e^{iq_D \theta_D} \Psi_D(x) \\ \bar{\Psi}_D(x) \rightarrow e^{-iq_D \theta_D} \bar{\Psi}_D(x) \end{cases}.$$

Simetría  $U(1) \times U(1)$

En otras palabras, además de la transformación conjunta

$$\Psi(x) \rightarrow e^{iq\theta} \Psi(x) \quad (\Rightarrow \Psi_I(x) \rightarrow e^{iq\theta} \Psi_I(x), \Psi_D(x) \rightarrow e^{iq\theta} \Psi_D(x))$$

que vimos más arriba, tenemos como simetría adicional

a la transformación quiral

$$\begin{aligned} \gamma^0 - \gamma_5 \gamma^5 &= \gamma_\pm \gamma^5 \\ \gamma^0 + \gamma_5 \gamma^5 &= \gamma_\mp \gamma^5 \end{aligned}$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta_5} \psi(x) \quad (\Rightarrow \psi_I(x) \rightarrow e^{-i\gamma_5 \theta_5} \psi_I(x), \psi_D(x) \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta_5} \psi_D(x))$$

La corriente de Noether asociada es la corriente axial

$$J_5^\mu = \gamma_5 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$$

← pseudovector, o vector axial  
p. 241

y podemos verificar que

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_5^\mu &= \gamma_5 (\underbrace{\partial_\mu \bar{\psi}}_{\text{tim } \bar{\psi}}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \gamma_5 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \underbrace{\partial_\mu \psi}_{\text{Dirac}} \\ &= 2im\gamma_5 \bar{\psi} \gamma^5 \psi = 0 \quad \text{si y solo si } m=0. \end{aligned}$$

Habiendo ya terminado de describir la cuantización del campo de Dirac, podemos también calcular la amplitud de propagación de una partícula de espín 1/2 de  $x$  a  $x'$ :

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\psi}_a(x') \hat{\bar{\psi}}_b(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip'x' + ipx}}{\sqrt{2E_{p'} 2E_p}} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{p'}^{s'} \hat{a}_p^{s\dagger} | 0 \rangle}_{\langle 0 | \{ \hat{a}_{p'}^{s'}, \hat{a}_p^{s\dagger} \} | 0 \rangle} u_a^{s'}(\vec{p}') \bar{u}_b^s(\vec{p}) \\ &= \underbrace{\langle x'n | \rangle}_{\langle x'n |} \underbrace{\langle \hat{a} + \hat{b}^\dagger | \rangle}_{\langle \hat{a}^\dagger + \hat{b} |} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta^{ss'}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta^{ss'}} \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\underbrace{\langle 0 | \hat{\psi}_a(x') | 0 \rangle}_{\langle x' n \lambda |} \underbrace{\langle \hat{\psi}_b(x) | 0 \rangle}_{| x n \lambda \rangle} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{2E_{\vec{p}}} \underbrace{u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_b^s(\vec{p})}_{(\not{p} + m)_{ab}} \quad p. 260$$

De manera similar, la amplitud de propagación de una antipartícula de  $x'$  a  $x$  está dada por

$$\underbrace{\langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_b(x) | 0 \rangle}_{\langle \hat{a}^\dagger x \bar{\lambda} |} \underbrace{\langle \hat{\psi}_a(x') | 0 \rangle}_{| x' \bar{n} \lambda \rangle} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+ip \cdot (x' - x)}}{2E_{\vec{p}}} \underbrace{v_a^s(\vec{p}) \bar{v}_b^s(\vec{p})}_{(\not{p} - m)_{ab}} \quad p. 261$$

Y podemos combinar ambas amplitudes, con un signo menos relativo, para obtener el propagador de Feynman

$$D_F(x' - x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x') \hat{\bar{\psi}}(x) \} | 0 \rangle$$

↑ frecuentemente denotado  $S_F$

↑ orden temporal que incorpora signos fermiónicos

$$\begin{aligned} &\equiv \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\psi}(x') \hat{\bar{\psi}}(x) | 0 \rangle - \theta(x^0 - x'^0) \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[ \theta(x'^0 - x^0) e^{-ip \cdot (x' - x)} (\not{p} + m) - \theta(x^0 - x'^0) e^{ip \cdot (x' - x)} (\not{p} - m) \right], \\ &\hspace{20em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{cambiar } \vec{p} \rightarrow -\vec{p}} \end{aligned}$$

que se puede reescribir en la forma

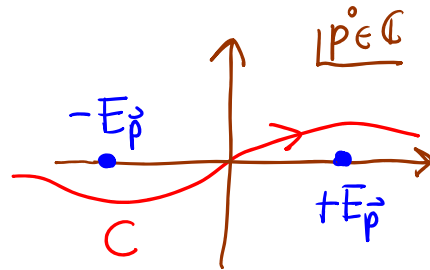
$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left[ \theta(x'^0-x^0) \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x'^0-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} (\overbrace{E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}^{\not{p}+m}) \right. \\ \left. + \theta(x^0-x'^0) \frac{e^{iE_{\vec{p}}(x'^0-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} (\underbrace{-E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}_{-(\not{p}-m) \text{ tras } \vec{p} \rightarrow -\vec{p}}) \right] \\ \stackrel{p.21}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left[ - \int_C \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E_{\vec{p}})(p^0+E_{\vec{p}})} (\underbrace{p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}_{\not{p}+m}) \right]$$

donde  $C$  denota el mismo contorno

de integración en el plano complejo

que usamos para la partícula sin

espín en la p.21. Como en



quel caso, podemos equivalentemente integrar sobre el

eje real pero reemplazar el denominador por  $(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon$ ,

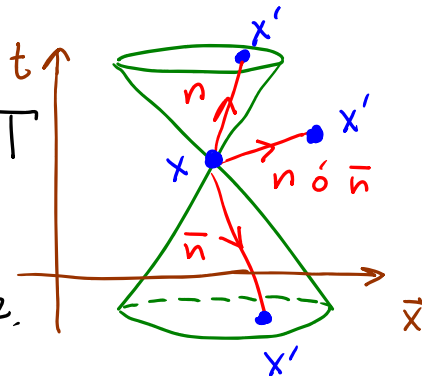
así que nuestro resultado final se puede resumir como

$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x'-x)} .$$

Este es el propagador de Feynman para el campo de Dirac

(denotado  $S_F$  en muchos libros).

Con esto aprendemos en particular que el signo menos relativo que incluimos en  $T$  es necesario para que el orden temporal sea (contrario a las apariencias) invariante de Lorentz.



Verificaremos la condición de causalidad en la Tarea 4.

Recordemos (de la p. 23 ó 198) que el propagador de Feynman para el campo de Klein-Gordon es

$$K_F(x'-x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle \quad \leftarrow \text{frecuentemente denotado } D_F$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x' - x)} = K_F(x - x').$$

En la Tarea 1 aprendimos que  $K_F(x'-x)$  es una función de Green del operador diferencial de Klein-Gordon, es decir,

$$(-\partial'_\mu \partial'^\mu - m^2) K_F(x'-x) = i \delta^{(4)}(x'-x) \quad ( = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) K_F(x'-x) ).$$

Podemos verificar que, de manera análoga, el propagador de Feynman para el campo de Dirac

$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x' - x)} \neq D_F(x - x')$$

es una función de Green del operador diferencial de Dirac:

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) D_F(x'-x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x'-x)} \underbrace{(p-m)(p+m)}_{p^2 - m^2} \\
 &= i\delta^{(4)}(x'-x) \quad (= (-i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) D_F(x'-x))
 \end{aligned}$$

Esto resulta ser cierto en general: el propagador libre para cualquier campo es el inverso (por  $i$ ) del operador diferencial  $\Delta_x$  que aparece en la parte cuadrática de la acción, y por tanto, en la ec. de mov. En los ejemplos,

$$\begin{aligned}
 S_{\text{KB}} &= \int d^4 x (\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi) = \int d^4 x \varphi^* \underbrace{(-\partial^2 - m^2)}_{\equiv \Delta_x} \varphi, \\
 S_D &= \int d^4 x \bar{\psi} \underbrace{(i\not{\partial} - m)}_{\equiv \Delta_x} \psi. \quad K_F = i\Delta_x^{-1}
 \end{aligned}$$

En el lenguaje de cuantización canónica con el que estamos trabajando, esto se debe a que al calcular  $G(x^+, x') \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^\dagger(x') \} | 0 \rangle$ , tenemos  $\Delta_x \hat{\varphi}(x) = 0$ , pero  $\Delta_x$  es una delta de Dirac al actuar sobre las funciones escalón  $\theta(\pm(x^0 - x'^0))$  que definen a  $T$ .

Nos será mucho más fácil entender este resultado general más adelante, cuando aprendamos a cuantizar por el método de integral de trayectoria.

L23: 01/10/18

$\Delta_x$  siempre resulta fácil de invertir en espacio de momentos. P.ej., en el caso de Dirac, definiendo

$$\tilde{D}_F(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} D_F(x) \leftrightarrow D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{D}_F(p)$$

↑ en lugar de  $x'-x$

tenemos

$$\Delta_x D_F(x) = (i\not{\partial} - m) D_F(x) = i \underbrace{\delta^{(4)}(x)}_{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} 1} \Rightarrow (p\not{-} - m) \tilde{D}_F(p) = i$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} (p\not{-} - m) \tilde{D}_F(p) \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} 1$$

y por tanto recuperamos el resultado de la p. 282:

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p\not{-} - m} = \frac{i(p\not{+} + m)}{p^2 - m^2} \leftrightarrow D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p\not{-} - m} e^{-ip \cdot x}$$

≡ inverso de matriz ↑ con +iε para implementar T

Por construcción, sabemos que, bajo el grupo de lorentz restringido, el operador de campo de Dirac transforma de acuerdo con

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}) \hat{\Psi}(x) \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}) = M(\underline{\Lambda}^{-1}) \hat{\Psi}(\underline{\Lambda}x).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos visto además que bajo el operador de paridad,  $\hat{P} \equiv \hat{U}(\underline{P})$ ,

$$\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^{-1} = \gamma^0 \hat{\psi}(Px)$$

$$M(\hat{P}^{-1}) \quad (x^0, -\vec{x})$$

↑ lineal y unitario

(lo cual implica que  $\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^{-1} = \hat{\psi}(Px) \gamma^0$ ).

En términos de operadores de creación y aniquilación, esto es

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} v_{\vec{p}}^s \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot (Px)} \hat{a}_{\vec{p}}^s \gamma^0 u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot (Px)} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \gamma^0 v_{\vec{p}}^s \right)$$

$$e^{-i(Pp) \cdot x} \equiv e^{-ip \cdot x} \quad e^{i(Pp) \cdot x} \equiv e^{ip \cdot x}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}}^s \gamma^0 u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \gamma^0 v_{\vec{p}}^s \right)$$

pp. 256-7:

$$\frac{1}{\sqrt{2(E_{\vec{p}}+m)}} \gamma^0 (\not{p}+m) \begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2(E_{\vec{p}}+m)}} \gamma^0 (m-\not{p}) \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(E_{\vec{p}} \gamma^0 - (-\vec{\gamma}) \cdot \vec{p} + m)}_{\not{p} + m} \underbrace{\gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}} \quad \underbrace{(m - \not{p}) \gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}}_{- \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}}$$

$$u_{-\vec{p}}^s \quad -v_{-\vec{p}}^s$$



es decir,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} v_{\vec{p}}^s \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \left( -v_{\vec{p}}^s \right) \right) \\ & \stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{-\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \left( -\hat{b}_{-\vec{p}}^{st} \right) v_{\vec{p}}^s \right) \end{aligned}$$

De aquí podemos deducir que

$$\boxed{\hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} = \hat{a}_{-\vec{p}}^s, \quad \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} = -\hat{b}_{-\vec{p}}^{st}}$$

es decir, el momento se invierte pero el espín no cambia,

y la antipartícula  $\bar{n}$  tiene paridad opuesta a la partícula  $n$ :

$$\hat{P} |\vec{p} n \lambda\rangle = + |-\vec{p} n \lambda\rangle, \quad \hat{P} |\vec{p} \bar{n} \lambda\rangle = - |-\vec{p} \bar{n} \lambda\rangle.$$

Cabe señalar que, más en general, en la transformación bajo paridad podría aparecer una fase adicional (normalmente  $= \pm 1$ ) dependiente de la partícula en cuestión:

$$\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^{-1} = \eta_P^{(n)} \gamma^0 \hat{\psi}(Px) \iff \hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} = \eta_P^{(n)} \hat{a}_{\vec{p}}^s, \quad \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} = -\eta_P^{(n)} \hat{b}_{\vec{p}}^{st}$$

↳ "paridad intrínseca" de la partícula  $n$

es una carga conservada (No de Noether)

si  $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$  (p.ej. en QED y QCD)

Por convención, asignamos  $\eta_p = +1$  al electrón, protón y neutrón, así que sus antipartículas tienen  $\eta_p = -1$ . Los piones  $\pi^\pm, \pi^0$  y los fotones tienen también paridad  $\eta_p = -1$ .

Si un campo porta una carga conservada  $q_n$  asociada a una simetría continua interna generada por  $\hat{Q}$ , es decir, si

$$e^{i\hat{Q}\theta} \psi(x) e^{-i\hat{Q}\theta} = e^{-iq_n\theta} \psi(x),$$

podemos eliminar  $\eta_p^{(n)} \equiv e^{i\alpha_p^{(n)}}$  redefiniendo

$$\hat{P} \rightarrow \hat{P}' = \hat{P} \exp\left(i\hat{Q} \frac{\alpha_p^{(n)}}{q_n}\right).$$

Pero si el número de tipos distintos de partículas es mayor que el de cargas conservadas, o si hay partículas neutras, no podremos eliminar todas las fases  $\eta_p^{(n)} \forall n$ .

Podemos igualmente considerar la transformación discreta restante dentro del grupo de Lorentz  $O(3,1)$ : la inversión temporal

$\hat{T}$ , que como sabemos se implementará a través de un operador  $\hat{T}$  antilineal y antiunitario (ver pp. 49-50 y 99).

Tendremos entonces

$$\hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{T}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{+ip \cdot x} \hat{T} \hat{a}_p \hat{T}^{-1} u_p^{s*} + e^{-ip \cdot x} \hat{T} \hat{b}_p^\dagger \hat{T}^{-1} v_p^{s*} \right),$$

o, cambiando la variable de integración  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ ,

$$\hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{T}^{-1} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-iE_{\vec{p}}(t) + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{T}^{-1} u_{\vec{p}}^{s*} + e^{+iE_{\vec{p}}(t) - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{T}^{-1} v_{\vec{p}}^{s*} \right).$$

Por otra parte, si  $A \equiv M(\hat{T})$  es la matriz  $4 \times 4$  que implementa a la inversión temporal en la rep. de Dirac (tal como  $M(\hat{P}) = \gamma^0$  implementa la paridad), debemos tener

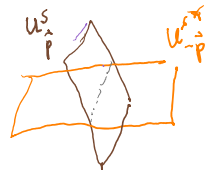
$$\hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{T}^{-1} = M(\hat{T}) \hat{\psi}(\underline{T}x) \quad (-x^0, \vec{x})$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-iE_{\vec{p}}(t) + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{s'} A^{-1} u_{\vec{p}}^{s'} + e^{+iE_{\vec{p}}(t) - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} A^{-1} v_{\vec{p}}^{s'} \right).$$

Iguando estas 2 expresiones, vemos que necesariamente

$$\hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{T}^{-1} u_{\vec{p}}^{s*} = \hat{a}_{\vec{p}}^{s'} A^{-1} u_{\vec{p}}^{s'}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{T}^{-1} v_{\vec{p}}^{s*} = \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} A^{-1} v_{\vec{p}}^{s'} \quad (*)$$

$A^{-1}$  debe convertir a  $u_{\vec{p}}^{s'}$  en combinación lineal de  $u_{\vec{p}}^{s*}$  (e igual con  $v$ )



Dado que  $(\not{p} - m)u_{\vec{p}}^s = 0$ ,  $(\not{p} + m)v_{\vec{p}}^s = 0$ , tenemos

$$0 = (\not{p}^* - m)u_{\vec{p}}^{s*} = \underbrace{(\gamma^0)^* E_{\vec{p}} - \gamma^1 p_1 - \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}^*} u_{\vec{p}}^{s*},$$

es decir,

$$0 = (\not{p}^* - m) u_{\not{p}}^{s*} = (\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m) u_{\not{p}}^{s*},$$

y de manera similar

$$0 = (\not{p}^* + m) v_{\not{p}}^{s*} = (\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 + m) v_{\not{p}}^{s*}.$$

Así que las ecs. (\*) de la página anterior son consistentes si la matriz  $A$  es tal que  $A^{-1} \not{p} = \not{p}^* A^{-1}$ , porque entonces

$$\underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m)}_{(\not{p}^* - m)} A^{-1} u_{\not{p}}^{s'} = A^{-1} \underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 - m)}_{\not{p} - m} u_{\not{p}}^{s'} = 0,$$

$$\underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 + m)}_{(\not{p}^* + m)} A^{-1} v_{\not{p}}^{s'} = A^{-1} \underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m)}_{\not{p} + m} v_{\not{p}}^{s'} = 0.$$

Esto se cumple si  $A \gamma^2 A^{-1} = \gamma^2$ ,  $A \gamma^3 A^{-1} = -\gamma^3$ ,

o lo que es lo mismo,  $A \gamma^\mu A^{-1} = \gamma_\mu^x = (\gamma_\mu^\dagger)^T = \gamma^{\mu T}$ .

Podemos ver de inmediato que  $A = i \gamma^1 \gamma^3$  cumple

con este requisito, y satisface además  $A = A^{-1} = A^\dagger$ .

[22: 27/03/17]

$$\uparrow A^2 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 = +\mathbb{1}$$

Más explícitamente, en la base de Weyl esto es  $\sigma^1 \sigma^3 = -i \sigma^2$

$$A = i \gamma^1 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = A^{-1},$$

[26: 07/10/20]

matriz que al actuar sobre  $u^*$  y  $v^*$  tiene por construcción el efecto

$$A u_{\vec{p}}^{s*} = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \underbrace{A(p^0+m)}_{(p^0+m)A} u_{\vec{0}}^{s*} = \frac{1}{\sqrt{2(p^0+m)}} (p^0+m) \underbrace{\begin{pmatrix} (0 \ i) & 0 \\ (-i \ 0) & 0 \\ 0 & (0 \ i) \\ & (-i \ 0) \end{pmatrix}}_{\substack{-\sigma^2 \\ \checkmark (0) \circ (0)}} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^s i u_{\vec{p}}^{3-s}, \quad \text{índice invertido: } 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$$

$$\overline{+i} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^1 \end{pmatrix} \text{ si } s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$A v_{\vec{p}}^{s*} = \frac{-1}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \underbrace{A(p^0-m)}_{(p^0-m)A} v_{\vec{0}}^{s*} = \frac{-1}{\sqrt{2(p^0+m)}} (p^0-m) \underbrace{\begin{pmatrix} (0 \ i) & 0 \\ (-i \ 0) & 0 \\ 0 & (0 \ i) \\ & (-i \ 0) \end{pmatrix}}_{\substack{-\sigma^2 \\ \checkmark (0) \circ (0)}} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^s i v_{\vec{p}}^{3-s}.$$

$$\overline{+i} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ -\zeta^2 \\ \zeta^1 \end{pmatrix} \text{ si } s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Usando esto en las eqs. (\*) de la p. 289, multiplicadas por  $A$ ,

$$\hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} \underbrace{A u_{\vec{p}}^{s*}}_{(-1)^s i u_{\vec{p}}^{3-s}} = \hat{a}_{\vec{p}}^{s'} u_{\vec{p}}^{s'}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} \underbrace{A v_{\vec{p}}^{s*}}_{(-1)^s i v_{\vec{p}}^{3-s}} = \hat{b}_{\vec{p}}^{s'} v_{\vec{p}}^{s'}$$

concluimos finalmente que

$$\hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} = (-1)^{3-s} i \hat{a}_{-\vec{p}}^{3-s}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} = (-1)^{3-s} i \hat{b}_{-\vec{p}}^{3-s}$$

(En todo este análisis hemos nuevamente ignorado por simplicidad la posibilidad de tener una fase adicional  $\eta_{\vec{T}}^{(n)}$ .)

Estas expresiones indican que, como era de esperarse,

la operación de inversión temporal invierte tanto el momento lineal como el espín de las partículas y antipartículas. Y vemos además que los estados  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  de la partícula (o antipartícula) tienen "paridad temporal" opuesta.

Para campos complejos como el de Dirac, existe una tercera (posible) simetría discreta (esta vez interna, es decir, no relacionada con el espaciotiempo) que es de interés: la operación de conjugación de carga  $\hat{C}$ , que intercambia a las partículas con las antipartículas, sin modificar el espín y el momento. En el formalismo cuántico se implementa a través de un operador lineal y unitario  $\hat{C}$ , que esencialmente intercambia entre sí  $\hat{\psi}(x) \leftrightarrow \hat{\psi}(x)^T$  para lograr el efecto deseado  $\hat{a} \leftrightarrow \hat{b}$ .  $\sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$   $\sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$

Pero no puede hacer literalmente solo eso, porque los espinores  $\psi$  y  $\bar{\psi}^T$  transforman de manera distinta bajo Lorentz:  $\psi \xrightarrow{\Lambda} \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \psi$  implica que

$$\bar{\psi}^T \xrightarrow{\Lambda} \left[ \bar{\psi} \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \right]^T = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu T}\right) \bar{\psi}^T.$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{\psi}'} \quad p.238 \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\neq \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$

Necesitamos entonces, identificar una matriz  $4 \times 4$   $C$  tal que, bajo Lorentz,

$$C \bar{\Psi}^T \xrightarrow{\Lambda} C [\bar{\Psi} \exp(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu})]^T = C \exp(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu T}) \bar{\Psi}^T$$

si coincide con

$$C \bar{\Psi}^T \xrightarrow{\Lambda} \exp(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}) (C \bar{\Psi}^T),$$

es decir, queremos que  $C$  satisfaga  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

$$C S^{\mu\nu} C^{-1} = -S^{\mu\nu T} \iff C [\gamma^\mu, \gamma^\nu] C^{-1} = -[\gamma^{\nu T}, \gamma^{\mu T}] = [\gamma^{\mu T}, \gamma^{\nu T}]$$

lo cual se logra si  $C \gamma^\mu C^{-1} = \pm \gamma^{\mu T}$ ,  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$

es decir,  $C \gamma^0 C^{-1} = \pm \begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix} \gamma^0$ ,  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sabemos que esto se cumple con signo  $+$  si  $C = A$  (p. 290).

Pero la regla de transformación que estaremos postulando,

$$\Psi \xrightarrow{G} C \bar{\Psi}^T \equiv \Psi^c \leftarrow \text{espinor conjugado de carga}$$

$$\Rightarrow C \bar{\Psi}^T \xrightarrow{G} C (\overline{C \bar{\Psi}^T})^T = C (\underbrace{\bar{\Psi}^T C^T}_{\Psi^T} \gamma^0)^T$$

es decir,

$$(\Psi^T \gamma^0)^* = \Psi^T \gamma^{0*} = \Psi^T \gamma^0,$$

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T \Rightarrow (\psi^c)^c = \underbrace{C (\psi^T \gamma^0 C^\dagger \gamma^0)^T}_{C \gamma^0 C^* \gamma^0 \psi} \stackrel{C \gamma^0 = \pm \gamma^0 C^* = \pm \gamma^0 C}{=} \pm \gamma^0 C C^* \gamma^0 \psi.$$

Necesitamos exigir que  $(\psi^c)^c = \psi$ , porque  $\Gamma^2 = 1$ , así que debemos pedir que  $C C^* = \pm 1$ .

Desafortunadamente,  $A A^* = (i \gamma^1 \gamma^3) (-i \gamma^1 \gamma^3) = -1$ ,

así que  $C \neq A$ . Pero es fácil comprobar que

$$C = -i \gamma^0 \gamma^2$$

Matriz de Conjugación de Carga

satisface tanto  $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T} = -\gamma_\mu^*$  como  $C C^* = -1$ . ✓

Esta matriz está relacionada con la matriz de inversión

temporal a través de  $C = i \gamma^5 A$ , y tiene las propiedades

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T. \quad \leftarrow i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \text{ p.234, } A = i \gamma^1 \gamma^3 \text{ p.290}$$

En la base de Weyl,

$$C = \begin{pmatrix} i \sigma^2 & 0 \\ 0 & -i \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}$$

p.235 p.290

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

La operación de conjugación de carga se implementa entonces a nivel cuántico en la forma



$$\hat{C} \hat{\psi}(x) \hat{C}^{-1} = \hat{\psi}^c(x) = C \hat{\psi}^T(x) \quad (\leftrightarrow \hat{C} \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{C}^{-1} = \hat{\bar{\psi}}^T(x) C)$$

↖ espín conjugado de carga

(omitiedo nuevamente por simplicidad una posible fase adicional  $\eta_G^{(n)}$ , conocida como "paridad de conjugación de carga").

Razonado como antes, se puede ver que en términos de los operadores de creación/aniquilación esto se traduce en

$$\hat{C} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{C}^{-1} = (-1)^s \hat{b}_{\vec{p}}^{3-s} \quad \leftrightarrow \quad \hat{C} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{C}^{-1} = (-1)^{s-1} \hat{a}_{\vec{p}}^{3-s t}$$

Vemos aquí que, como pedimos desde un principio,  $\hat{C}$  intercambia partículas con antipartículas, pero NO modifica el momento ni el espín ( $\hat{a}_{\vec{p}}^{st} |0\rangle$  y  $\hat{b}_{\vec{p}}^{st} |0\rangle$  tienen el mismo espín).  
124:03/10/18

Juntado todos estos elementos, podemos deducir que los 5 distintos tensores hermitianos que es posible construir a partir de  $\psi(x)$  transforman de acuerdo con la siguiente tabla:

	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(x)$	$i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} S^{\mu\nu} \hat{\Psi}(x)$
P	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(Px)$	$-i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$P^\lambda P^\rho \hat{\Psi} S^{\lambda\rho} \hat{\Psi}(Px)$
T	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(Tx)$	$-i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(Tx)$	$-T^\nu \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi}(Tx)$	$-T^\nu \hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(Tx)$	$-T^\lambda T^\rho \hat{\Psi} S^{\lambda\rho} \hat{\Psi}(Tx)$
C	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(x)$	$i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$-\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$-\hat{\Psi} S^{\mu\nu} \hat{\Psi}(x)$
CP	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(Px)$	$-i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\lambda P^\rho \hat{\Psi} S^{\lambda\rho} \hat{\Psi}(Px)$
CPT	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(-x)$	$i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(-x)$	$-\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}(-x)$	$-\hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(-x)$	$\hat{\Psi} S^{\mu\nu} \hat{\Psi}(-x)$

El Lagrangiano de Dirac  $\mathcal{L}_D$  es invariante bajo P, T y C por separado, pero claramente es posible agregarle términos (libres o de interacciones) que violen cada una de estas 3 simetrías, o cualquiera de las combinaciones CP, CT, o PT.

¡Esto de hecho es lo que sucede en nuestro universo: el Modelo Estándar es invariante bajo  $SO^+(3,1)$ ; pero No bajo P, T, C, CP, CT, ni PT!

Por otro lado, en el último renglón de la tabla vemos que bajo la combinación CPT los distintos términos parecen simplemente multiplicarse por un factor  $(-1)^V$ ,

donde  $v$  es el número de índices vectoriales.

Esto resulta ser cierto en general, para cualquier tipo de campos [ver Greiner 10.2, 10.4 y Weinberg 5.2, 5.3 para los campos escalar y vectorial, Weinberg 5.6-5.8 para el caso general, y Streater & Wightman, op.cit., para una demostración rigurosa]. De aquí se deduce el llamado

Teorema CPT: es imposible escribir una densidad Lagrangiana local, escalar y hermitiana que viole CPT.

Es decir, usando el lenguaje de teoría cuántica de campos junto con las suposiciones de localidad, invariancia de Lorentz y unitariedad, necesariamente CPT será una simetría,

$$(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\hat{\mathcal{L}}(x)(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1} = \hat{\mathcal{L}}(-x) \iff [\hat{C}\hat{P}\hat{T}, \hat{H}] = 0.$$

↑ irrelevante en  $S = \int d^4x \mathcal{L}$

Esta es una tercera predicción genérica de la teoría cuántica de campos. Implica, primero que nada, que si existe una

partícula  $n$  con componente de espín (o helicidad)  $\lambda$ ,

entonces debe existir también su "imagen CPT": una antipartícula  $\bar{n}$  con componente de espín  $-\lambda$ . Por supuesto,

en el caso masivo  $j^3 = -\lambda$  implica, por rotaciones, la existencia también de  $j^3 = +\lambda$ ; pero en el caso no masivo las opciones

de helicidad  $h = \pm \lambda$  son independientes. P.ej., en el Modelo Estándar original se postulaba la existencia de 3 neutrinos no masivos con quiralidad/helicidad izquierda, junto con los correspondientes 3 antineutrinos no masivos con quiralidad/helicidad derecha.

Usando GPT se puede mostrar también que  $n$  y  $\bar{n}$  deben tener exactamente la misma masa sin después de tomar en cuenta el efecto de las interacciones, y también la misma tasa total de decaimiento [ver Greiner 10.6, ejemplo 10.4, y Weinberg 3.3, 3.6].

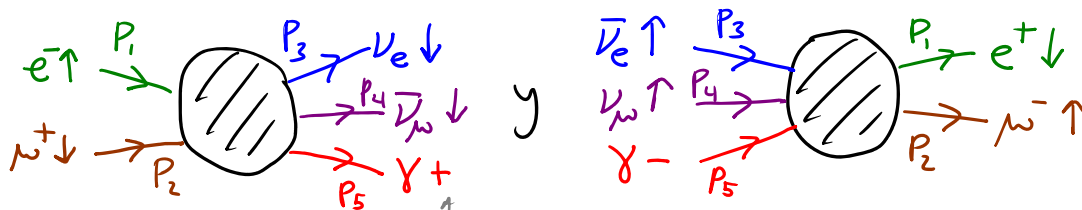
Más en general, GPT relaciona cualquier amplitud de dispersión

$$\langle p'_1, \lambda'_1; \dots; p'_N, \lambda'_N; + | p_1, \lambda_1; \dots; p_N, \lambda_N; + \rangle$$

con el proceso inverso con  $n_I \rightarrow \bar{n}_I$  y  $\lambda_I \rightarrow -\lambda_I$ :

$$\langle p_1, \bar{n}_1, -\lambda_1; \dots; p_N, \bar{n}_N, -\lambda_N; - | p'_1, \bar{n}'_1, -\lambda'_1; \dots; p'_N, \bar{n}'_N, -\lambda'_N; + \rangle.$$

P.ej., por invariancia GPT las amplitudes de los procesos



deben coincidir.

↑ helicidad del fotón

#### 4. Campo Vectorial e Invariancia de Norma

Hasta ahora hemos estudiado 2 tipos de campos:

Campo Escalar  $\xleftrightarrow[\text{a}]{\text{asociado}}$  Partículas con espín 0 (bosones)  $\xleftrightarrow[\text{para}]{\text{siene}}$  Modelo de juguete, Higgs

Campo de Dirac  $\longleftrightarrow$  Partículas con espín  $\frac{1}{2}$  (fermiones)  $\longleftrightarrow$  Leptones, Quarks.

El siguiente paso lógico es evidentemente hablar de

Campo Vectorial  $\longleftrightarrow$  Partículas con espín 1 (bosones)  $\longleftrightarrow$  Fotones,  $W^\pm, Z^0$ , Gluones.  
 $\uparrow$  por espín-estadística

que sería el último ingrediente necesario para entender al Modelo Estándar.

Este ingrediente juega un papel especial en la naturaleza.

Hasta ahora hemos hablado de campos libres ( $\mathcal{L}$  cuadrático).

En el mundo real, por supuesto los componentes básicos de la materia (los quarks y los leptones descritos por campos de Dirac) interactúan; pero resulta que lo hacen

No directamente entre sí, sino a través de bosones vectoriales que actúan como mediadores. Los campos vectoriales son entonces los portadores de las interacciones fundamentales. (Esta es una propiedad específica del Modelo Estándar, No de cualquier teoría de campos interactuante.) El único caso que estudiaremos en detalle en este semestre es el del campo electromagnético, que está asociado a partículas no masivas conocidas como fotones.

(Los gluones son los mediadores de la interacción fuerte y tampoco tienen masa, aunque por otro lado no existen como estados asintóticos, debido a la propiedad de la interacción fuerte conocida como 'confinamiento'. Las partículas mensajeras de la interacción débil, el  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ , sí tienen masa, pero solo por culpa del campo de Higgs, que resulta tener un valor de fondo  $\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \phi_0 \neq 0$  en el estado actual de nuestro universo.)

Recordemos ahora que una partícula no masiva con espín  $j$  tiene (a lo más)  $2$  estados, comparados con los  $2j+1$  estados

de una partícula masiva, así que (p.101) para  $j \geq 1$  hay claramente una discontinuidad al tomar el límite  $m \rightarrow 0$ .  
 Para ver cómo se manifiesta esto para el caso que nos interesa,  $j=1$ , recordemos que dentro del enfoque constructivo que adaptamos en la primera parte de este curso, definimos a los estados de 1 partícula no masiva con espín 1,

$$|p, \lambda = \pm 1\rangle \equiv \hat{U}(\underline{L}(p)) |p_R, \pm 1\rangle,$$

$$\uparrow \quad \leftarrow (1, 0, 0, 1)$$

Transformación de Lorentz tal que  $p_R \rightarrow p$   
 que transforman de acuerdo con (ver p. 96)

$$\begin{aligned} \hat{U}(\underline{\Lambda}) |p, \lambda\rangle &= \hat{U}(\underline{L}(\Lambda p)) \hat{U}(\underline{L}^{-1}(\Lambda p) \underline{\Lambda} \underline{L}(p)) |p_R, \lambda\rangle \\ &\equiv \underline{W}(\underline{\Lambda}, p) \equiv \exp(i\alpha_1 \hat{P}_1 + i\alpha_2 \hat{P}_2) \exp(i\theta \hat{J}_3) \\ &= e^{i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} |\Lambda p, \lambda\rangle \\ &\equiv D^{1\lambda}(\underline{W}(\underline{\Lambda}, p)) \leftarrow \text{matriz } 1 \times 1 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \hat{K}_1 - \hat{J}_2 & \rightarrow & \hat{K}_2 + \hat{J}_1 \\ \text{eigenvalor de } \hat{J}_3 = \lambda \\ \text{eigenvalor de } \hat{P}_1, \hat{P}_2 = 0 \end{matrix}$

[23: 29/03/17

[27: 10/10/22

Esto implica que los operadores de creación  $\hat{a}_{p\lambda}^\dagger$  tales que

$|p\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger |0\rangle$  transforman de acuerdo con

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \hat{U}^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} e^{i\lambda\theta(\Lambda, p)} \hat{a}_{\Lambda p\lambda}^\dagger.$$

Si empezáramos construyendo un campo vectorial  $A^\mu(x)$  sin masa (como, p.ej., el potencial electromagnético), deberíamos llegar a obtener estos operadores de creación y aniquilación. O, a la inversa, usando estos operadores debería ser posible armar un operador de campo  $\hat{A}^\mu(x)$  que transforme como un vector bajo Lorentz. Intentemos esto último, restringiéndonos por simplicidad al caso de un campo vectorial real (como el potencial electromagnético).

Proponemos entonces

$$\hat{A}^\mu(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \varepsilon_{p\lambda}^\mu + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \varepsilon_{p\lambda}^{\mu*} \right) \Big|_{p^0 = E_p = |\vec{p}|}$$

$\varepsilon^\mu(p, \lambda)$   $\rightarrow$

vector de polarización (análogo a  $u_p^s = u_a(p, s)$ )



Bajo una transformación de Lorentz, esto se convierte en

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) \stackrel{p \rightarrow \Lambda p}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{\Lambda p}}}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\Lambda p \lambda} e^{-i\lambda\theta} \epsilon_{p\lambda}^\omega + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{\Lambda p \lambda}^* e^{i\lambda\theta} \epsilon_{p\lambda}^{\omega*} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{p'}}}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p' \lambda} e^{-i\lambda\theta} \epsilon_{p' \lambda}^\omega + \text{conjugado hermit.} \right)$$

$\leftarrow \Lambda^{-1} p'$

Pero si  $\hat{A}^\omega(x)$  es en verdad un campo vectorial, debemos tener

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\omega{}_\nu \hat{A}^\nu(\Lambda x)$$

$\underbrace{\quad}_{x'}$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p' \lambda} (\Lambda^{-1})^\omega{}_\nu \epsilon_{p' \lambda}^\nu + \text{c.h.} \right)$$

$\leftarrow \Lambda p$

Iguando estas 2 expresiones, necesitamos entonces que los vectores de polarización satisfagan

$$e^{-i\lambda\theta(\Lambda, p)} \epsilon_{p\lambda}^\omega = (\Lambda^{-1})^\omega{}_\nu \epsilon_{\Lambda p \lambda}^\nu \quad \forall \Lambda, p.$$

Tomando  $p \rightarrow p_R = (1, 0, 0, 1)$  y  $\Lambda \rightarrow L(p)$ , tenemos

$$\tilde{W}(\Lambda, p) \equiv \tilde{L}^{-1}(\Lambda p) \Lambda \tilde{L}(p) \Rightarrow \tilde{W}(L(p), p_R) = \tilde{L}^{-1}(p) \tilde{L}(p) \tilde{L}(p_R)$$

$\underbrace{\quad}_{L(p) p_R}$

así que  $\theta(\underline{L}(p), p_R) = 0$  y la condición que obtuvimos en la página anterior implica en particular que

$$\varepsilon_{p_R \lambda}^\omega = (\underline{L}(p))^\omega \varepsilon_{p \lambda}^\nu \iff \boxed{\varepsilon_{p \lambda}^\omega = L(p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu}$$

lo cual parece muy natural.  $e^{-i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} \varepsilon_{p \lambda}^\omega = (\underline{\Lambda}^{-1})^\omega \varepsilon_{\underline{\Lambda} p \lambda}^\nu$

Usando esto, la condición general dice que deberíamos tener

$$e^{-i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} L(p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu = (\underline{\Lambda}^{-1})^\omega L(\underline{\Lambda} p)^\nu \varepsilon_{p_R \lambda}^\rho \quad \forall \underline{\Lambda}, p,$$

o lo que es lo mismo (dado que  $\underline{W}(\underline{\Lambda}, p) \equiv \underline{L}^{-1}(\underline{\Lambda} p) \underline{\Lambda} \underline{L}(p)$ ),

$$\underline{W}(\underline{\Lambda}, p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu = e^{i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} \varepsilon_{p_R \lambda}^\omega \quad \forall \underline{\Lambda}, p.$$

$$\underbrace{\exp[i\alpha^1(\underline{\Lambda}, p) \underline{P}^1 + i\alpha^2(\underline{\Lambda}, p) \underline{P}^2]}_{\leftarrow P_1, P_2, J^3 \text{ generadores del grupito (pp. 91-2)}} \exp[i\theta(\underline{\Lambda}, p) \underline{J}^3]$$

Si consideramos primero  $(\underline{\Lambda}, p)$  tales que  $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ ,

concluimos de aquí que los  $\varepsilon_{p_R \lambda}$  deben ser eigenvectores de

$$\underline{J}^3 \stackrel{p.40}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con eigenvalor } \lambda = \pm 1, \text{ es decir,}$$

$$\boxed{\varepsilon_{p_R +1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{p_R -1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (\Rightarrow \varepsilon_{p_R \lambda}^* \cdot \varepsilon_{p_R \lambda'} = \delta_{\lambda \lambda'}).$$

Como vimos en la Tarea 2, estos son precisamente los vectores esperados para describir fotones con polarización circular (en el plano  $x^1-x^2$ ) derecha e izquierda, respectivamente.

Pero habiendo deducido esto, en el caso general donde  $\alpha_1(\Lambda, p), \alpha_2(\Lambda, p) \neq 0$  no tendremos ya libertad alguna para satisfacer la condición de covariancia de Lorentz,

$$\exp[i\alpha_1(\Lambda, p)P_1 + i\alpha_2(\Lambda, p)P_2] \exp[i\theta(\Lambda, p)J^3] \epsilon_{p, \lambda}^\nu = e^{i\lambda\theta(\Lambda, p)} \epsilon_{p, \lambda}^\nu,$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{e^{i\lambda\theta(\Lambda, p)} \epsilon_{p, \lambda}^\nu}$

que incluye a la matriz

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_1 P_1 + i\alpha_2 P_2) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ver pp. 90-91}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & 0 & 0 & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & 0 & 0 & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \cdot 0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y tiene por tanto como miembro izquierdo a

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \end{pmatrix} e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} - e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \pm i\alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pero como miembro derecho solo a  $e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\times$

¡Así que el campo que hemos construido NO es un vector!

En esencia, el problema es que por ser no masivo,  $\hat{A}^\mu(x)$

tiene solo 2 grados de libertad independientes en cada

punto ( $\leftrightarrow$  2 estados de helicidad para la partícula correspondiente),

los cuales no son suficientes para armar un cuadrivector.

Es natural preguntarnos ¿cómo transforma entonces  $\hat{A}^\mu(x)$ ?

La cuenta que hicimos en la página anterior dice que

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\tilde{\Lambda}, p)^\omega_\nu \tilde{\epsilon}^\nu_{p, \lambda} &\equiv \left( \tilde{L}^{-1}(\tilde{\Lambda}, p) \tilde{\Lambda} \tilde{L}(p) \right)^\omega_\nu \tilde{\epsilon}^\nu_{p, \lambda} \\ &= e^{i\lambda\theta} \tilde{\epsilon}^\omega_{p, \lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) e^{i\lambda\theta} \tilde{\epsilon}^\omega_{p, \lambda}, \end{aligned}$$

funciones de  $\tilde{\Lambda}$  y  $p$

o, multiplicando por  $e^{-i\lambda\theta} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{L}(\tilde{\Lambda}, p)$ , que

$$e^{-i\lambda\theta} \tilde{L}(p)^\omega_\nu \tilde{\epsilon}^\nu_{p, \lambda} = \underbrace{(\tilde{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu}_{\tilde{\epsilon}^\omega_{p, \lambda}} \underbrace{\tilde{L}(\tilde{\Lambda}, p)^\nu_\rho}_{\tilde{\epsilon}^\nu_{\tilde{\Lambda} p, \lambda}} \tilde{\epsilon}^\rho_{p, \lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) \underbrace{p^\omega}_{(\tilde{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu p'^\nu}$$

(con  $p' \equiv \tilde{\Lambda} p$ )

Usando esto en la primera ecuación de la p. 303,

$$\hat{U}(\tilde{\Lambda}) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\tilde{\Lambda}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{p'}}}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( e^{-ip' \cdot x'} \tilde{a}_{p', \lambda} e^{-i\lambda\theta} \tilde{\epsilon}^\omega_{p, \lambda} + \text{conjugado} \right),$$

hermitiano

vemos que el campo  $\hat{A}^\omega(x)$  transforma bajo Lorentz de acuerdo con

$$\begin{aligned} \hat{U}(\tilde{\Lambda}) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\tilde{\Lambda}) &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( e^{-ip' \cdot x'} \tilde{a}_{p', \lambda} \underbrace{e^{-i\lambda\theta} \tilde{\epsilon}^\omega_{p, \lambda}}_{(\tilde{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu \left[ \tilde{\epsilon}^\nu_{p', \lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) p'^\nu \right]} + \text{c.h.} \right) \\ &= (\tilde{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu \left[ \hat{A}^\nu(x') - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) p'^\nu e^{-ip' \cdot x'} \tilde{a}_{p', \lambda} + \text{c.h.} \right) \right], \end{aligned}$$

es decir,

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\omega_\nu \left[ \hat{A}^\nu(x') - \partial'^\nu \hat{\Theta}(x', \Lambda) \right],$$

donde  $\hat{\Theta}(x', \Lambda)$  es por definición la combinación lineal de  $\hat{a}_{p\lambda}$  y  $\hat{a}_{p\lambda}^\dagger$  que se deduce de la ec. anterior.

A menos que el término que involucra a  $\hat{\Theta}(x', \Lambda)$  resulte de alguna manera irrelevante  $\forall \Lambda$ ,  $\hat{A}^\omega(x)$  no es un vector.

Concluimos entonces que, si queremos describir partículas no masivas con espín 1 (como los fotones) usando a  $A^\omega(x)$ , entonces, para que este campo sea un cuadrivector, debemos asegurarnos de que la "transformación de norma" ("gauge")

$$A_\omega(x) \longrightarrow A_\omega(x) - \partial_\omega \Theta(x) \quad \text{con } \Theta(x) \text{ arbitraria}$$

NO tenga ninguna consecuencia física. Es decir, declaramos que los perfiles  $A_\omega(x)$  y  $A'_\omega(x) \equiv A_\omega(x) - \partial_\omega \Theta(x)$ , son matemáticamente distintos pero físicamente equivalentes,  $A_\omega \approx A'_\omega$ .

[25: 05/10/18]

Notemos que esta es una transformación local (el concepto opuesto a 'global'): nos permite modificar el valor de  $A_\omega(x)$  de manera independiente en cada punto del espaciotiempo. Esta es una libertad muy drástica: con una elección apropiada de  $\Theta(x)$ , podemos incluso apagar algunos componentes de  $A_\omega(x)$ ,

SIN consecuencia alguna!! En los libros, frecuentemente se le llama simetría de norma a esta libertad; pero es más que eso. La implicación es que, al describir partículas no masivas de espín 1 usando el campo vectorial  $A_\mu(x)$ , nuestro lenguaje es redundante: tenemos más variables que grados de libertad físicos.

De hecho, podemos recordar que para el campo de Dirac  $\psi(x)$  de entrada sucedía lo mismo: teníamos 4 componentes (complejas) para describir los 2 posibles estados de espín (de partícula y antipartícula). Pero en ese caso vimos que era posible imponer una restricción adicional que eliminara la redundancia de manera covariante bajo Lorentz: la ec. de Dirac  $(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0$ . Aquí podríamos de manera similar trabajar con el campo  $\hat{A}_\mu(x)$  tal como lo construiríamos en un principio, que, además de la ecuación de Klein-Gordon  $\partial^2 \hat{A}_\mu(x) = 0$ , satisface, como verificaremos en la p. 246, las condiciones adicionales  $\hat{A}^0(x) = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}}(x) = 0$  (condiciones que más adelante llamaremos "norma de Coulomb"). El problema es que estas condiciones no son covariantes bajo Lorentz, y por ello resulta más difícil asegurarnos de que los resultados físicos sí lo sean. Desafortunadamente,

para un campo vectorial no masivo No existe manera alguna de eliminar por completo la redundancia que sea covariante bajo Lorentz, así que **debemos escoger**: o trabajamos con un formalismo covariante pero redundante, o utilizamos un lenguaje sin redundancia pero no covariante. En general preferiremos la primera opción.

Para nuestro campo vectorial no masivo  $A_\mu(x)$ , que de ahora en adelante llamaremos también "campo de norma", necesitaremos entonces una densidad Lagrangiana que sea escalar, real e invariante de norma. Notando que la combinación antisimétrica

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad \text{Intensidad de Campo}$$

es invariante de norma ( $F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu}$ ), vemos que la única posibilidad para el caso de un campo de norma libre ( $\leftrightarrow$  Lagrangiano cuadrático) es el término cinético que apareció en la Tarea 3,



↙ por convención

$$\mathcal{L}_M(\partial_\mu A_\nu(x)) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad \text{Lagrangiano de Maxwell}$$

Es importante recalcar que la invariancia de norma, por ser ni más ni menos que la manifestación del hecho de que nuestro lenguaje es redundante, debe preservarse incluso al incorporar interacciones (es decir, términos cúbicos o más altos). P.ej., si  $A_\mu(x)$  se acopla de manera lineal a otros campos,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu(x), \varphi_\ell(x), \partial_\mu \varphi_\ell(x)) = -A_\mu(x) J^\mu(x)$$

lineal en  $A$  (no en  $\varphi$ )
vector bajo Lorentz, combinación de  $\varphi$ 's y/o  $\partial_\mu \varphi$ 's

entonces la invariancia de  $S_M + S_{\text{int}} \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\text{int}})$

bajo  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Theta$  requiere que

$$\int d^4x \partial_\mu \Theta(x) J^\mu(x) \stackrel{\text{partes}}{=} -\int d^4x \Theta(x) \partial_\mu J^\mu(x) = 0,$$

es decir, que  $J^\mu(x)$  sea una corriente conservada,  $\partial_\mu J^\mu = 0$ .

Un caso en el que sabemos ya que tendremos particular interés es acoplar el campo vectorial no masivo  $A_\mu(x)$ , que nos servirá para describir al (cuadri)potencial electromagnético,

con el campo de Dirac masivo  $\psi(x)$ , que nos servirá para describir al electrón y demás fermiones cargados.

Como vimos (p.277), la única simetría continua interna del Lagrangiano de Dirac masivo,  $\psi(x) \rightarrow e^{iq\theta} \psi(x)$ , da lugar a la corriente conservada  $J^\mu(x) = q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ , así que la única manera en que podemos acoplar  $A_\mu(x)$  linealmente a  $\psi(x)$  es utilizando el Lagrangiano de la

Electrodinámica Cuántica (QED),

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}_D(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi) + \mathcal{L}_M(F_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$$

$$\text{con } \mathcal{L}_{\text{int}} \equiv -A_\mu J^\mu = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu.$$

La ec. de movimiento para  $A_\mu(x)$  sería entonces

$$\frac{\delta S_{\text{QED}}}{\delta A_\mu(x)} = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} [\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\text{int}}] = 0,$$

que según comprobamos en la Tarea 3 da lugar, como es de esperarse, a las 2 ecs. de Maxwell con fuentes,

$$\frac{\delta S_{\text{QED}}}{\delta A_\mu(x)} = \partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - J^\mu(x) = 0.$$

$\swarrow (p, \vec{J})$   
 $\uparrow$  contiene a  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$

A partir de esto queda finalmente claro que, como habíamos prometido, la corriente de Noether  $J^\mu(x) = q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$  es en verdad la (cuadri)corriente eléctrica, y  $q$  ( $-q$ ) es la carga eléctrica de las partículas (antipartículas) asociadas a  $\psi(x)$ . P.ej.,  $q = -e$  para el electrón, y  $q = +2/3 e$  para el quark arriba.  $\leftarrow 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Hay aquí otro punto que es muy importante destacar. Sabemos que  $\mathcal{L}_0$  es invariante bajo la transformación  $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x)$ , que es entonces una simetría global: hagamos el mismo cambio de fase en todos los puntos del espaciotiempo. Pero al acoplar  $\psi(x)$  a  $A_\mu(x)$ , sucede algo muy curioso:  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  es de hecho invariante bajo la transformación local conjunta

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)} \psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x).$$

La invariancia de  $\mathcal{L}_M(F)$  es obvia, puesto que en lo que a  $A_\mu(x)$  respecta, esta es simplemente una transformación de norma con  $\Theta(x) = \theta(x)$ . Pero podemos igualmente verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D + \mathcal{L}'_{int} &= \underbrace{\bar{\Psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)}_{e^{-iq\theta(x)} \bar{\Psi}(x)} \underbrace{\Psi'}_{e^{iq\theta(x)} \Psi(x)} - q \underbrace{\bar{\Psi}' \gamma^\mu \Psi'}_{A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)} \\ &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int} + \cancel{i(iq\partial_\mu \theta) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi} + \cancel{q(\partial_\mu \theta) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi}. \end{aligned}$$

El lagrangiano conjunto es entonces en verdad invariante bajo la transformación indicada, donde, a nuestro antojo, podemos cambiar la fase de  $\Psi(x)$  de manera independiente en cada punto del espaciotiempo. Así que, al pasar de  $\mathcal{L}_D$  a  $\mathcal{L}_{QED}$  ¡la simetría interna que originalmente era global se ha vuelto local !! De nuevo, la transformación local realmente es más que una simetría, es una redundancia: NINGUNA cantidad física depende de la elección de  $\theta(x)$ .

24.5: 31/03/17

Esta conexión entre la existencia de partículas no masivas con espín 1 y la aparición de una 'simetría' interna local para  $\Psi(x)$  es tan importante que, para entenderla mejor,

Vale la pena volver a platicarnos toda esta historia con la lógica completamente en dirección opuesta.

Olvidando por un rato todo lo que recién aprendimos, supongamos que tenemos una teoría con un campo complejo

$\varphi_1(x)$  (como, p.ej.,  $\Psi(x)$  en  $\mathcal{L}_D$ ), que es invariante bajo la transformación global  $U(1)$   $\varphi_1(x) \rightarrow e^{i\vartheta} \varphi_1(x)$ :

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_1^*, \partial_\mu \varphi_1, \partial_\mu \varphi_1^*) = \mathcal{L}(e^{i\vartheta} \varphi_1, e^{-i\vartheta} \varphi_1^*, \underbrace{\partial_\mu (e^{i\vartheta} \varphi_1)}_{e^{i\vartheta} \partial_\mu \varphi_1}, \underbrace{\partial_\mu (e^{-i\vartheta} \varphi_1^*)}_{e^{-i\vartheta} \partial_\mu \varphi_1^*})$$

Esto quiere decir que la fase global del campo no tiene significado físico; pero si fijamos a mano la fase en algún punto  $x_R$  (p.ej., pidiendo que  $\varphi_1(x_R) \in \mathbb{R}$ ), entonces la fase en los puntos restantes ya no se puede ajustar de manera arbitraria, y constituye por tanto información verdaderamente física. Nuestra elección de fase en  $x_R$

determina la fase en todo lado. Contrario a lo que indican algunos libros de texto, no hay nada de inconsistente en esto, pues es completamente análogo a, p.ej., lo que sucede

en relación a la invariancia bajo traslaciones cuando elegimos un origen para el espaciotiempo. Aun así, podríamos considerar deseable (o al menos, interesante) que la fase se pudiera ajustar de manera independiente en cada punto, es decir, que tuviéramos invariancia bajo la transformación local

$$\varphi_\ell(x) \rightarrow \varphi'_\ell(x) = e^{iq\theta(x)} \varphi_\ell(x).$$

¡ Infinitas veces más simetría que antes!  
↓

Esto nos daría un grupo de simetría  $U(1)$  en cada punto, y significaría que la fase del campo no tiene significado físico alguno, puesto que podemos ajustarla a nuestro antojo en cada punto sin modificar las predicciones físicas de la teoría. Claramente un campo con esta simetría local contiene entonces menor grados de libertad físicos que los que hubiera tenido si la simetría fuera solo global.

Ahora, dada la simetría global del lagrangiano original,

bajo la transformación local los términos sin derivadas (p.ej.,  $-m\bar{\psi}(x)\psi(x)$ ,) son automáticamente invariantes,

$$\mathcal{L}(\psi_\ell(x), \psi_\ell^*(x), 0, 0) = \mathcal{L}(e^{i\int \theta(x)} \psi_\ell(x), e^{-i\int \theta(x)} \psi_\ell^*(x), e^{i\int \theta(x)} 0, e^{-i\int \theta(x)} 0);$$

pero los términos con derivadas (p.ej.,  $i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$ ,) son problemáticos,

$$\mathcal{L}(\psi_\ell(x), \partial_\mu \psi_\ell(x)) \neq \mathcal{L}(e^{i\int \theta(x)} \psi_\ell(x), \partial_\mu [e^{i\int \theta(x)} \psi_\ell(x)])$$

$$e^{i\int \theta(x)} \partial_\mu \psi_\ell(x) + i\int \partial_\mu \theta(x) e^{i\int \theta(x)} \psi_\ell(x)$$

$\neq 0$  si  $\theta \neq \text{cte.}$

La dificultad se debe a que la derivada compara el valor del campo en 2 puntos distintos:

$$\partial_\mu \psi_\ell(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi_\ell(x^\mu + \epsilon \delta_\mu^\nu) - \psi_\ell(x^\mu)]$$

Transforman de manera diferente  
en el caso local  $\theta = \theta(x)$

Lo que necesitamos entonces es una nueva definición de derivada, que compare 2 cantidades que transformen de la misma manera.

Para construir esta nueva derivada, nos hace falta primero tener una herramienta para convertir a  $\varphi_\ell(x'' + \epsilon \delta''_\mu)$  en un objeto que transforme igual que  $\varphi_\ell(x)$ .  
 Más en general, supongamos que podemos encontrar una función escalar  $W(x, y)$  con la regla de transformación bilocal

$$W(x, y) \rightarrow W'(x, y) = e^{i\vartheta(x)} W(x, y) e^{-i\vartheta(y)}.$$

Si producto por  $\varphi_\ell(y)$  transformará entonces como  $\varphi_\ell(x)$ :

$$W(x, y) \varphi_\ell(y) \rightarrow e^{i\vartheta(x)} W(x, y) e^{-i\vartheta(y)} e^{i\vartheta(y)} \varphi_\ell(y).$$

Normalizaremos por ahora este "corrector de fase" tal que

$$W(x, x) = 1. \text{ Dado } W(x, y), \text{ podemos definir una noción}$$

"correcta" de derivada,

$$D_\mu \varphi_\ell(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ W(x'', x'' + \epsilon \delta''_\mu) \varphi_\ell(x'' + \epsilon \delta''_\mu) - \varphi_\ell(x'') \right],$$

que por construcción transforma justo igual que  $\varphi_\ell(x)$ :

$$D_\mu \varphi_\ell(x) \rightarrow [D_\mu \varphi_\ell(x)]' = e^{i\vartheta(x)} D_\mu \varphi_\ell(x).$$

Para hacer esto más explícito, podemos desarrollar



$$W(x', x' + \epsilon \delta_\mu^\nu) = \underbrace{W(x, x)}_1 + \epsilon \delta_\mu^\nu \underbrace{\frac{\partial W(x, y)}{\partial y^\nu}}_{\equiv i\eta A_\nu(x)} \Big|_{y=x} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

campo vectorial

donde la regla de transformación

$$W(x, y) \rightarrow W'(x, y) = e^{i\eta\theta(x)} W(x, y) e^{-i\eta\theta(y)}$$

implica que  $A_\nu(x)$  transforma de acuerdo con

$$\begin{aligned} i\eta A_\nu(x) &\equiv \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x, y) \Big|_{y=x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left[ e^{i\eta\theta(x)} W(x, y) e^{-i\eta\theta(y)} \right] \Big|_{y=x} \\ &= \cancel{e^{i\eta\theta(x)}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x, y) \Big|_{y=x}}_{i\eta A_\nu(x)} \cancel{e^{-i\eta\theta(x)}} - i\eta \cancel{\partial_\nu \theta(x)} e^{i\eta\theta(x)} W(x, x) \cancel{e^{-i\eta\theta(x)}}, \end{aligned}$$

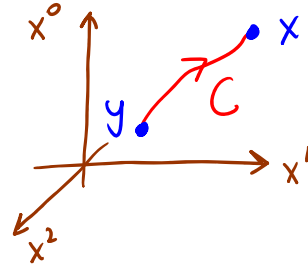
es decir, justo como el cuádripotencial electromagnético,

$$\boxed{A_\nu(x) \rightarrow A'_\nu(x) = A_\nu(x) - \partial_\nu \theta(x)} \quad \cdot \quad \begin{array}{l} \text{Transformación} \\ \text{de Normas} \end{array}$$

Y de hecho, dado un campo vectorial  $A_\nu(x)$  que transforma de este modo, que llamamos campo de normas, podemos definir

$$W(x,y) \equiv \exp \left[ -iq \int_C dx^\mu A_\mu(x) \right]$$

$$\equiv \exp \left[ -iq \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x(\tau)) \right]$$



invariante bajo  $\tau \rightarrow \underline{\tau}(\tau)$

donde  $x^\mu(\tau)$  es una parametrización de la curva  $C$ , con  $x^\mu(0) = y^\mu$ ,  $x^\mu(1) = x^\mu$ . Esta función satisface

$$\left. \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x,y) \right|_{y=x} = \left. \frac{\partial}{\partial y^\nu} \exp \left[ -iq \int_y^x dx^\mu A_\mu(x) \right] \right|_{y=x} = iq A_\nu(x), \quad \checkmark$$

y además transforma de la manera requerida,

$$W(x,y) \rightarrow W'(x,y) = \exp \left[ -iq \int_y^x dx^\mu (A_\mu(x) - \partial_\mu \Theta(x)) \right]$$

$$= e^{iq\Theta(x)} W(x,y) e^{-iq\Theta(y)} \quad \checkmark$$

La función  $W(x,y)$  se conoce como línea de Wilson, o lazo de Wilson si la trayectoria  $C$  es cerrada,  $x=y$ .

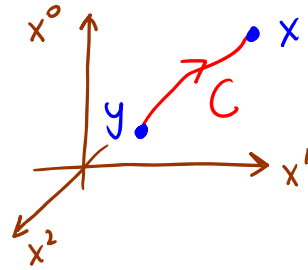
En general depende de la curva  $C$ ,  $W(x,y) \equiv W_C(x,y)$ , así que  $W_C(x,x)$  pueden ser distintos de 1 si  $C$  es no trivial. Pero siempre se tiene  $W_C(x,x) \rightarrow W'_C(x,x) = W_C(x,x)$ ;

cualquier lazo de Wilson es invariante de norma.

Físicamente,  $W_C(x,y)$  representa la fase  $\exp[iS_{int}]$  acumulada por una carga puntual  $q$  que sigue la trayectoria  $C$ : saber por de electro que la corriente asociada será

$$J^\mu(x) = q \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau))$$

invariante bajo  $\tau \rightarrow \underline{\tau}(\tau)$



(si tomamos  $\tau = x^0 \equiv t$ , esto es

$$J^0(x) = q \int d\tau \frac{dx^0}{d\tau} \delta(x^0 - x^0(\tau)) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(\tau))$$

$$= q \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)), \quad \begin{array}{l} \text{densidad de carga} \\ \text{para partícula puntual} \end{array} \quad \checkmark$$

$$\vec{J}(x) = q \int d\tau \frac{d\vec{x}}{d\tau} \delta(x^0 - x^0(\tau)) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(\tau))$$

$$= q \vec{v} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad \begin{array}{l} \text{densidad de corriente} \\ \text{para partícula puntual} \end{array} \quad \checkmark$$

y la interacción de esta corriente con el potencial eléctrico  $A_\mu(x)$  estará por tanto dada por (p.311)

$$S_{int} = - \int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x)$$

$$= -q \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) \int d^4x \delta^{(4)}(x - x(\tau)) A_\mu(x)$$

$$= -q \int_0^1 d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)),$$

así que en verdad  $\exp[iS_{int}] = W_C(x, y)$ . (Esta es precisamente la fase que aparece en el efecto Bohm-Aharonov.)

Regresando a la discusión principal, podemos ver que, en términos del campo vectorial (o 'conexión')  $A_\mu(x)$ , nuestra nueva definición de derivada es

$$D_\mu \varphi_l(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \underbrace{W(x', x' + \epsilon \delta_\mu^\nu)}_{1 + \epsilon \delta_\mu^\nu i q A_\nu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \varphi_l(x' + \epsilon \delta_\mu^\nu) - \varphi_l(x') \right]$$

p.315

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \varphi_l(x' + \epsilon \delta_\mu^\nu) - \varphi_l(x') + \epsilon i q A_\mu(x) \varphi_l(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right],$$

es decir,

$$D_\mu \varphi_l(x) \equiv \partial_\mu \varphi_l(x) + i q A_\mu(x) \varphi_l(x)$$

Derivada

Covariante

Podemos verificar explícitamente que

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi_l(x) &\rightarrow [D_\mu \varphi_l(x)]' = (\partial_\mu + i q A_\mu'(x)) \varphi_l'(x) \\ &= \partial_\mu (e^{i\gamma\theta} \varphi_l) + i q (A_\mu - \partial_\mu \theta) e^{i\gamma\theta} \varphi_l \\ &= \cancel{i q \partial_\mu \theta e^{i\gamma\theta} \varphi_l} + e^{i\gamma\theta} \partial_\mu \varphi_l + e^{i\gamma\theta} i q A_\mu \varphi_l - \cancel{i q \partial_\mu \theta e^{i\gamma\theta} \varphi_l} \\ &= e^{i\gamma\theta} (\partial_\mu + i q A_\mu) \varphi_l = e^{i\gamma\theta} D_\mu \varphi_l(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Habiendo aprendido esto, podemos concluir entonces que para promover a  $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \varphi_l^*(x), \partial_\mu \varphi_l(x), \partial_\mu \varphi_l^*(x))$  a una teoría con la invariancia local

$\varphi_l(x) \rightarrow \varphi_l'(x) = e^{iq\theta(x)} \varphi_l(x)$ , basta con:

1) Inventar un campo de norma, es decir, un campo vectorial  $A_\mu(x)$  que transforme de acuerdo con

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) ;$$

2) Reemplazar a las derivadas ordinarias  $\partial_\mu \varphi_l(x)$  con las

derivadas covariantes  $D_\mu \varphi_l(x) \equiv (\partial_\mu + iq A_\mu(x)) \varphi_l(x)$ ,

obteniendo entonces  $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \varphi_l^*(x), D_\mu \varphi_l(x), [D_\mu \varphi_l(x)]^*)$ .

Este procedimiento induce un cierto acoplamiento entre  $\varphi_l(x)$  y  $A_\mu(x)$ , que se conoce como acoplamiento mínimo.

Pej., a partir del Lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L}_D(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x),$$

seamos de inmediato que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D(\psi(x), D_\mu \psi(x)) &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \overset{\partial_\mu + iq A_\mu}{D_\mu} - m) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m) \psi(x) \end{aligned}$$

posee la invariancia local  $U(1)$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i q \theta(x)} \psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x),$$

y contiene el término de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = -q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) = -J^\mu(x) A_\mu(x),$$

que tiene justo la forma esperada para calificar el acoplamiento entre la corriente  $J^\mu(x)$  y el potencial electromagnético  $A_\mu(x)$ .

Si deseamos considerar a  $A_\mu(x)$  como un nuevo campo dinámico en la teoría, entonces debemos agregar un término cinético para él (pues de otra manera su ec. de mov. sería simplemente  $\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x) = 0$ ).

Nos hace falta entonces una combinación de las derivadas  $\partial_\mu A_\nu(x)$  que sea invariante de norma. Podemos deducirla observando que bajo una transformación de norma tenemos

L26: 08/10/18

$$\varphi_l(x) \rightarrow \varphi'_l(x) \equiv e^{i\int \theta(x)} \varphi_l(x), \quad D_\mu \varphi_l(x) \rightarrow e^{i\int \theta(x)} D_\mu \varphi_l(x),$$

y por tanto la combinación

$$\underbrace{[D_\mu, D_\nu]}_{\substack{\text{es invariante de norma.} \\ \uparrow}} \varphi_l(x) \rightarrow e^{i\int \theta(x)} \underbrace{[D_\mu, D_\nu]}_{\substack{-i\int \theta(x) \\ \varphi'_l(x)}} \varphi_l(x),$$

Esta combinación no es ya un operador diferencial:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \varphi_l &= (\partial_\mu + i\int A_\mu) (\partial_\nu + i\int A_\nu) \varphi_l - \mu \leftrightarrow \nu \\ &= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \varphi_l} - \int A_\mu A_\nu \varphi_l + i\int A_\mu \partial_\nu \varphi_l + i\int \partial_\mu (A_\nu \varphi_l) \\ &\quad - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu \varphi_l} + \int A_\nu A_\mu \varphi_l - i\int A_\nu \partial_\mu \varphi_l - i\int \partial_\nu (A_\mu \varphi_l) \\ &= i\int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \varphi_l, \end{aligned}$$

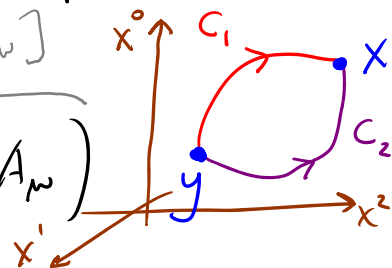
$\varphi_l \partial_\mu A_\nu + A_\nu \partial_\mu \varphi_l$   
 $\varphi_l \partial_\nu A_\mu + A_\mu \partial_\nu \varphi_l$

Definimos entonces la intensidad de campo (o 'curvatura')

$$\boxed{F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{i\int} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}.$$

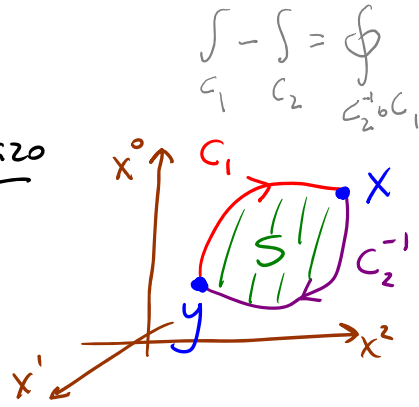
Este resulta ser el objeto que determina la manera en que las líneas de Wilson  $W_C(x, y)$  dependen de la trayectoria  $C$ :

$$\frac{W_{C_1}(x, y)}{W_{C_2}(x, y)} = \exp\left(-i\int_{C_1} dx^\mu A_\mu\right) \exp\left(i\int_{C_2} dx^\mu A_\mu\right)$$



que se puede reescribir como el lazo

$$\frac{W_{C_1}(x,y)}{W_{C_2}(x,y)} = \exp\left(-iq \oint_{C_2^{-1} \circ C_1} dx^\mu A_\mu\right)$$



$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \exp\left(iq \int_S d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right)$$

$d x^\mu d x^\nu \quad \leftarrow \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\neq 1 \text{ en general si } F_{\mu\nu} \neq 0.$$

Con  $F_{\mu\nu}$  a la mano, podemos construir el término cinético invariante de norma  $\mathcal{L}_M(\partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . Agregando este término a la acción original,  $A_\mu$  tiene como ec. de mov.

las 2 ec. de Maxwell inhomogéneas:  $\frac{\delta S}{\delta A_\nu(x)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu = 0$ .

A partir de la definición de  $F_{\mu\nu}$ , podemos notar además que la identidad de Jacobi para los conmutadores,

$$0 = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} [D_\nu, [D_\lambda, D_\rho]]$$

$$= iq [D_\nu, \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}}_{\equiv 2 \tilde{F}^{\mu\nu}}]$$

Intensidad de Campo Dual

$$\equiv 2 \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \vec{B} \rightarrow -\vec{E})$$

pej.  $\tilde{F}^{01} = F_{23}$



o lo que es lo mismo,

$$0 = igZ \left( [\partial_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] + ig [A_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] \right),$$

que usando  $[\partial_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] \varphi_\lambda = \partial_\nu (\tilde{F}^{\mu\nu} \varphi_\lambda) - \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi_\lambda = \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \varphi_\lambda$ , implica

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

identidad de Bianchi.

Esta ecuación es por supuesto obvia si se le escribe

$$\text{en la forma } \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu F_{\lambda\rho} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu (\partial_\lambda A_\rho) = 0.$$

Como verificamos en la Tarea 3, esta es la

expresión que codifica las otras 2 ec. de Maxwell.

(Por la relación entre  $F^{\mu\nu}$  y  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ , aprendemos entonces que  $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \neq 0$  implicaría una fuente magnética  $\tilde{J}^\mu$ .)

Podemos notar por último que no es posible agregar a la acción un término de masa  $m^2 A_\mu A^\mu$ , porque no es invariante de norma.

( $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$  es invariante de norma, pero es una derivada total,

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \propto \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu (A_\nu \partial_\lambda A_\rho),$$

y por tanto no cambia las ec. de mov. La opción restante es

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \underbrace{\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}_{2(\delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta - \delta_\rho^\alpha \delta_\lambda^\beta)} F^{\lambda\rho} F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.)$$

En resumen, hemos visto que el deseo aparentemente ocioso de promover una simetría  $U(1)$  global a una versión local ( $\equiv$  "normar"  $U(1)$ ) nos lleva a predecir la existencia y las propiedades correctas del potencial electromagnético  $A_\mu(x)$ !!

↑ verbo (en inglés: gauge) + "calibrar"

En nuestro primer acercamiento al tema de invariancia de norma, habíamos visto que la existencia de los fotones (partículas no masivas con espín 1) acaba implicando que nuestra descripción de los campos  $\varphi_q(x)$  asociados a partículas cargadas es invariante bajo la transformación local  $\varphi_q(x) \rightarrow e^{iq\theta(x)} \varphi_q(x)$ . Ahora hemos aprendido que es posible invertir esta lógica por completo, y afirmar, si así lo queremos, que los fotones existen como consecuencia de esta invariancia local  $U(1)$ !

Aunque en este semestre no profundizaremos en ello, es interesante desde el punto de vista teórico — y útil para describir el mundo real — señalar que es posible generalizar toda esta discusión al caso donde el grupo de simetría interna es no abeliano.

En ese caso, comenzamos con una teoría invariante bajo la transformación interna global

$$\varphi_{\lambda I}(x) \longrightarrow \varphi'_{\lambda I'}(x) = M_{I'I}(\theta^\alpha) \varphi_{\lambda I}(x) \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{suma sobre } I=1, \dots, N \\ \downarrow \text{implicita} \end{array}$$

$$= \left[ \exp(i\theta^\alpha T_\alpha) \right]_{I'I} \varphi_{\lambda I}(x),$$

↑ índice interno  $I=1, 2, \dots, N$

donde las matrices  $M$  constituyen una rep irreducible  $R$  (N-dimensional) del grupo de Lie  $G$ , y las matrices  $T_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, \dim G$ ) son los generadores correspondientes, que satisfacen las relaciones de conmutación

↑ convencional NO factorizar  $\neq \emptyset$   
↑ frecuentemente irrep fundamental

$$[T_\alpha, T_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$$

[29:14/10/22

↑ constantes de estructura

Para agrandar la simetría a la versión local

$$\varphi_I(x) \longrightarrow \varphi'_{I'}(x) = \left[ \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) \right]_{I'I} \varphi_I(x),$$

↑

↑ escoger posible índice de Lorentz

necesitamos postular la existencia de un campo de norma matricial  $[A_\mu(x)]_{I'I}$  que tome valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , o lo que es lo mismo,

la existencia de  $\dim G$  campos vectoriales ordinarios,

$$[A_\mu(x)]_{I'I} \equiv A_\mu^\alpha(x) [T_\alpha]_{I'I}, \quad I, I' = 1, \dots, N$$

$$\alpha = 1, \dots, \dim G$$

↑ Notar que podemos reescribir el mismo  $A_\mu(x)$  en distintos irreps usando los generadores correspondientes

que transforme(n) de acuerdo con

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = \exp(i\theta(x)T_\alpha) \left( A_\mu(x) - \frac{i}{g} \mathbb{1} \partial_\mu \right) \exp(-i\theta(x)T_\beta)$$

↖ análogo a  $q$

(que en el caso  $U(1)$  se reduce correctamente a

$$A'_\mu(x) = e^{i\theta(x)} \left( A_\mu(x) - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) e^{-i\theta(x)} = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta(x),$$

↖ llamamos  $q=0$  antes

y reemplazar las derivadas ordinarias por la derivada

covariante

usamos  $A_\mu$  en irrep apropiada según  $\varphi(x)$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig A_\mu(x)$$

$$A'_\mu = \frac{1}{ig} M(\theta(x)) D_\mu M^{-1}(\theta(x))$$

notar que

↖  $\mathbb{1}$  implícita, es decir,  $\delta_{I'I}$

que por construcción es tal que

$$[D_\mu \varphi(x)]_I \rightarrow [D'_\mu \varphi(x)]_I = \exp(i\theta(x)T_\alpha)_{I'I} [D_\mu \varphi(x)]_I.$$

La línea o el lazo de Wilson se define como

$$W_c \equiv P \left\{ \exp \left[ -i \int_c dx^\mu A_\mu(x) \right] \right\} = P \left\{ \exp \left[ -i \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x(\tau)) \right] \right\}$$

↑ matriz

↖ orden de camino ("path ordering"): orden temporal con respecto a  $\tau$

y transformas de acuerdo con

$$W_c(x, y) \rightarrow M(\theta(x)) W_c(x, y) M^{-1}(\theta(y)),$$

así que para un lazo,  $\text{Tr}[W_c]$  es invariante.

A partir del potencial  $A_\mu(x)$ , la intensidad de campo se define nuevamente como

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu]$$

y se puede expresar por tanto como

$\neq 0$  en general

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^\alpha(x) T_\alpha,$$

donde

$\uparrow$  1 tensor  
metriçal

$\uparrow$  dim 6 tenores

$$F_{\mu\nu}^\alpha(x) = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - g f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma.$$

A partir de

$$[D_\mu, D_\nu] \varphi(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) [D_\mu, D_\nu] \varphi(x)$$

$\uparrow$  es un índice  $F$

$$\underbrace{\exp(-i\theta^\beta(x) T_\beta) \varphi'(x)}$$

podemos ver que en el caso no abeliano  $F_{\mu\nu}(x)$  no es invariante de normas, sino que transforma de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha) F_{\mu\nu}(x) \exp(-i\theta^\beta(x) T_\beta).$$

En este caso, entonces, para darle dinámica al campo de norma  $A_\mu(x)$  NO podemos simplemente agregar a la densidad lagrangiana el término  $F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$ , porque, si bien es invariante de Lorentz, bajo una transformación de norma

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \rightarrow \exp(i\theta^\alpha(x)T_\alpha)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\exp(-i\theta^\beta(x)T_\beta),$$

y además,  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  es una matriz  $N \times N$ !

Pero podemos resolver fácil y simultáneamente ambos problemas notando que, por la ciclicidad de la traza,

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\dim G} F_{\mu\nu}^\alpha F_{\mu\nu}^\alpha \quad \underline{\text{si es invariante.}}$$

↪ es más fundamental,  $\text{Tr}(T_\alpha T_\beta) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$

Obtenemos entonces el lagrangiano de Yang-Mills (-Shaw)

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right].$$

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu]$$

↪ por invariancia de norma, NO es posible agregar un término de masa

Es importante tener presente que, a pesar de ser la generalización natural del lagrangiano de Maxwell,  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  contiene términos cúbicos y cuárticos, y NO es por tanto

una teoría libre: a diferencia de los fotones, las partículas asociadas al campo de Yang-Mills  $A_\mu(x)$  interactúan entre sí. Como hemos visto, esto es consecuencia directa de la existencia de la invariancia local NO abeliana!

El Lagrangiano completo de la teoría con la invariancia local

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) = e^{i\theta^a(x)T_a} \varphi(x), \quad A_\mu^a(x) \rightarrow e^{i\theta^a(x)T_a} \frac{1}{ig} D_\mu e^{-i\theta^a(x)T_a}$$

es

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}(\varphi, \partial_\mu \varphi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}_{\text{glob}}(\varphi, \underset{\uparrow}{D_\mu} \varphi) + \mathcal{L}_{\text{YM}}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu).$$

En particular, si  $\psi(x)$  es un campo de Dirac, tenemos

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]$$

que en el caso donde el grupo de Lie es  $G = SU(3)$  define la teoría conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD).

El campo  $\psi(x)$  describe en ese caso  $\leftarrow$  un (sabor específico de) quark, y  $A_\mu^a(x)$  está asociado a los  $\dim 6 = 3^2 - 1 = 8$  distintos tipos de gluones, portadores de la fuerza fuerte.  
 $I=1,2,3$  "color"  $\leftarrow$  octeto por "confinamiento"

La teoría electrodébil, que es el componente restante del Modelo Estándar, está basada en el grupo de simetría local  $G = SU(2) \times U(1)$ . En ese caso, el campo  $\psi(x)$  describiría a un (doblete específico de) quark o lepton<sup>I=1,2</sup> "isospín débil" y  $A_{\mu}^I(x)$  da lugar a  $\dim G = (2^2 - 1) + 1 = 4$  bosones de norma:  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  y el fotón  $\gamma$ . (El factor de  $SU(2)$  se acopla solo a la parte izquierda  $\Psi_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$ )  
← adquirir masa por "mecanismo de Higgs"  
↑ izquierdo, No índice I=1,2

Regresemos ahora al caso abeliano  $G = U(1)$ . Habiendo entendido ya al derecho y al revés la relación entre el campo  $A_{\mu}(x)$  y la invariancia de norma, estamos listos para estudiar la cuantización canónica de  $A_{\mu}(x)$ . Sabemos que la parte del Lagrangiano que depende del campo de norma es

$$\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4} \underbrace{F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}}_{\partial_{\lambda} A_{\rho} - \partial_{\rho} A_{\lambda}} - A_{\lambda} J^{\lambda}$$

← si interacción es lineal en  $A$   
← agregamos si queremos discutir el caso libre

y por tanto los momentos canónicos son

$$\pi^{\mu}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}(x)} = -F^{0\mu} = \begin{cases} 0 & \text{para } \mu=0 \\ E^i & \text{para } \mu=i \end{cases} \quad \leftarrow \text{constricción}$$



El hecho de que  $\mathcal{L}$  no depende de  $\partial_0 A_0(x)$  implica además que la ec. de mov. para  $A_0(x)$  toma la forma

$$-\frac{\delta S}{\delta A_0(x)} = \cancel{\partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} \right)} + \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_0)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\partial_i F^{i0}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} + J^0 = 0 \quad \text{Ley de Gauss,}$$

o lo que es lo mismo,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} - J^0 = 0$ , que constituye una segunda constricción Hamiltoniana.

Así que, como en el caso del campo de Dirac, tenemos aquí 2 constricciones, que califican el hecho de que NO todas las variables en el espacio fase  $A_\mu(x), \Pi^\mu(x)$  son independientes. Pero las constricciones aquí,

$\chi_1 \equiv \Pi^0(t, \vec{x}) = 0$ ,  $\chi_2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(t, \vec{x}) - J^0(t, \vec{x}) = 0$ ,  
resultan ser calitativamente diferentes (son constricciones "de primera clase",  $\{\chi_i(t, \vec{x}), \chi_j(t, \vec{x}')\}_{\text{PB}} = 0$ ), y de hecho están estrechamente relacionadas con la invariancia de

norma: usando los paréntesis de Poisson básicos

$$\{A_\mu(t, \vec{x}), \Pi^\circ(t, \vec{x}')\}_{\mathbb{P}} = \delta_\mu^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$\{A_\mu(t, \vec{x}), \Pi^i(t, \vec{x}')\}_{\mathbb{P}} = \delta_\mu^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\Rightarrow \{A_\mu(t, \vec{x}), \vec{\nabla}' \cdot \vec{\Pi}(t, \vec{x}')\}_{\mathbb{P}} = \delta_\mu^i \partial'_i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'),$$

podemos verificar que cada construcción genera una transformación de norma, en el sentido de que

$$A'_i(t, \vec{x}) \equiv A_i(t, \vec{x}) - \partial_i \theta(t, \vec{x})$$

$$= A_i(t, \vec{x}) + \int d^3x' \theta(t, \vec{x}') \partial'_i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})$$

$$= A_i(t, \vec{x}) + \int d^3x' \theta(t, \vec{x}') \underbrace{\{A_i(t, \vec{x}), \vec{\nabla}' \cdot \vec{\Pi}(t, \vec{x}')\}_{\mathbb{P}}}_{\chi_2(t, \vec{x}') + J^0(t, \vec{x}')}$$

$$= A_i(t, \vec{x}) - \int d^3x' \theta(t, \vec{x}') \{ \chi_2(t, \vec{x}'), A_i(t, \vec{x}) \}_{\mathbb{P}},$$

y de manera similar,

$$A'_0(t, \vec{x}) \equiv A_0(t, \vec{x}) - \partial_0 \theta(t, \vec{x}) = A_0(t, \vec{x}) - \int d^3x' \dot{\theta}(t, \vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})$$

$$= A_0(t, \vec{x}) - \int d^3x' \partial_0 \theta(t, \vec{x}') \underbrace{\{A_0(t, \vec{x}), \Pi^\circ(t, \vec{x}')\}_{\mathbb{P}}}_{\chi_1(t, \vec{x}')}$$

$$= A_0(t, \vec{x}) + \int d^3x' \partial_0 \theta(t, \vec{x}') \{ \chi_1(t, \vec{x}'), A_0(t, \vec{x}) \}_{\mathbb{P}}.$$

En resumen,

$$A'_i(t, \vec{x}) = A_i(t, \vec{x}) - \int d^3x' \theta(t, \vec{x}') \left\{ \chi_i(t, \vec{x}'), A_i(t, \vec{x}') \right\}_P,$$

$$A'_0(t, \vec{x}) = A_0(t, \vec{x}) + \int d^3x' \partial_0 \theta(t, \vec{x}') \left\{ \chi_0(t, \vec{x}'), A_0(t, \vec{x}') \right\}_P.$$

Es importante notar aquí que, cuando nos concentramos en cantidades a tiempo constante, como lo hacemos en el formalismo hamiltoniano, los parámetros de transformación que aparecen arriba,  $\theta(t, \vec{x}')$  (o  $\partial_i \theta(t, \vec{x}')$ ) y  $\partial_0 \theta(t, \vec{x}')$ , son funciones independientes, así que en verdad **nuestro sistema tiene 2 invariancias locales**, una por cada restricción hamiltoniana ("de primera clase" — este es de hecho un resultado general). Esto es justamente una manifestación de la redundancia que descubrimos desde el principio de este capítulo: de las 4 componentes del campo vectorial  $A_\mu(x)$ , solamente  $2 = 4 - 2$  corresponden a grados de libertad físicos, que al cuantizar — como haremos en breve — estarán asociados a los estados de helicidad derecha e izquierda ( $\lambda = \pm 1$ ) de los fotones (partículas no masivas con espín 1).

[27: 12/10/18]

Desde la perspectiva Lagrangiana, el síntoma de que tenemos 2 constricciones es que el Lagrangiano es "singular" (o "irregular"),

$$\det \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu \partial \dot{A}_\nu} \right) = 0 \quad \left( \leftrightarrow \text{no podemos despejar } \dot{A}_\mu \text{ en términos de } \Pi^\mu \right),$$

debido a que la matriz  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu \partial \dot{A}_\nu}$  tiene 2 eigenvectores con eigenvalor cero. Y el síntoma de que tenemos invariancia de gauge ( $\leftrightarrow$  al menos alguna de las constricciones es "de primera clase"), es que la ec. de mov. de  $A_\mu$  junto con las condiciones iniciales  $A_\mu(t_0, \vec{x})$ ,  $\dot{A}_\mu(t_0, \vec{x})$  no determinan la solución  $A_\mu(t, \vec{x})$  de manera única:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \underbrace{(\delta_\nu^\rho \partial^2 - \partial^\rho \partial_\nu)}_{\text{operador diferencial}} A_\rho = J_\nu$$

operador diferencial no invertible, por culpa del autovector  $\partial_\rho \theta(x)$ , que tiene autovalor cero,

$$(\delta_\nu^\rho \partial^2 - \partial^\rho \partial_\nu) \partial_\rho \theta = \partial^2 \partial_\nu \theta - \partial^\rho \partial_\nu \partial_\rho \theta = 0 \text{ (cuya}$$

existencia hace entonces imposible encontrar una

función de Green  $G(x, x')$  tal que  $\Delta_x G(x, x') \propto \delta^{(4)}(x-x')$ .

Si  $A_\rho(x)$  es solución,  $A_\rho(x) - \partial_\rho \theta(x)$  también lo es.

Sabiendo que tenemos las 2 constricciones Hamiltonianas  $\Pi^0 = 0$ ,  $\vec{D} \cdot \vec{\Pi} - J^0 = 0$ , ¿cómo podemos llevar a cabo la cuantización Hamiltoniana? El método de paréntesis de Dirac que nos fue útil en las pp. 263-265 para lidiar con las constricciones ("de segunda clase") que teníamos en el caso del campo de Dirac desafortunadamente NO es implementable aquí (porque la definición de  $\{ \cdot, \cdot \}_D$  involucraría a  $\{ \chi_1, \chi_2 \}_D^{-1} = 1/0$ ), así que debemos encontrar algún otro procedimiento. Tanto  $\psi_a$  como  $A_\mu$  tienen de inicio más variables que grados de libertad físicos; pero la diferencia es que la ec. de mov. de  $\psi_a$  determina a las variables sobrantes, mientras que la ec. de mov. de  $A_\mu$  las deja vivas ( $\leftrightarrow$  invariancia de norma). Una opción entonces es eliminar por completo esta redundancia y cuantizar solamente los grados de libertad verdaderamente físicos. Es decir, imponemos a como Z condiciones adicionales que NO sean invariantes de norma, y especifiquen partiendo de una vez por todas y de manera única el  $A_\mu(x)$  que

queremos utilizar de entre todas las distintas posibilidades que hubieran estado emparentadas por transformaciones de norma. la figura representa de forma esquemática este procedimiento, que se conoce como "fijar la norma".

Después de este paso, nuestra descripción no tendrá ya invariancia

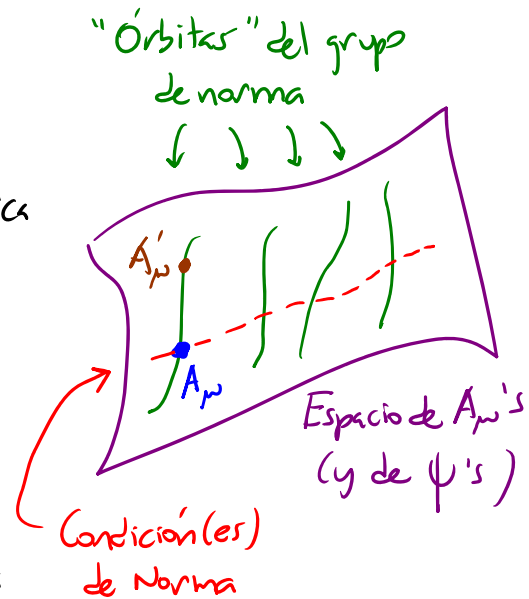
de norma y no habrá en la teoría resultante restricciones problemáticas (las 2 restricciones originales junto con las 2 condiciones de norma formarán un sistema de 4 restricciones "de segunda clase" —ninguna  $X_I$  'Poissoniza' con las otras 3).

Existen muchas maneras de fijar la norma; pero

como dijimos desde el principio de este capítulo, tristemente ninguna de ellas es covariante bajo Lorentz — este es entonces el precio que tenemos que pagar al seguir este camino.

L26 = 03/04/17

Las condiciones de norma más utilizadas son precisamente las que satisficen el operador de campo que armamos en la



p. 302:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad A^0 = 0$$

Norma de Coulomb (o transversal).

L@: 17/10/22

Esta norma tiene la virtud de que preserva la invariancia

bajo rotaciones (aunque claramente no bajo empujones).

Para ser más precisos, debemos notar que en presencia de una densidad de carga  $J^0 \neq 0$ , no es de hecho posible imponer simultáneamente estas 2 condiciones. El obstáculo es que

la construcción  $\chi_2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} - J^0 = 0$  equivale al anuncio

$$\underbrace{\partial_i F^{i0}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} = \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = -\vec{\nabla}^2 A^0 - \underbrace{\partial^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{\text{por norma de Coulomb}} = J^0,$$

ecuación diferencial de la que podemos deducir que

$$A^0(t, \vec{x}) = - \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') J^0(t, \vec{x}')$$

función de Green de  $\vec{\nabla}^2$ :  $\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$

$$= \int d^3x' \frac{J^0(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad \uparrow \text{si es invertible}$$

que reconocemos por supuesto como el potencial de Coulomb producido (de manera no local!) por la carga  $J^0(t, \vec{x}')$ .

$\hat{=}$  instantánea

Queda claro entonces que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow A^0 \neq 0$  si  $J^0 \neq 0$ .

Así que en el caso más general, la norma de Coulomb es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad A^0 = \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x}', t)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Lo importante es que, claramente, en esta descripción  $A^0$  no es un grado de libertad independiente.

Podemos fácilmente verificar que siempre es posible elegir la norma de Coulomb: comenzando con un  $A_\omega(x)$  arbitrario, la transformación de norma

$$A_\omega(x) \rightarrow A'_\omega(x) = A_\omega(x) - \partial_\omega \theta(x)$$

logra que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) + \vec{\nabla}^2 \theta(x) = 0$  si escogemos  $\theta(x)$  tal que

$$\vec{\nabla}^2 \theta(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x),$$

es decir, si usamos

$$\theta(t, \vec{x}) = -\int d^3x' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Habiendo fijado la norma de Coulomb, nos podemos olvidar por completo de  $\pi^0$  y  $A_0$ , y tenemos entonces

$$\underbrace{= 0}_{= 0} \quad \underbrace{= \int d^3x' \frac{J^0(t, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$



como variables en el espacio fase a  $\vec{A}(t, \vec{x})$  y  $\vec{\Pi}(t, \vec{x})$ ,  
sujetas a las 2 constricciones

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(t, \vec{x}) = J^0(t, \vec{x})}$$

$\uparrow$  Gauss (fijar norma)       $\uparrow$  Gauss (constricción)

solos 2  $A^i$  y 2  $\Pi^i$   
son independientes

que sí son análogas a las que tenemos en el caso  
de Dirac (no 'Poissonizan' entre sí  $\Rightarrow$  son "de segunda clase").

Quantizamos entonces promoviendo

$$\vec{A}(x), \vec{\Pi}(x) \longrightarrow \hat{\vec{A}}(x), \hat{\vec{\Pi}}(x)$$

$\swarrow$  espín-estadísticas

e imponiendo las relaciones de conmutación que se deducen  
a partir de los paréntesis de Dirac (ver p. 264),

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{A}_j(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\Pi}^i(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] , \\ [\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] &= i \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_j'} \left( \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &\equiv i \delta_{\perp}^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')_i^j \end{aligned}$$

$\swarrow$  expresión  
no local!

que por construcción son compatibles con las constricciones:

$$[\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] = \partial^i [\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] = 0$$

está dado por

$$\begin{aligned}
 [\vec{\nabla} \cdot \hat{A}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] &= \partial^i \left( i \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - i \partial_i \partial'^j \left( \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right) \\
 &= i \left( \partial^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') + \partial'^j \vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right) \\
 &= i \left( \partial^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - \partial'^j \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}) \right) \\
 &= 0, \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}_i(t, \vec{x}), \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \hat{\Pi}(t, \vec{x}')}_{\hat{J}^0(t, \vec{x}')}] &= \partial'_j [\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] \\
 &= i \left( \partial'_i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') + \partial_i \vec{\nabla}'^2 \left( \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right) \\
 &= 0. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Para el campo vectorial libre, la ec. de mov. es

$$\begin{aligned}
 0 = \partial^\mu F_{\mu\nu} &= \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu \\
 &= \partial^2 A_\nu - \partial_\nu (\cancel{\partial_0 A^0} + \cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}})
 \end{aligned}$$

en la norma de Coulomb, es decir, cada componente

de  $A_\nu(x)$  satisface la ec. de ondas = Klein-Gordon sin masa. Sabemos que la solución real más general a esta ecuación se puede expresar como la superposición

$$A^\omega(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} a^\omega(p) + e^{ip \cdot x} a^{\omega(p)*} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = |\vec{p}|}$$

donde los vectores  $a^\omega(p)$  serían de entrada arbitrarios.

Imponiendo además las condiciones de norma, requerimos que

$$\begin{aligned} A^0(x) = 0 \quad \forall x &\Rightarrow a^0(p) = 0 \quad \forall \vec{p}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0 \quad \forall x &\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{a}(p) = 0 \quad \forall \vec{p}. \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ condiciones} \\ \Rightarrow a^\omega(p) \\ \text{tiene 2 componentes} \\ \text{independientes} \end{array} \right.$$

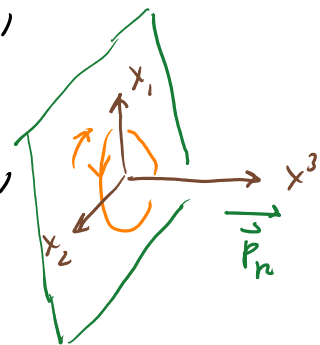
Podemos verificar que esto se cumple si usamos precisamente la forma de  $A^\omega(x)$  que teníamos en las páginas 302, 304:

$$a^\omega(p) \equiv a_{p\lambda} \varepsilon_{p\lambda}^\omega \equiv a_{p\lambda} L(p)^\omega{}_\nu \varepsilon_{p\lambda}^\nu,$$

2 números  $\rightarrow$   $\leftarrow$  2 vectores fijos

$$\text{con } \lambda = \pm 1, \quad p_R^\omega \equiv (1, 0, 0, 1), \quad \varepsilon_{p_R \pm 1}^\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$a_{p\lambda}$  arbitrarios y



$$\tilde{L}(p) \equiv \exp(i\varphi \tilde{J}^{(21)}) \exp(i\theta \tilde{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \tilde{J}^{(30)}) \quad (\text{ver p. 95})$$

$\leftarrow$  coords angulares de  $\vec{p}$        $\leftarrow$   $\sinh \alpha \equiv \frac{1}{2}(p^0 - \frac{1}{p^0})$

En efecto, con estas definiciones tenemos

$$\epsilon_{p\pm 1}^0 = \left[ \underbrace{\exp(i\eta \tilde{J}^{(21)}) \exp(i\theta \tilde{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \tilde{J}^{(33)})}_{L(p)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \right]^0 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{a}^0(p) = a_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^0(x) = 0 \quad \checkmark$$

y

$$-\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{p\lambda} = p^\mu \epsilon_{p\lambda}^\mu - \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{p\lambda} = p_\mu \epsilon_{p\lambda}^\mu$$

$$= (p_R)_\mu \epsilon_{p_R\lambda}^\mu = 1 \cdot \epsilon_{p_R\lambda}^0 - 1 \cdot \epsilon_{p_R\lambda}^3 = 0$$

$$p = L(p) p_R$$

$$\epsilon_{p\lambda} = L(p) \epsilon_{p_R\lambda}$$

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{a}(p) = a_{p\lambda} \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{p\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0. \quad \checkmark$$

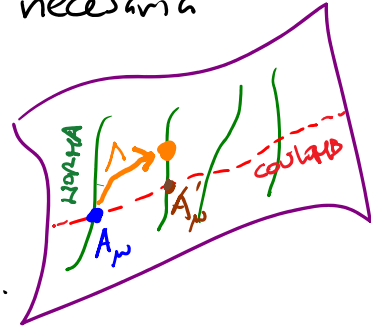
Al cuantizar, nuestro operador de campo toma entonces la forma esperada (p. 302): ← solo existen fotones transversos

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda}^\mu + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \epsilon_{p\lambda}^{\mu*} \right) \Big|_{p^0 = E_p = |\vec{p}|}$$

Por el hecho de que exigimos que las condiciones de norma  $\hat{A}^0(x) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \hat{A}(x)$  se cumplan en cualquier marco de referencia, es obvio que  $\hat{A}^\mu(x)$  NO transforma como un vector. En la página 308 vimos que de hecho

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\mu(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \hat{A}^\nu(\Lambda x) - \partial^\mu \hat{H}(x),$$

donde ahora entendemos que el término adicional representa a la transformación de norma necesaria para 'compensar' la regla de transformación vectorial, de tal modo que las condiciones de norma se sigan respetando.



Notemos ahora que la relación de conmutación básica

$$[\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^j(t, \vec{x}')] = i \delta_{\perp}^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')_i \quad j \equiv i \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x'^j} \left( \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

$$- \hat{F}^{0j}(t, \vec{x}') \equiv -\hat{A}^j(t, \vec{x}') + \partial^j \hat{A}^0(t, \vec{x}')$$

$$\underbrace{\partial^j \left( \int \frac{d^3 x''}{4\pi |\vec{x}' - \vec{x}''|} \hat{J}^0(t, \vec{x}'') \right)}_{\text{conmuta con } \hat{A}_i(t, \vec{x})}$$

implica que

$$[\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{A}^j(\vec{x}', t)] = i \delta_{\perp}^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')_i \quad j$$

← NO se anula fuerza del caso de luz

Tenemos además la relación de 'completez'

$$E_{P_{R\lambda}} E_{P_{R\lambda}}^{*T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -i \ 0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ i \ 0)$$

↑ sumar ↓

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que a su vez implica que

proyecta sobre subespacio perpendicular a  $\vec{P}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$

← implican que no hay componente temporal

$$\epsilon_{\rho\lambda}^{\mu\nu} \epsilon_{\rho\lambda}^{\alpha\beta} = \underbrace{\delta_i^\mu \delta_j^\nu}_{\text{proyector sobre subespacio perpendicular a } \vec{p}} \left( \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} \right) \equiv P^{\mu\nu}(\vec{p}) .$$

proyector sobre subespacio perpendicular a  $\vec{p}$

(Podemos verificar que, como es de esperarse,

$$P^{0\nu}(\vec{p}) = 0 = P^{\mu 0}(\vec{p}), \quad p_i P^{i\nu}(\vec{p}) = 0 = P^{\mu j}(\vec{p}) p_j . \quad \checkmark$$

Usando esta relación (análoga a, p.ej.,  $u_p^s \bar{u}_p^s = \not{p} + m$ ),

se puede comprobar que las relaciones de conmutación

básicas para el operador de campo se traducen en

$$\boxed{[\hat{a}_{p\lambda}, \hat{a}_{p'\lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}}$$

← Esto ya lo sabemos, porque partimos de ello al inicio de este capítulo

El Hamiltoniano clásico para el campo de Maxwell

en la norma de Coulomb es  $-\mathcal{L}_M$

$$H_M = \int d^3x \left[ \underbrace{\pi^i \dot{A}_i}_{E^i} + \underbrace{\frac{1}{4} (F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij})}_{\frac{1}{2} (-\vec{E}^2 + \vec{B}^2)} \right] \begin{matrix} F^{0i} = -E^i \\ F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k \end{matrix}$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad - \left( \begin{matrix} \text{energía} \\ \text{cinética} \end{matrix} - \begin{matrix} \text{energía} \\ \text{potencial} \end{matrix} \right)$$

energía cinética + energía potencial

o, en términos del potencial vectorial,

$$H_M = \int d^3x \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{A}}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right].$$

A nivel cuántico, esto se traduce en el resultado esperado

$$:\hat{H}_M: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\lambda} \quad \forall E_{\vec{p}} = |\vec{p}|.$$

Si acopláramos  $A_\mu(x)$  a campos cargados usando  $\mathcal{L}_{int} = -A_\mu J^\mu$   
 $(\Rightarrow H_{int} = +A_\mu J^\mu)$ , tendremos

$$H_M + H_{int} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \underbrace{\vec{\pi} \cdot \vec{\nabla} A_0}_{\text{Gauss}} + \underbrace{A_0 J^0 + A_i J^i}_{A_\mu J^\mu} \right]$$

*término en  $H_M$  que antes se anuló*

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} A_0 \stackrel{\text{Gauss}}{=} -J^0 A_0$$

donde ahora

$$\int d^3x \frac{1}{2} \vec{E}^2 = \int d^3x \frac{1}{2} (-\vec{\nabla} A^0 - \dot{\vec{A}})^2$$

*partes*

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \left[ -A^0 \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}}_{\text{Gauss}} + (\dot{\vec{A}})^2 - 2A^0 (\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}) \right]$$

*Por norma de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$*

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{E} + \dot{\vec{A}}) \stackrel{\text{Gauss}}{=} -J^0$$

*Coulomb*

de tal modo que

$$H_M + H_{int} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\dot{\vec{A}}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2) - \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{J}}_{\frac{1}{2} \vec{B}^2} + \frac{1}{2} A^0 J^0 \right].$$

Figuran aquí 2 partes cuclitativamente distintas:

$$H_M + H_{int} = \int d^3x \left[ \underbrace{\frac{1}{2} (\dot{\vec{A}}^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2)}_{\text{Expresión local}} - \vec{A} \cdot \vec{J} \right] + \frac{1}{2} \int d^3x \vec{A} \cdot \vec{J}^0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \int d^3x' d^3x \frac{J^0(\vec{x}', t) J^0(\vec{x}, t)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}}_{\text{Energía de Coulomb} \equiv H_{Coul}(t)}$$

¡Interacción instantánea!

La aparición de este término no local es parte del precio que pagamos por usar una descripción no manifiestamente covariante bajo Lorentz, donde  $A_0$  no se mantiene vivo como campo fluctuante. Regresaremos a este punto más adelante.

Podemos también calcular el propagador de Feynman para el campo de Maxwell libre en la norma de Coulomb,

$$M_{F,C}^{\mu\nu}(x'-x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{A}^\mu(x') \hat{A}^\nu(x) \} | 0 \rangle$$

término con  $\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$   
 se cancelan

$$= \theta(x'^0 - x^0) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip'x' + ipx}}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \sum_{p\lambda'} \epsilon_{p\lambda'}^{\mu*} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{p\lambda'}^\dagger \hat{a}_{p\lambda} | 0 \rangle}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(p'-p) \delta_{\lambda\lambda'}}$$

$$+ \theta(x^0 - x'^0) \left[ \begin{matrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ x' \leftrightarrow x \end{matrix} \right]$$

(denotado  $D_F^{\mu\nu}(x'-x)$  en algunos libros), que se simplifica a



$$M_{F,C}^{\mu\nu}(x'-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \theta(x'^0 - x^0) \frac{e^{-ip \cdot (x'-x)}}{2E_p} \underbrace{\epsilon_{\vec{p}\lambda}^\mu \epsilon_{\vec{p}\lambda}^{\nu*}}_{\mathcal{P}^{\mu\nu}(\vec{p})} + \theta(x^0 - x'^0) \frac{e^{ip \cdot (x'-x)}}{2E_p} \underbrace{\epsilon_{\vec{p}\lambda}^\nu \epsilon_{\vec{p}\lambda}^{\mu*}}_{\text{p. 348}} \right]$$

De manera análoga al caso escalar y espinorial, esto se puede reescribir en la forma (ver pp. 20-23)

$$M_{F,C}^{\mu\nu}(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \mathcal{P}^{\mu\nu}(\vec{p}) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \tilde{M}_{F,C}^{\mu\nu}(p).$$

$\mathcal{L}_{-m^2=0}$

28: 15/10/18

Notando además que

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(\vec{p}) \equiv \delta_i^\mu \delta_j^\nu \left( \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} \right) = -\eta^{\mu\nu} + \frac{p^0 (p^\mu \delta_0^\nu + p^\nu \delta_0^\mu) - p^\mu p^\nu - p^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu}{|\vec{p}|^2}$$

(donde es fácil comprobar que con la expresión de la derecha tenemos todavía  $\mathcal{P}^{00}(\vec{p}) = 0$ ,  $p_i \mathcal{P}^{i\nu}(\vec{p}) = 0$ ),

veamos entonces que

$$\tilde{M}_{F,C}^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \mathcal{P}^{\mu\nu}(\vec{p}) = \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[ -\eta^{\mu\nu} - \frac{p^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu}{|\vec{p}|^2} + \frac{p^\mu (p^0 \delta_0^\nu - p^\nu) + p^\nu p^0 \delta_0^\mu}{|\vec{p}|^2} \right].$$

Esta expresión es bastante fea, pero se le puede simplificar.

Como veremos 2 capítulos más adelante, al hacer cálculos perturbativos de amplitudes de dispersión, este propagador

libre aparecerá siempre multiplicado por corrientes, en

la forma



$$\int d^4x' d^4x J_\mu(x') \underbrace{M_{F,C}^{\mu\nu}(x'-x)}_{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \tilde{M}_{F,C}^{\mu\nu}(p)} J_\nu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_\mu(-p) \tilde{M}_{F,C}^{\mu\nu}(p) \tilde{J}_\nu(p),$$

Dado que (por invariancia de norma) estas corrientes se conservan,

$$\partial^\nu J_\nu(x) = \partial^\nu \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{J}_\nu(p) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} p^\nu \tilde{J}_\nu(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^\nu \tilde{J}_\nu(p) = 0,$$

esto nos permite ignorar en  $\tilde{M}_{F,C}^{\mu\nu}(p)$  todo término proporcional a  $p^\mu$  ó  $p^\nu$  (puesto que estos términos se anularán al contraer con  $\tilde{J}_\mu(p)$  y  $\tilde{J}_\nu(p)$ ).

Tenemos entonces la equivalencia

$$M_{F,C}^{\mu\nu}(x'-x) \simeq \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \left[ \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} - \frac{i p^\mu p^\nu}{p^2 |\vec{p}|^2} \right].$$

El primer término aquí es covariante bajo Lorentz; nos referiremos a él de ahora en adelante como  $M_F^{\mu\nu}(x'-x)$ .

$$\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[ -\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{|\vec{p}|^2} + \frac{p^\mu (p^\nu \delta_0^\nu - p^\nu) + p^\nu p^\mu \delta_0^\nu}{|\vec{p}|^2} \right]$$

El segundo término,

$$-\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x' - x)} \frac{i \delta_0^\mu \delta_0^\nu}{|\vec{p}|^2} = -i \delta(x'_0 - x_0) \delta_0^\mu \delta_0^\nu \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}}{|\vec{p}|^2}}_{\frac{1}{4\pi |\vec{x}' - \vec{x}|}},$$

al contrastarse con las corrientes  $J_\mu(x') J_\nu(x)$ , claramente

tendrá la misma estructura que la energía potencial de

Coulomb,  $H_{\text{Coul}}(t) \equiv \frac{1}{2} \int d^3 x d^3 x' \frac{J(\vec{x}, t) J(\vec{x}', t)}{4\pi |\vec{x}' - \vec{x}|}$  (p.350).

Tenemos entonces la descomposición

$$M_{F,c}^{\mu\nu}(x' - x) \simeq M_F^{\mu\nu}(x' - x) - M_{\text{Coul}}^{\mu\nu}(x' - x),$$

L27: 05/04/17

es decir, el propagador en la norma de Coulomb, que se

refiere por construcción solo a fotones con polarización

transversal ( $\Sigma_{p\lambda}^0 = 0 = p_i \Sigma_{p\lambda}^i = 0$ ), es igual a un propagador

covariante de Lorentz,  $M_F^{\mu\nu}(x' - x)$ , menos la contribución

que corresponde a la interacción instantánea de Coulomb.

Esta última se resta aquí porque ya había aparecido

explícitamente en  $H_{\text{int}}$ . Dicho a la inversa, a final de

cuentas resulta que es posible NO incluir la energía de Coulomb  $H_{\text{Coul}}(t)$  en  $H_{\text{int}}(t)$ , y SÍ en el propagador, lo cual equivale a reemplazar

$$M_{FC}^{\mu\nu}(x'-x) \rightarrow M_F^{\mu\nu}(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \underbrace{\left( \frac{-i \mathcal{M}^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \right)}_{\equiv \tilde{M}_F^{\mu\nu}(p)}.$$

Así que, al final de este tortuoso camino, a nivel de predicciones físicas recuperamos la covariancia bajo Lorentz, que como hemos visto, en pasos intermedios está muy escondida al trabajar en la norma de Coulomb — o en cualquier otra norma que elimine toda la redundancia.

[31: 24/10/22

Claramente nos conviene tener un método alternativo para cuantizar que SI sea manifiestamente covariante. Sabemos de antemano que el precio que tendremos que pagar es que en nuestra descripción cuántica habrá elementos redundantes, no físicos.

Lo que queremos hacer por este camino es eliminar tanto de la redundancia como nos es posible sin perder

La covariancia, imponiendo la condición

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu(x) = 0} \quad \text{Norma de Lorentz (o de Lorenz)}$$

Esta se puede pensar como una generalización covariante de la condición de norma de Coulomb,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  (aunque a diferencia de esta, No tiene la forma de una "norma canónica", puesto que al introducir a  $\dot{A}^0$ , no establece una relación entre las variables del espacio fase  $(A_\mu, \pi^\mu)$ ).

Dado un  $A_\mu(x)$  arbitrario, la transformación de norma

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad \text{con} \quad \partial^2 \theta(x) = \partial_\mu A^\mu(x)$$

nos permite satisfacer la condición de Lorentz  $\partial_\mu A'^\mu = 0$ .

La solución siempre existe, pero No es única: dado un  $A_\mu(x)$  en la norma de Lorentz, tenemos todavía la libertad de realizar transformaciones de norma con  $\theta(x)$  tal que  $\partial^2 \theta(x) = 0$ , es decir, con  $\theta(x)$  cualquier combinación lineal de  $e^{ip \cdot x}$  y  $e^{-ip \cdot x}$  con  $p^0 = |p|$ .

Esto nos indica que even después de imponer la norma de Lorentz (1 sola condición), todavía habrá redundancia.

Aprovechando que la condición de Lorentz es escalar, podemos incorporarla directamente a nivel de la acción, modificando la acción con la adición de un término " fijador de norma " ("gauge-fixing term"),

$$S_M \rightarrow S_{M,L} \equiv -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x J (\partial_\omega A^\omega)^2$$

$\int$  aquí es un multiplicador de Lagrange: su ec. de mov. ← independiente de  $x^\omega$

no restringe a  $J$ , sino que impone precisamente la condición deseada  $\partial \cdot A(x) = 0 \forall x$ . Claramente  $S_M$  y  $S_{M,L}$  serán (al menos clásicamente) equivalentes siempre y cuando el campo de norma satisfaga la condición de Lorentz.

Pero es importante notar que a diferencia de  $\mathcal{L}_M$ ,  $\mathcal{L}_{M,L}$  sí incluye a  $\dot{A}^0$ , de manera que los momentos canónicos que se calculan a partir de  $\mathcal{L}_{M,L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} J (\partial_0 A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2$ ,

$$\pi^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{M,L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu} - J \delta_0^\mu \partial \cdot A = \begin{cases} -J \partial \cdot A & \text{para } \mu=0 \\ E^i & \text{para } \mu=i \end{cases}$$

No están construidos mientras no imponemos  $\partial \cdot A = 0$ .

Cambiando de estrategia, podemos entonces primero cuantizar y después imponer (de alguna manera) la condición de Lorentz.

Es decir, cambiaremos temporalmente a una teoría con más grado de libertad, y veremos cómo reducir a nivel cuántico.

La ec. de mov. es ahora  $\mathcal{L}_{M,L} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} J(\partial_\mu A^\mu)^2$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_{M,L}}{\delta A_\mu(x)} &= \underbrace{\partial_\nu F^{\nu\mu}(x)}_{\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu} + \int \partial^\mu (\partial \cdot A(x)) \\ &= \partial^2 A^\mu - (1-\mathcal{J}) \partial^\mu (\partial \cdot A) \\ &= \underbrace{(\delta^\mu_\nu \partial^2 - (1-\mathcal{J}) \partial^\mu \partial_\nu)}_{\equiv \Delta_x^\mathcal{J}} A^\nu = 0, \end{aligned}$$

Ya no lo consideramos como multiplicador de Lagrange (no imponemos su ec. de mov.), sino que le damos un valor fijo.

que por supuesto se reduce a la ec. de Maxwell si  $\mathcal{J}=0$ ,

y a la ec. de Maxwell  $\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu(x)} = 0$  en la norma de

Lorentz si  $\partial \cdot A = 0$ . Pero para  $\mathcal{J} \neq 0$ , el operador diferencial

$\Delta_x^\mathcal{J}$  sí es invertible: no hay ya ambigüedad en las soluciones.

De aquí en adelante, las expresiones que obtengamos en pasos

intermedios contendrán al "parámetro fijo de norma"  $\mathcal{J}$ ,

pero por supuesto los resultados físicos no pueden depender ← después de imponer  $\partial \cdot A = 0$

de nuestra elección del valor de  $\mathcal{J}$ . La libertad que

tenemos para escoger  $J$  está relacionada con la redundancia remanente. Por simplicidad, fijaremos aquí  $J=1$ , conocida como la "norma de Feynman", donde la ec. de mov. se reduce a la ec. de ondas,  $\partial^2 A^\mu = 0$ . (Otra elección común es la "norma de Landau"  $J \rightarrow \infty$ .)

Tenemos entonces los momentos canónicos (p. 356)

$$\begin{cases} \Pi^0 = -\partial \cdot A = -\dot{A}^0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} & \leftarrow -J \partial \cdot A \\ \vec{\Pi} = \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} A^0 \end{cases},$$

y, por no tener de entrada ninguna restricción, podemos cuantizar simplemente promoviendo

$$A_\mu(x), \Pi^\mu(x) \longrightarrow \hat{A}_\mu(x), \hat{\Pi}^\mu(x)$$

e imponiendo las relaciones de conmutación habituales

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \vec{x}')] &= i \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{A}_\nu(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\Pi}^\mu(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \vec{x}')] \end{aligned}.$$

Dado que  $\hat{\Pi}^0 = -\dot{\hat{A}}^0 - \partial_i \hat{A}^i$ ,  $\hat{\Pi}^i = -\dot{\hat{A}}^i + \partial_i \hat{A}^0$ , estas relaciones de conmutación implican juntos que



$\delta_{\mu\nu}^V$  con índice  $\mu$  subido

$$[\hat{A}^\mu(t, \vec{x}), \hat{A}^\nu(t, \vec{x}')] = -i\eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

Vemos aquí que cada componente espacial  $\hat{A}^i(\vec{x}, t)$  satisface exactamente las mismas relaciones de conmutación que el campo de Klein-Gordon real ( $[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ ), pero las de  $\hat{A}^0(\vec{x}, t)$  tienen el signo opuesto.

Podemos desarrollar al operador de campo en términos de un conjunto completo de soluciones a la ec. de mov.  $\partial^2 \hat{A}^\mu = 0$  (sin restricciones adicionales),

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda}^\mu + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \epsilon_{p\lambda}^{\mu*} \right) \Big|_{p^0 = E_p = |\vec{p}|}$$

donde ahora necesitamos que los vectores de polarización  $\epsilon_{p\lambda}^\mu$  formen un conjunto completo de cuatro vectores, así que podemos tomar  $\epsilon_{p\lambda}^\mu \equiv L(p)^\mu{}_\nu \epsilon_{p_R^\nu}^\lambda$  con  $p_R^\mu \equiv (1, 0, 0, 1)$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ,

$$\epsilon_{p_R^0}^\mu \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{p_R^1}^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{p_R^2}^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{p_R^3}^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\uparrow$  Polarización transversal lineal

o si preferimos,  $\lambda = 0, +1, -1, 3$  con

$$\epsilon_{p_0}^\omega \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{p_{\pm 1}}^\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{p_{\pm 2}}^\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{p_3}^\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Polarización  
"temporal" o "escalar"  
(bajo rotaciones)

Polarización  
transversal circular  
(derecha e izquierda, resp.)

Polarización  
longitudinal

Estos vectores son ortonormales,

$$\epsilon_{p_R \lambda} \cdot \epsilon_{p_R \lambda'}^* = \epsilon_{p_R \lambda}^\omega \epsilon_{p_R \lambda'}^{\nu*} \eta_{\omega\nu} = \eta_{\lambda\lambda'}$$

$$\stackrel{L(p)}{\Rightarrow} \boxed{\epsilon_{p\lambda} \cdot \epsilon_{p\lambda'}^* = \eta_{\lambda\lambda'}}$$

← Notar que  
ahora  $\lambda$  es  
un índice vectorial

y satisfacen la relación de completitud

$$\eta^{\lambda\lambda'} \epsilon_{p_R \lambda}^\omega \epsilon_{p_R \lambda'}^{\nu*} = \eta^{\omega\nu} \stackrel{L(p)}{\Rightarrow} \boxed{\eta^{\lambda\lambda'} \epsilon_{p\lambda}^\omega \epsilon_{p\lambda'}^{\nu*} = \eta^{\omega\nu}}$$

Podemos notar además que

$$p_R \cdot \epsilon_{p_R \lambda} = 0 \Rightarrow p \cdot \epsilon_{p\lambda} = 0 \quad \text{para } \lambda = 1, 2 \text{ (ó } +1, -1),$$

$$p_R \cdot \epsilon_{p_0} = 1 = -p_R \cdot \epsilon_{p_3} \Rightarrow p \cdot \epsilon_{p_0} = 1 = -p \cdot \epsilon_{p_3}.$$

Con esta descomposición para  $\hat{A}^\mu(x)$ , podemos deducir que

$$[\hat{a}_{p\lambda}, \hat{a}_{p'\lambda'}^\dagger] = -\eta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

La aparición de  $\eta_{\lambda\lambda'}$  del lado derecho (inevitable por covariancia bajo Lorentz) hace que tengamos aquí los conmutadores con el signo usual para  $\lambda=i$ , pero con el signo "equivocado" para  $\lambda=0$ .  $\leftarrow$  consecuencia de  $\mathcal{L}_{Mink} \supset -\frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 \supset -\frac{1}{2}(\dot{A}^0)^2$

Definiendo al vacío  $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_{p\lambda}|0\rangle = 0 \quad \forall p, \lambda$ , esto implica que cualquier estado con un número impar de fotones polarizados temporalmente tiene norma negativa!!

P.ej., la norma de  $\hat{a}_{p_0}^\dagger|0\rangle$  es

$$\langle 0 | \hat{a}_{p_0} \hat{a}_{p_0}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \underbrace{[\hat{a}_{p_0}, \hat{a}_{p_0}^\dagger]}_{-\eta_{00} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})} | 0 \rangle = - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \langle 0 | 0 \rangle < 0.$$

Pareciera que para solucionar este problema debiéramos simplemente renombrar  $\hat{a}_{p\lambda}^0 \leftrightarrow \hat{a}_{p\lambda}^{0\dagger}$ , pero hacer esto no sería covariante bajo Lorentz. Además, a partir de la

densidad Hamiltoniana clásica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{M,L} &\equiv \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}_{M,L} \\
 &= -(\dot{A}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \dot{A}^0 + (\vec{A} + \vec{\nabla} A^0) \cdot \dot{\vec{A}} + \frac{1}{2} \left[ -(\dot{A} + \vec{\nabla} A^0)^2 + (\vec{\nabla}_\times \vec{A})^2 + (\dot{A}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2 \right] \\
 &= -(\dot{A}^0)^2 - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \dot{A}^0 + (\dot{\vec{A}})^2 + \vec{\nabla} A^0 \cdot \dot{\vec{A}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\dot{A}^0)^2 + \dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A^0 - \frac{1}{2} (\dot{\vec{A}})^2 - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} A^0 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} A^0)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}_\times \vec{A})^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ (\dot{A}^0)^2 + (\vec{\nabla} A^0)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (\dot{\vec{A}})^2 + \vec{\nabla} A^0 \cdot \vec{\nabla} A^0 \right] \\
 &\quad \uparrow \text{cf. KG } \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + \vec{\nabla} \varphi^2)
 \end{aligned}$$

(que ahora sí es local) se obtiene el operador Hamiltoniano

$$\hat{H}_{M,L} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left( -\hat{a}_{p_0}^\dagger \hat{a}_{p_0} + \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_1} + \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_3}^\dagger \hat{a}_{p_3} \right).$$

Aquí vemos que, independientemente de si renombramos  $\hat{a}_{p_0}^\dagger \leftrightarrow \hat{a}_{p_0}$  o no, ¡¡ los fotones "temporales" tienen energía negativa !!

La razón por la cual estamos obteniendo esta física absurda (probabilidades y energías negativas) es por supuesto el hecho de que no hemos impuesto aún la condición de Lorentz  $\partial \cdot A = 0$  (necesaria en particular para recuperar  $\mathcal{L}_M$ ). El punto es que, por no haber eliminado la redundancia antes de cuantizar, nuestro operador de campo  $\hat{A}^\mu(x)$  carga con

Componentes innecesarias, y como resultado de ello,  
No todos los estados en nuestro espacio de Fock son físicos.  
 Es importante notar aquí que para eliminar la redundancia  
no podemos simplemente pedir que  $\partial_\mu \hat{A}^\mu(x) = 0$ ,  
 porque entonces tendríamos  $\hat{\Pi}^0 = -\partial \cdot \hat{A} = 0$ , lo cual es  
 incompatible con la relación de conmutación  $[\hat{A}_0, \hat{\Pi}^0] \neq 0$ .  
 Así que, por esta ruta donde insistimos en preservar la  
 covariancia de Lorentz de manera manifiesta, nos vemos  
 irremediablemente obligados a trabajar con un espacio  
 de Fock redundante  $\mathcal{H}$ , que contiene estados incesarios.

Necesitamos entonces una manera de distinguir dentro de  
 este espacio los estados que sí son físicos. Esto se logra  
 imponiendo la condición de Lorentz a nivel de elementos  
 de matriz: definiremos el subespacio de estados físicos  
 $\mathcal{H}_{\text{fis}} \subset \mathcal{H}$  como el conjunto máximo de estados  $|\text{fis}\rangle \in \mathcal{H}$   
 que satisfacen  $\langle \text{fis}' | \partial \cdot \hat{A}(x) | \text{fis} \rangle = 0 \quad \forall |\text{fis}\rangle, |\text{fis}'\rangle \in \mathcal{H}_{\text{fis}} \quad \forall x$ ,  
 es decir, aquellos estados en los que la porción redundante

de  $\hat{A}_\mu(x)$  es invisible. Es importante notar que  $\mathcal{H}_{\text{fis}}$  definido de esta manera (no solo mirando valores esperados) en verdad es un espacio vectorial:  $\alpha|\text{fis}\rangle + \beta|\text{fis}'\rangle = |\text{fis}''\rangle$ .

L29: 17/10/18

Descomponiendo a  $\partial \cdot \hat{A}(x)$  en sus porciones de frecuencias positiva y negativa,

$$\partial \cdot \hat{A}(x) = \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} p_\mu \epsilon_{p\lambda}^\mu}_{\equiv [\partial \cdot \hat{A}(x)]_+} + \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger p_\mu \epsilon_{p\lambda}^{\mu*}}_{\equiv [\partial \cdot \hat{A}(x)]_- = [\partial \cdot \hat{A}(x)]_+^\dagger}$$

veamos que la condición

$$\langle \text{fis}' | \partial \cdot \hat{A} | \text{fis} \rangle = \langle \text{fis}' | ([\partial \cdot \hat{A}]_+ + [\partial \cdot \hat{A}]_-) | \text{fis} \rangle = 0 \quad \forall |\text{fis}'\rangle, |\text{fis}\rangle$$

operadores de  
aniquilación

operadores de  
creación

equivale a definir  $\mathcal{H}_{\text{fis}}$  a través de

$$[\partial \cdot \hat{A}(x)]_+ | \text{fis} \rangle = 0 \quad \forall x$$

Condición de  
Gupta-Bleuler

Recordando que  $p_\mu \epsilon_{p1}^\mu = 0 = p_\mu \epsilon_{p2}^\mu$ ,  $p_\mu \epsilon_{p0}^\mu = 1 = -p_\mu \epsilon_{p3}^\mu$ ,

p. 360

podemos deducir que

$$\begin{aligned}
 (\partial \cdot \hat{A}(x))_+ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \underbrace{\hat{a}_{p\lambda} p \cdot \epsilon_{p\lambda}}_{\hat{a}_{p0} p \cdot \epsilon_{p0} + \hat{a}_{p1} p \cdot \epsilon_{p1} + \hat{a}_{p2} p \cdot \epsilon_{p2} + \hat{a}_{p3} p \cdot \epsilon_{p3}} \\
 &= \hat{a}_{p0} - \hat{a}_{p3}
 \end{aligned}$$

así que en espacio de momento la condición de Gupta-Bleuler se traduce en

$$(\hat{a}_{p0} - \hat{a}_{p3}) |f\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$$

(a pesar de que, en  $\mathcal{H}$  completo,  $\hat{a}_{p0} \neq \hat{a}_{p3}$   
 $\leftrightarrow \partial \cdot \hat{A} \neq 0$ )

$$\underbrace{\quad}_{\equiv \hat{L}_p}$$

$$(\Rightarrow \langle f | \hat{L}_p^\dagger = 0 \quad \forall \vec{p} ) .$$

Esta es entonces la manera en que podemos "fijar la norma de Lorentz" después de cuantizar. Pero recordemos que, aún a nivel clásico, la condición de Lorentz no elimina toda la redundancia (p. 355). ¿Cómo se manifiesta esto a nivel cuántico? El punto es que cualquier estado del tipo

$$\hat{L}_p^\dagger |\text{algo}\rangle = (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger) |\text{algo}\rangle$$

es automáticamente ortogonal a todos los estados físicos,

$$\langle \text{fís} | (\hat{L}_p^\dagger |\text{algo}\rangle) = (\langle \text{fís} | \hat{L}_p^\dagger) |\text{algo}\rangle = 0 \quad \forall |\text{fís}\rangle.$$

Estados en  $\mathcal{H}$  que tienen esta forma se conocen por tanto como estados espurios. Si un estado es espurio y físico entonces es en particular ortogonal a sí mismo, es decir,

$$\text{tiene norma cero: } (\langle \text{algo} | \hat{L}_p^\dagger) \underbrace{(\hat{L}_p^\dagger |\text{algo}\rangle)}_{|\text{fís}\rangle} = 0.$$

Llamamos a estos estados nulos. Claramente estos estados, a pesar de ser físicos, no pintan: el estado  $|\text{fís}\rangle + |\text{nulo}\rangle$  tiene exactamente el mismo traslape que  $|\text{fís}\rangle$  con todos los estados físicos.

Así que, siendo más precisos, nuestro verdadero espacio de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{\text{fís}}$  consiste de estados físicos sujetos a la relación de equivalencia

$$|\text{fís}\rangle \simeq |\text{fís}'\rangle \quad \text{si} \quad |\text{fís}'\rangle = |\text{fís}\rangle + |\text{nulo}\rangle.$$



(Formalmente,  $\mathcal{H}_{\text{fís}} \equiv \mathcal{H}_{\text{fís}} / \simeq$  es entonces el conjunto de clases de equivalencia  $[|\text{fís}\rangle] \equiv \{|\text{fís}'\rangle \mid |\text{fís}'\rangle \simeq |\text{fís}\rangle\}$ .)

L28: 07/04/17

Es posible mostrar que esta equivalencia corresponde justamente a la invariancia de norma remanente

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \theta(x) \text{ con } \theta(x) \text{ tal que } \partial^2 \theta(x) = 0$$

[ver, p.ej., Greiner Sec 7.4, ejercicio 7.2]. Es decir,

$|\text{fís}'\rangle = |\text{fís}\rangle + |n_{\text{ulo}}\rangle$  es una transformación de norma implementada a nivel cuántico.

Llegados a este punto, el método de Gupta-Bleuler nos ha permitido eliminar la redundancia por completo a nivel cuántico, así que no debemos tener ya problemas ni de probabilidades ni de energías negativas, ¡porque estaríamos en serios aprietos! Felizmente,

i) En un estado físico,  $\hat{a}_{p_0}^{\dagger}$  solo puede aparecer en una combinación del tipo  $(\hat{a}_{p_0}^{\dagger} - \hat{a}_{p_3}^{\dagger})^N |0\rangle$ , ← arbitrario porque solo así se satisface la condición de Gupta-Bleuler:

$$\hat{L}_p (\hat{a}_{p_0}^{\dagger} - \hat{a}_{p_3}^{\dagger})^N |0\rangle = \left[ (\hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}), (\hat{a}_{p_0}^{\dagger} - \hat{a}_{p_3}^{\dagger})^N \right] |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \left[ \hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}, \hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger \right] (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} + (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger) \left[ \hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}, (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} \right] \right) |0\rangle \\
&= \dots = N \left[ \hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}, \hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger \right] (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} |0\rangle \\
&= N \left( \underbrace{\left[ \hat{a}_{p_0}, \hat{a}_{p_0}^\dagger \right]}_{\substack{\text{p. 361} \\ -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})}} + \underbrace{\left[ \hat{a}_{p_3}, \hat{a}_{p_3}^\dagger \right]}_{+(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})} \right) (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} |0\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Y como además sucede que esta combinación es nula,

$$(\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^N |0\rangle = \hat{L}_p^\dagger \left( \hat{L}_p^{\dagger N-1} |0\rangle \right),$$

su norma no es negativa sino cero (y en cualquier caso, la relación de equivalencia dice que este estado es irrelevante,  $(\hat{L}_p^\dagger)^N |0\rangle \approx 0$ ).

En  $\mathcal{H}_{\text{Fís}}$ , entonces, no hay estados con normas negativas. ✓

ii) Si consideramos la combinación específica de los operadores de creación (aniquilación temporal y longitudinal) que aparece en el Hamiltoniano (p. 362),

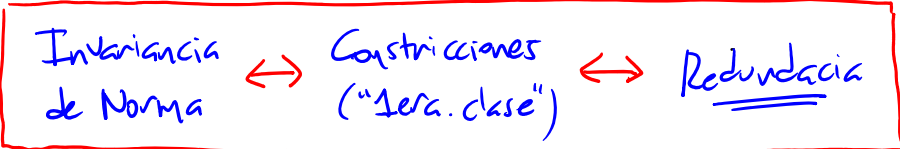
$$:\hat{H}_{M,L}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left( -\hat{a}_{p_0}^\dagger \hat{a}_{p_0} + \hat{a}_{p_3}^\dagger \hat{a}_{p_3} + \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_1} + \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} \right),$$

y calculamos su elemento de matriz entre estados físicos



# MAXWELL

Virtud/  
Problema:



Opción 1: Eliminar redundancia y después cuantizar

Fijar norma de Coulomb  $\downarrow$   $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$   
 $A^0 = 0$  (o determinada por  $J^0$ )

$A^0, \pi^0$  no son independientes  
 $\vec{A}, \vec{\pi}$  sujetos a 2 constricciones (de "2da. clase")

$\Rightarrow$  Campo con 2 grados de libertad en cada punto

Cuantizar  $\downarrow$  (con paréntesis de Dirac)

2 pares de  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ :  
 Fotones con polarización transversal ( $\lambda = +1, -1$ ) ✓

Ventaja: solo variables físicas.

Desventajas: no manifiestamente covariante bajo Lorentz.

Opción 2: Cuantizar y después eliminar redundancia

Cambiar teoría  $\downarrow$   $\mathcal{L}_M \rightarrow \mathcal{L}_M - \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2$

Maxwell modificada (familia de teorías parametrizada por  $\lambda$ ):  
 ¡SIN constricciones!

$\Rightarrow$  campo con 4 grados de libertad en cada punto

Cuantizar  $\downarrow$  (con paréntesis de Poisson)

4 pares de  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ :  
 Fotones con polarización transversal, longitudinal, temporal

✗ Energía/norma negativa  $\uparrow$

Identificar estados físicos para regresar a Maxwell  $\downarrow$   
 $(\partial \cdot \hat{A})_+ |fís\rangle = 0 \leftrightarrow \partial \cdot A = 0$   
 $|n_0\rangle \geq 0 \leftrightarrow A_\mu \approx A_\mu - \partial_\mu \theta$  con  $\partial^2 \theta = 0$

2 pares de  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ :  
 Fotones con polarización transversal ( $\lambda = +1, -1$ ) ✓

Ventaja: Covariancia bajo Lorentz es manifiesta

Desventaja: espacio de Fock con estados no físicos

Podemos, por último, calcular el propagador de Feynman para el campo de Maxwell en la norma de Lorentz (+Feynman)

$$\begin{aligned}
 M_F^{\mu\nu}(x'-x) &\equiv \langle 0 | T \{ \hat{A}^\mu(x') \hat{A}^\nu(x) \} | 0 \rangle \quad \begin{array}{l} \nearrow \partial \cdot A = 0 \\ \nearrow J = 1 \end{array} \\
 &= \Theta(x'^0 - x^0) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i p' \cdot x' + i p \cdot x}}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^\mu \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\nu*} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{p'\lambda'}^\dagger \hat{a}_{p\lambda} | 0 \rangle}_{\substack{\text{p.361} \\ -\eta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})}} \\
 &\quad + \Theta(x^0 - x'^0) \left[ \begin{array}{l} x' \leftrightarrow x \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right] \\
 &= \Theta(x'^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i p \cdot (x' - x)}}{2E_p} \underbrace{\left( -\eta^{\lambda\lambda'} \sum_{\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^\mu \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\nu*} \right)}_{-\eta^{\mu\nu} \text{ (ver p. 360)}} + \Theta(x^0 - x'^0) \left[ \begin{array}{l} x' \leftrightarrow x \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

que como en las pp. 20-23 se puede reescribir en la forma

$$M_F^{\mu\nu}(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot (x' - x)} \frac{-i \eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Este resultado coincide con la parte covariante bajo Lorentz del propagador  $M_{FC}^{\mu\nu}(x'-x)$  que obtuvimos en la norma de Coulomb (ver p. 351). Sabemos que la diferencia entre ambos se debe a que  $M_{FC}^{\mu\nu}(x'-x)$

únicamente describe la propagación de fotones transversales,  
 mientras que  $M_F^{\mu\nu}(x'-x)$  incorpora además fotones longitudinales  
 y temporales. Es entonces gracias a estos ingredientes no físicos  
 que logramos preservar la covariancia manifiesta bajo Lorentz.

Por completez, vale la pena señalar que existe una  
 versión más sistemática de este procedimiento de  
 cuantización covariante, conocida como cuantización BRST  
 (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin), que resulta prácticamente  
 indispensable en el caso del campo de norma no abeliano.

Un formalismo aún más general es Batalin-Vilkovisky ( $\leftrightarrow$  "anticampo").  
 Para BRST y BV, ver Weinberg II, 15.7-15.9, o Henneaux & Teitelboim.

Otro punto que conviene aclarar es la relación  
 y distinción entre la invariancia global y local U(1) que  
 hemos analizado a este capítulo. Claramente

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta(x)} \psi(x)$$

tiene como caso particular  $\theta(x) = \theta$  constante,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) \quad , \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i q \theta} \psi(x) .$$

Pero hay una distinción importante: esta transformación global cambia las condiciones de frontera (en infinito) de nuestro campo. Si bien en este curso normalmente no nos deteneremos mucho a pensar en las condiciones de frontera, su especificación es importante para tener un principio variacional bien definido (y para todas las veces que hemos integrado por partes). Por esta razón, solo  $\theta(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$  es una redundancia, mientras que la parte global es una verdadera simetría ( $\leftrightarrow$  corriente de Noether).

Antes de terminar con este capítulo, analizaremos siquiera brevemente lo que sucede en el caso de un campo vectorial masivo.

Si simplemente agregamos un término de masa a  $\mathcal{L}_M$ , obtenemos

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

Lagrangiano de Proca ,

$$\mathcal{L}_p = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

que evidentemente No es invariante de norma.  $\Rightarrow -\frac{1}{4} F^2$  ya no es obligatorio

Si este campo se acopla linealmente a otros campos  $\psi(x)$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_\psi \quad \text{con } \mathcal{L}_{int} = -A_\mu J^\mu,$$

$\uparrow$  corriente construida  
en  $\psi$ 's

su ec. de mov. será la ecuación de Proca

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu(x)} = \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^\nu(x) - J^\nu(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial \cdot A) + m^2 A^\nu = J^\nu.$$

Tomando la divergencia obtenemos  $m^2 \partial \cdot A = \partial \cdot J$ , que se anula en el caso libre ( $J=0$ ) o si  $J$  se conserva ( $\partial \cdot J=0$ ). Así que en este caso la condición de Lorentz,  $\partial \cdot A=0$ , será automática. ya no es obligatorio

Aparecen 2 constricciones,  $\pi^0=0$  (de la definición del momento)

$$\text{y } A^0 = \frac{1}{m^2} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + J^0) \quad (\text{de la ec. de mov. de } A_0)$$

(de "segunda clase", como era de esperarse), que sirven directamente para eliminar del formalismo a  $\pi^0, A_0$ .

Cuantizamos entonces solo a las variables independientes  $\vec{A}, \vec{\pi}$ ,

imponiendo las relaciones de conmutación ordinarias

$$[\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{\pi}^j(t, \vec{x}')] = i \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{y } [\hat{A}, \hat{A}] = 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]).$$

De aquí obtendremos los estados esperados para partículas masivas:

con espín 1: polarizaciones transversales ( $\lambda = \pm 1$ ) y longitudinal ( $\lambda = 0$ ). ahora sí es física

[30: 19/10/18]



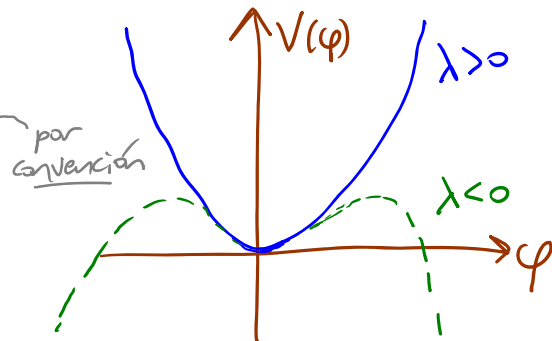
## 5. Interacciones y Expansión Perturbativa

Sabemos ya muy bien cómo cuantizar campos libres.

Para tener campos interactuantes, agregaremos al Lagrangiano terminos cúbicos o más altos ( $\leftrightarrow$  eqs. de mov. no lineales). Como veremos, el efecto de esto no será solamente agregar interacciones entre las partículas, sino también cambiar la definición misma de cada partícula en relación al campo, básicamente por la posibilidad de que las partículas tengan autointeracciones.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término "Cinético"} \text{ (ver p. 188)}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi) \text{ Energía Potencial}}$$

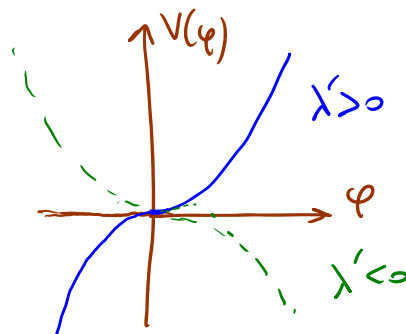


En la figura podemos ver que si  $\lambda \geq 0$ , la configuración donde el campo tiene un valor de fondo  $\varphi(x)=0 \forall x$  representa un 'vacío' estable; pero si  $\lambda < 0$ ,  $\varphi=0$  es apenas metaestable, y no existe en realidad ningún vacío estable. Tomaremos  $\lambda \geq 0$ .

(De manera similar, podemos ver que en un término del tipo  $-\frac{\lambda'}{3!}\varphi^3$  en  $\mathcal{L}$

no habría ningún vacío estable, a menos que incluyéramos también un

término cuártico. En este sentido, la teoría interactiva se simplifica más sencilla es solo incluir  $\varphi^4$ .)



El parámetro  $\lambda$ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como la constante de acoplamiento, o el acoplamiento, o el acople (en inglés, "coupling constant" o solo "coupling").

Vale la pena notar que, dado que la acción

$$S = \int d^d x \mathcal{L} = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right)$$

debe ser adimensional, en 3+1 dim debemos tener  $[\mathcal{L}] = M^4$ ,

lo cual a partir del término cinético implica que  $[\varphi] = M^1$ ,

y en el término de interacción vemos entonces que  
 $[\lambda] = M^0$ : la constante de acoplamiento en esta  
 "teoría  $\varphi^4$ " (en 3+1 dim) resulta ser adimensional.

El momento canónico conjugado a  $\varphi(x)$  sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad \text{y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \quad (\text{en el cuadro de Heisenberg})$$

con las reglas de conmutación usuales

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')} ] &= i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}), \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]. \end{aligned}}$$

Pero la ec. de Heisenberg para  $\hat{\varphi}(x)$  (que coincide con la ec. de m.p.v. clásica)

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!} \hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y  $\hat{\varphi}(x)$  No puede ya expresarse como

una combinación lineal de ondas planas con coeficientes  $\hat{a}_p$  y  $\hat{a}_p^\dagger$ .

Por otro lado, si las interacciones son débiles ( $\Leftrightarrow \lambda \ll 1$ ), esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar con una expansión perturbativa en potencias de  $\lambda$ , que tengamos como punto de partida al campo libre ( $\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}}$ ).

Notando que podemos separar al Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]}_{\equiv H_0 \quad \text{contribución dominante}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \quad \text{contribución subdominante}},$$

como paso inicial nos conviene definir un cuadro en

donde el operador de campo y todos los operadores

evolucionen no con  $\hat{H}$  sino con  $\hat{H}_0$ .

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{\mathcal{O}}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson, o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^S t} = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^S t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^S] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t))$$

$$= [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I], \quad \text{ec. de Heisenberg en el cuadro de interacción}$$

donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{H}_0^S.$$

Esta evolución aplica en particular para  $\hat{\phi}_I(x)$ , que satisface entonces la ecuación de movimiento libre: dado que

$$[\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}')] = e^{i\hat{H}_0^{\mathbf{I}} t} [\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}), \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')] e^{-i\hat{H}_0^{\mathbf{I}} t} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) &= -i [\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \hat{H}_0^{\mathbf{I}}(t)] \\ &= -i \int d^3x' \left[ \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \frac{1}{2} \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 \right] e^{-i\hat{H}_0^{\mathbf{I}} t} \\ &= -i \int d^3x' \left[ \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \frac{1}{2} \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}'))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 \right] \\ &= + \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) \quad (\text{justo como en la p. 189}), \end{aligned}$$

y de manera similar

$$\partial_t \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) = -i [\hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \hat{H}_0^{\mathbf{I}}(t)] = \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) - m^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}),$$

que en conjunto implican la ec. de Klein-Gordon

$$\boxed{(\partial^2 + m^2) \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(x) = 0}.$$

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger \right) \Big|_{\substack{\text{independientes de } t \\ p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

y las relaciones de conmutación implican nuevamente que

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_0^{\text{I}}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Todo esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de  $\hat{H}_{\text{int}}$ ! Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se ve ahora en la evolución de los estados,  $\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\text{I}} &= e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} |\psi(t)\rangle_{\text{S}} = e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_{\text{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\text{I}}t'} |\psi(t')\rangle_{\text{I}} \\ &\equiv \hat{U}_{\text{I}}(t, t') \end{aligned}$$

Operador de evolución

(en el cuadro de interacción)

Este operador es unitario,

$$\hat{U}_{\text{I}}(t, t')^\dagger = e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t'} e^{i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\text{I}}t} = \hat{U}_{\text{I}}(t', t) = \hat{U}_{\text{I}}(t, t')^{-1},$$

y evidentemente satisface

$$\hat{U}_I(t, t') \hat{U}_I(t', t'') = \hat{U}_I(t, t'') .$$

Este mismo operador es además el que conecta al operador de campo en el cuadro de Heisenberg con su contraparte en el cuadro de interacción :

$$\hat{\varphi}_I(x) = \underbrace{e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t}}_{\hat{U}_I(t, 0)} \hat{\varphi}_H(x) \underbrace{e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^S t}}_{\hat{U}_I(t, 0)^{-1} = \hat{U}_I(0, t)}$$

$$\longleftrightarrow \hat{\varphi}_H(x) = \hat{U}_I(t, 0)^{-1} \hat{\varphi}_I(x) \hat{U}_I(t, 0)$$

Resolveríamos entonces el problema de evolución por completo si pudiéramos reexpresar a  $\hat{U}_I(t, t')$  en términos de  $\hat{\varphi}_I(x)$ , cuya dependencia temporal conocemos (es libre).

Para avanzar en esta dirección, notemos primero que

$$\hat{U}_I(t, t') \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^S t'}$$



satisface la ec. diferencial

$$\begin{aligned}
 i\partial_t \hat{U}_I(t, t') &= i\partial_t \left[ e^{i\hat{H}_0^s t} \right] e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} + i e^{i\hat{H}_0^s t} \partial_t \left[ e^{-i\hat{H}(t-t')} \right] e^{-i\hat{H}_0^s t'} \\
 &= e^{i\hat{H}_0^s t} \underbrace{\left( -\hat{H}_0^s + \hat{H} \right)}_{\hat{H}_{int}^s} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} \\
 &= e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_{int}^s e^{-i\hat{H}_0^s t} e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} \\
 &= \hat{H}_{int}^I(t) \hat{U}_I(t, t') ,
 \end{aligned}$$

así que la ec. de Schrödinger en el cuadro de interacción es  $i\partial_t |\psi(t)\rangle_I = \hat{H}_{int}^I(t) |\psi(t)\rangle_I$ .

Lo importante aquí es que

$$\hat{H}_{int}^I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \left( \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}(\vec{x})^4 \right) e^{-i\hat{H}_0^s t} = \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}_I(x)^4$$

depende solo del operador de campo en el cuadro de interacción,

así que podemos obtener  $\hat{U}_I$  puramente en términos de  $\hat{\phi}_I(x)$  resolviendo la ec. diferencial

$$i \partial_t \hat{U}_I(t, t') = \hat{H}_{int}^I(t) \hat{U}_I(t, t'),$$

con condición inicial

$$\hat{U}_I(t', t') = \hat{1}.$$

$$\Rightarrow \hat{U}_I(t'+\Delta t, t') \approx (\hat{1} - i \hat{H}_{int}^I(t') \Delta t) \hat{1},$$

$$\hat{U}_I(t'+2\Delta t, t'+\Delta t) \approx [\hat{1} - i \hat{H}_{int}^I(t'+\Delta t) \Delta t] \hat{U}_I(t'+\Delta t, t'),$$

etc.

La solución parecería ser

$$\hat{U}_I(t, t') \sim \exp\left[-i \int_{t'}^t \mathcal{L} \hat{H}_{int}^I(\tau) \right]$$

$$\equiv \hat{1} - i \int_{t'}^t dt_1 \hat{H}_{int}^I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) + \dots,$$

excepto que al actuar con  $\partial_t$  sobre el tercer término y los que siguen, el factor de  $\hat{H}_{int}^I(t)$  no siempre queda hasta la izquierda, que es donde lo necesitamos.

Pero podemos arreglar esto imponiendo el orden temporal,

$$\hat{U}_I(t, t') = T \left\{ \exp\left[-i \int_{t'}^t \mathcal{L} \hat{H}_{int}^I(t) \right] \right\},$$

es decir,

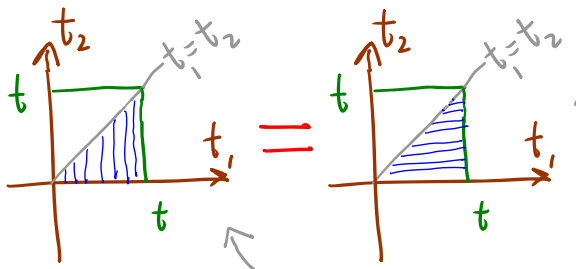
$$\hat{U}_I(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \underbrace{\int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T \{ \hat{H}_{int}^I(t_1) \dots \hat{H}_{int}^I(t_n) \}}_{n! \text{ distintos posibles \u00f3rdenes de } t_1, \dots, t_n \text{ dan el mismo resultado}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \int_{t'}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) \dots \hat{H}_{int}^I(t_n).$$

132: 28/10/22

(P.ej., para el t\u00e9rmino con  $n=2$ , estamos diciendo que

$$\frac{1}{2!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T \{ \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_2) \hat{H}_{int}^I(t_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{renombrar} \\ t_1 \leftrightarrow t_2 \end{array} \right\}$$


$$\int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2)$$

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2)$$

$$= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2).$$

Recordando que  $\hat{H}_{\text{int}}^{\text{I}}(t)$  es proporcional a  $\lambda$ , vemos que esta expresión para  $\hat{U}_{\text{I}}(t, t')$  en términos de  $\hat{\psi}_{\text{I}}(x)$  justamente tiene la forma de una serie de potencias en  $\lambda$ , es decir, es la expansión perturbativa que esperaríamos resulte de utilidad si el acoplamiento es débil ( $\lambda \ll 1$ ).

Por otro lado, será inservible si la teoría es fuertemente acoplada ( $\lambda \gtrsim 1$ ); pero esto no es muy sorprendente, ya que en ese caso el sistema no tiene por qué parecerse al caso libre ( $\lambda=0$ ).

Más adelante entenderemos que, en realidad, aún cuando  $\lambda \ll 1$  la serie perturbativa No converge; pero a pesar de ello es útil como una 'serie asintótica' que nos permite obtener respuestas aproximadas, con una precisión máxima del orden  $\sim \exp(-1/\lambda) \ll 1$ . En lo que resta del curso nos enfocaremos por ello en explorar las implicaciones de esta serie perturbativa, aun sabiendo desde ahora que no captura toda la física del problema — es decir, que existen efectos "no perturbativos".  
← ejemplificamos al final del capítulo 2

Para ser más explícitos respecto a la aplicación de la solución perturbativa que hemos encontrado, pensemos ahora en la forma en que podríamos describir a los estados de nuestro sistema. Usando a  $\hat{a}_p$  y  $\hat{a}_p^\dagger$  que obtuvimos de  $\hat{\phi}(x)$ , podemos por supuesto construir un espacio de Fock de la manera habitual: definiremos  $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_p|0\rangle=0 \quad \forall \vec{p}$ , y después  $|p\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$ ,

$$|p, p'\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'}^\dagger |0\rangle,$$

etc., que PARECEN los estados multipartículas usuales. En el primer capítulo del curso entendimos que, incluso cuando hablamos de partículas interactuantes, cabe suponer que existe una base para el espacio de Hilbert que tiene justo esta estructura de estados de partículas libres, en términos de los llamados estados asintóticos

$$|p_1, \dots, p_N; \pm\rangle \equiv \sqrt{2E_1} \dots \sqrt{2E_N} \hat{a}_{p_1}^{(\pm)\dagger} \dots \hat{a}_{p_N}^{(\pm)\dagger} |\underbrace{\Omega}_{\text{vacío de } \hat{H}}\rangle$$

(esta es la hipótesis de 'completitud asintótica' que discutimos en las pp. 105-111).

Para seguir adelante con nuestro estudio de la expansión perturbativa, supondremos aquí (al igual que todos los libros de texto) que los estados "multipartículas"  $|p_1, p_2, \dots, p_N\rangle$  construidos con los operadores  $\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger$  que provienen de  $\hat{\phi}_I(x)$  nos dan también una base para el MISMO espacio de Hilbert.

Esta suposición de hecho va en contra del teorema de Haag (-Hall-Wightman), que básicamente muestra que si 2 operadores de campo están relacionados por una transformación unitaria, tal como  $\hat{\phi}_H(x) = \hat{U}_I(t, 0)^{-1} \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(t, 0)$ , y uno de ellos es libre, como lo es  $\hat{\phi}_I$ , entonces el otro también es libre. Es decir, el cuadro de interacción No puede existir !! El problema proviene de tener un número infinito de grados de libertad, y en particular, un volumen espacial infinito [ver Duncan, 10.5]. Como veremos el próximo semestre, para definir correctamente nuestra teoría hará falta domesticar a los infinitos. La deducción de la expansión perturbativa, a pesar de ser heurística, nos conducirá a una receta extremadamente útil para hacer cuentas muy precisas, que están en perfecto

acuerda con las mediciones experimentales.

Es importante tener claro que los estados  $|p_1, \dots, p_N\rangle$  No coinciden uno a uno con los correspondientes estados entrantes  $|p_1, \dots, p_N; +\rangle$  o salientes  $|p_1, \dots, p_N; -\rangle$  (que a su vez sabemos que no coinciden directamente entre sí): mientras que

estos últimos son por definición eigenestados del Hamiltoniano completo  $\hat{H}$ , los estados  $|p_1, \dots, p_N\rangle$  son eigenestados sólo del Hamiltoniano libre  $\hat{H}_0^{\text{I}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$  :  
 $\hat{H}_0^{\text{I}} |0\rangle = 0$ ,  $\hat{H}_0^{\text{I}} |p\rangle = E_p |p\rangle$ ,  $\hat{H}_0^{\text{I}} |p, p'\rangle = (E_p + E_{p'}) |p, p'\rangle$ , etc.

Notemos que la energía de estos estados es independiente del valor de  $\lambda$ , lo cual evidentemente No debe ser cierto para los estados asintóticos  $|p_1, \dots, p_N; \pm\rangle$ , que por construcción en verdad describen directamente partículas físicas.

Si  $\lambda \neq 0$ , vemos entonces que el espacio de Hilbert del sistema tiene no 1 sino 3 bases distintas 'tipo partículas libres'.

En particular,  $|0\rangle$  No es el verdadero vacío de la teoría interactuante, es decir, el eigenestado de  $\hat{H}$  con más bajo eigenvalor, al cual denotaremos  $|\Omega\rangle$ .  
 ¿Cuál es entonces la relación entre  $|0\rangle$  y  $|\Omega\rangle$ ?

Si  $\{|\epsilon\rangle\}$  es un conjunto completo de eigenestados de  $\hat{H}$  (p.ej., los estados entrantes, o los estados salientes), entonces usando la correspondiente relación de completitud

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon\rangle\langle\epsilon| = \hat{1} \quad \text{podemos expresar}$$

$$|0\rangle = \sum_{\epsilon} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle = |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{\epsilon \neq \Omega} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle,$$

que en el caso de Schrödinger evolucionar de acuerdo con

$$e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_{\Omega}T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{\epsilon \neq \Omega} e^{-iE_{\epsilon}T} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle.$$

Por definición, tenemos  $E_{\Omega} < E_{\epsilon} \forall \epsilon \neq \Omega$ , así que podemos extraer únicamente el término con  $|\Omega\rangle$  del

lado derecho tomando el límite  $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_{\Omega}\infty(1-i\epsilon)} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{\epsilon \neq \Omega} e^{-iE_{\epsilon}\infty(1-i\epsilon)} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle,$$

$\epsilon > 0$

de donde

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_{\Omega}T} \langle\Omega|0\rangle} e^{-i\hat{H}T} |0\rangle$$

↑  
desconocido

$$= \underbrace{e^{i\hat{H}_0^I 0} e^{-i\hat{H}(0-(-T))} e^{-i\hat{H}_0^I(-T)}}_{\hat{U}_I(0,-T)} |0\rangle.$$

$= \hat{H}_0^I$

p.379

[3]: 22/10/18



De igual manera, a partir de

$$\langle 0 | e^{-i\hat{H}T} = \langle 0 | \Omega \rangle \langle \Omega | e^{-iE_{\Omega}T} + \sum_{\epsilon \neq \Omega} \langle 0 | \epsilon \rangle \langle \epsilon | e^{-iE_{\epsilon}T}$$

podemos deducir que

$$\langle \Omega | = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-iE_{\Omega}T} \langle 0 | \Omega \rangle} \underbrace{\langle 0 | e^{-i\hat{H}T}}_{\langle 0 | e^{i\hat{H}_0 T} e^{-i\hat{H}(T-0)} e^{-i\hat{H}_0 \cdot 0}} \underbrace{\langle 0 | e^{i\hat{H}_0 T} e^{-i\hat{H}(T-0)} e^{-i\hat{H}_0 \cdot 0}}_{\hat{U}_I(T,0)}$$

Esto representa un avance más en nuestro intento por traducir todos los objetos de interés de la teoría interactiva a objetos relacionados con  $\hat{\phi}_I(x)$ . Por otro lado, claramente no podemos con un procedimiento similar determinar a los otros eigenestados de  $\hat{H}$ , cosa que parece desafortunada.

Pero, llegados a este punto, vale la pena pensar exactamente qué cantidades son las que queremos calcular en la teoría interactiva. En el caso del campo libre, el

objeto fundamental que calculamos fue el propagador de Feynman  $\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_H(x) \hat{\phi}_H(x') \} | 0 \rangle$ , que, por el hecho de que  $\hat{\phi}_H(x)$  creaba 1 partícula en  $x$ , representaba la amplitud de que una partícula se propague de  $x'$  a  $x$  (o una antipartícula de  $x$  a  $x'$ ). En presencia de interacciones, los objetos básicos que necesitaremos serán las funciones de correlación, o funciones de Green, o correladores de  $N$  puntos:

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

↑ con  $\hat{\phi}_H^\dagger$  si el campo es complejo

que, con base en la intuición del caso libre, esperaríamos que tengan que ver con procesos donde  $n \leq N$  partículas parten de  $n$  de los puntos  $x_1, \dots, x_n$ , y  $N-n$  partículas llegan a los puntos restantes. Pero esta interpretación se complica por varias razones, principalmente porque en el caso interactuante las partículas solo se podrán definir con claridad como estados asintóticos (p.107), así que el efecto de  $\hat{\phi}_H(x)$  no será precisamente crear 1 partícula en  $x$ .

Más adelante veremos exactamente cuál es la relación entre los correladores  $G_N(x_1, \dots, x_N)$  y las amplitudes de dispersión

$$\langle p'_1 \dots p'_{N-n} ; - | p_1, \dots, p_n ; + \rangle \equiv S_{K'K}$$

que, por su relevancia experimental, son las principales cantidades físicas que nos interesa calcular.

Por ahora, el punto importante es que las funciones de correlación resultan contener toda la información física de una teoría de campos, de modo que, desde el punto de vista de la física teórica, "resolver la teoría" equivale a calcular  $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N, x_1, \dots, x_N$ .

Y la buena noticia es que, con los resultados que hemos obtenido en el cuadro de interacción, podemos ya deducir una receta concreta para calcular estos correladores en una expansión perturbativa.

Para determinar  $G_N(x_1, \dots, x_N)$ , suponjamos primero que  $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_N^0$ . Abreviando  $\hat{\varphi}_{H_n} \equiv \hat{\varphi}_H(x_n)$ , tenemos entonces

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_{H_1} \dots \hat{\varphi}_{H_N} \} | \Omega \rangle$$

$$= \langle \Omega | \hat{\varphi}_{H_1} \dots \hat{\varphi}_{H_N} | \Omega \rangle,$$

que, usando nuestros resultados de las pp. 380 y 388-389, podemos reescribir en la forma

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega T} \langle \Omega | 0 \rangle} \langle 0 | \hat{U}_I(T, 0)$$

$$\cdot \left[ \hat{U}_I(0, t_1) \hat{\varphi}_{I_1} \hat{U}_I(t_1, 0) \right] \dots \left[ \hat{U}_I(0, t_N) \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(t_N, 0) \right]$$

$$\cdot \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega T} \langle 0 | \Omega \rangle} \hat{U}_I(0, -T) | 0 \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega 2T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2}$$

$$\cdot \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_1) \hat{\varphi}_{I_1} \hat{U}_I(t_1, t_2) \hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(t_N, -T) | 0 \rangle$$

$$= T \{ \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(T, -T) \}$$

ya que todo estaba de antemano en orden temporal.

Si hubiéramos supuesto inicialmente cualquier otro orden de los eventos, claramente tendríamos el mismo resultado, con los nombres de los puntos intercambiados.

Pero, en el último renglón, la forma del resultado ya no depende de este orden, porque el verdadero orden está determinado por  $T$ , así que hemos mostrado que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega 2T}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(T, -T) \} | 0 \rangle.$$

Observando que en el caso particular  $N=0$  esto es

$$G_0 \equiv \underbrace{\langle \Omega | \Omega \rangle}_{=1} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega 2T}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | \hat{U}_I(T, -T) | 0 \rangle,$$

es decir,  $\langle 0 | \hat{U}_I(T, -T) | 0 \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2T}$ ,

podemos dividir  $G_N/G_0$  para concluir finalmente que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Para obtener este resultado no hemos hecho todavía ninguna aproximación (más allá de utilizar el cuadro de interacción).

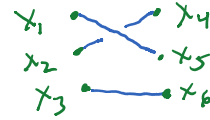
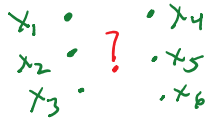
Pero la expresión del lado derecho sugiere cómo hacer un desarrollo perturbativo: dado que  $\hat{H}_{\text{int}}^I \propto \lambda$ , la expansión en Taylor de los exponentiales nos dará una serie de potencias en  $\lambda$ , que podremos truncar a un cierto orden dependiendo del grado de precisión que deseemos.

La fórmula de la página anterior tiene del lado derecho una expresión que solamente involucra a  $\hat{\varphi}_I(x)$  y a  $|0\rangle$ , así que con ella hemos logrado reducir el problema de determinar las funciones de correlación  $G_N(x_1, \dots, x_N)$  de la teoría interactuante al ejercicio, mucho más sencillo, de calcular los objetos análogos en la teoría libre,

← LIBRE: orden  $\lambda^0$  en la serie de Taylor

$$G_{N'}^{(0)}(x_1, \dots, x_{N'}) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_{N'}) \} | 0 \rangle \quad \forall N'.$$

Pero hay una buena razón por la cual hasta ahora no nos habíamos tomado la molestia de hablar de estas funciones de correlación en la teoría libre: las partículas en ese caso



no pueden hacer otra cosa más que propagarse, y como reflejo de ello, todas las  $G_N^{(0)}(x_1, \dots, x_N)$  pueden determinarse directamente a partir de la función de correlación de 2 puntos  $G_2^{(0)}(x_1, x_2)$ , que como sabemos es justamente el propagador de Feynman libre (p.198),

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2) \equiv \langle 0 | T \left\{ \hat{\varphi}_I(x_1) \hat{\varphi}_I(x_2) \right\} | 0 \rangle = \underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{\equiv K_F(x_1 - x_2)}$$

131.5 = 24/10/18 (-55 min por consejos)

Para entender la relación entre  $G_N^{(0)}$  y  $G_2^{(0)} = K_F$ , conviene separar las porciones de frecuencia positiva y negativa del operador de campo en el cuadro de interacción,

$$\hat{\varphi}_I(x) = \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p}_{\equiv \hat{\varphi}_I^+(x)} + \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger}_{\equiv \hat{\varphi}_I^-(x) \quad (= \hat{\varphi}_I^+(x)^\dagger)}$$

no confundir  
con  $\hat{a}_p^\dagger$

porque sabemos que  $\hat{\varphi}_I^+(x) | 0 \rangle = 0$  y  $\langle 0 | \hat{\varphi}_I^-(x) = 0 \quad \forall x$ .

$$K_F(x_1-x_2)$$

Quando calculamos  $G_2^{(0)}(x_1-x_2) = \langle 0|T\{\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2)\}|0\rangle$  en la p. 146, la observación clave fue que al desarrollar  $T\{\hat{\phi}_I(x_1)\hat{\phi}_I(x_2)\}$  obtendremos 4 términos  $(\hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^+, \hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^-, \hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^+, \hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^-)$ , y 3 de ellos están automáticamente en orden normal ( $\hat{a}^+$ 's a la izquierda de las  $\hat{a}$ 's, o lo que es lo mismo, los  $\hat{\phi}_I^-$ 's a la izquierda de los  $\hat{\phi}_I^+$ 's), así que se anulan al tomar su valor esperado en el vacío libre  $|0\rangle$ .

Usando esto, podemos escribir

$$T\{\hat{\phi}_{I1}\hat{\phi}_{I2}\} = \theta(x_1^0-x_2^0) \left( \underbrace{\hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^- + \hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^+}_{\text{en orden normal}} + \hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^+ + \hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^- \right)$$

$\hat{a}$        $\hat{a}^+$

$$+ \theta(x_2^0-x_1^0) (1 \leftrightarrow 2)$$

$$=: \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} : (\theta(x_1^0-x_2^0) + \theta(x_2^0-x_1^0)) + \theta(x_1^0-x_2^0) [\hat{\phi}_{I1}^+, \hat{\phi}_{I2}^-] + \theta(x_2^0-x_1^0) [\hat{\phi}_{I2}^+, \hat{\phi}_{I1}^-]$$

↑  
se anulará si tomamos valor esperado en  $|0\rangle$

$\equiv \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2}$  "Contracción"  
 $= K_F(x_1-x_2)$  propagador  
 da resultado si tomamos  $\langle 0| |0\rangle$



Hemos mostrado entonces que

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}\} = \underbrace{:\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}: + \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}}_{\text{contracción}} \dots$$

podemos meter la contracción al orden normal, porque es solo un número

La generalización de esta conexión entre el orden temporal y el orden normal al caso de un producto de  $N$  operadores de campo se conoce como el teorema de Wick,

$$\begin{aligned}
 T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} &= :\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}: \quad \leftarrow \text{término sin contracciones} \\
 &+ :\underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{contracción}} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{contracción}} + \dots : \\
 &\quad \leftarrow \binom{N}{2} \text{ términos con 1 contracción} \\
 &+ :\underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4} \hat{\varphi}_{I_5} \dots \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{contracción}} + \dots : \\
 &\quad \leftarrow \frac{1}{2} \binom{N}{2} \binom{N-2}{2} \text{ términos con 2 contracciones} \\
 &+ \dots \\
 &\quad \leftarrow \text{términos con 3 ó más contracciones}
 \end{aligned}$$

Esto nos sirve porque  $G_N$  involucra el orden temporal, pero con el orden normal es más fácil calcular el valor esperado en  $|0\rangle$ .

L34: 31/10/22

(El teorema se puede expresar más compactamente en la forma

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} = \exp\left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}_I(x)} K_F(x-y) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}_I(y)}\right] : \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} :,$$

donde, por definición, al desarrollar el exponencial en Taylor reproduciremos todas las posibles contracciones.)

Para demostrar el teorema de Wick, procedemos por inducción: hemos visto ya que funciona para  $N=2$ , y suponiendo que es correcto para  $N-1$  operadores de campo, tenemos

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} = \hat{\varphi}_{I_1} T\{\hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} \leftarrow \text{suponiendo, sin perder generalidad, que } x_1^0 > x_2^0, x_3^0, \dots, x_N^0$$

$$\stackrel{\text{Wick}(N-1)}{=} \hat{\varphi}_{I_1} : \hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N} : + \hat{\varphi}_{I_1} \left( : \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N} : + \dots \right)$$

↑ todas las contracciones

El primer término aquí es

$$(\hat{\varphi}_{I_1}^- + \hat{\varphi}_{I_1}^+) : \hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N} : = : \hat{\varphi}_{I_1}^- \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- : + \underbrace{[\hat{\varphi}_{I_1}^+, : \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- :] + [\hat{\varphi}_{I_1}^+, : \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^+ :] + \dots + [\hat{\varphi}_{I_1}^+, : \hat{\varphi}_{I_2}^+ \dots \hat{\varphi}_{I_N}^+ :]}_{2^{N-1} \text{ términos}}$$

↑  $\hat{a}^+$     ↑  $\hat{a}$

El primero de los  $2^{N-1}$  conmutadores es  $2^{N-1}$  términos

$$\hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \equiv \theta(x_1^0 - x_2^0) [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_2}^-] + \theta(x_2^0 - x_1^0) [\hat{\varphi}_{I_2}^+, \hat{\varphi}_{I_1}^-]$$

$$[\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-] = [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_2}^-] \hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_2}^- [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-]$$

interpretar como  $\hat{\varphi}_{I_2}^- (\hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-)$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \quad (\text{ya que habremos supuesto desde un pplo. que } x_1^0 > x_2^0)$$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_2}^- [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_3}^-] \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-]$$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^- \quad (\text{porque } x_1^0 > x_3^0)$$

=

∴ continuando hasta pasar  $\hat{\varphi}_{I_1}^+$  por enfrente de  $\hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-$$

+ otros  $N-4$  términos con 1  $\hat{\varphi}_{I_n}^-$  reemplazado por  $\hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_n}^-$ .

Lo mismo sucede con los otros  $2^{N-1} - 1$  conmutadores,

salvo que  $[\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_n}^+] = 0$ , así es que la contracción  $\hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_n}^-$

solo aparece al pasar a  $\hat{\varphi}_{I_1}^+$  por enfrente de  $\hat{\varphi}_{I_n}^-$

(no de  $\hat{\varphi}_{I_n}^+$ ):

$$\hat{\varphi}_{I_1} : \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_N} : = : \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_N} :$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{...}}$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^- \hat{\varphi}_{I_2}^+}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N} \hat{\varphi}_{I_2}^+}_{\text{...}}$$

+ términos en solo  $\hat{\varphi}_{I_3}^+$ , o solo  $\hat{\varphi}_{I_4}^+ \cdots$  o solo  $\hat{\varphi}_{I_N}^+$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_4}^- \hat{\varphi}_{I_5}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_N}^- \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^+}_{\text{...}}$$

+ términos en solo  $\hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_4}^+$  u otras parejas de  $\hat{\varphi}_{I_n}^+$

+ términos con 3, 4, ... o N-3  $\hat{\varphi}_{I_n}^+$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_N}^+}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_N} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^+}_{\text{...}}$$

$$= : \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^- + \cdots + \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N} :$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{...}}$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^+ \hat{\varphi}_{I_N}^+}_{\text{...}} + \cdots + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^+ \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{...}}$$

Después de calcular estos conmutadores podemos reconstituir

los campos  $\hat{\varphi}_{I_n}$  con  $n \geq 2$ , y vemos entonces que

$$\hat{\varphi}_{I_1} : \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} : = : \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} : + \underbrace{: \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} :}_{\text{otros términos con 1}} + \text{contracción que involucra a } \hat{\varphi}_{I_1} .$$

Faltaría ahora ver qué sucede cuando incorporamos a  $\hat{\varphi}_{I_1}$  en alguno de los términos que ya tienen  $k \geq 1$  contracciones. Pero las contracciones son números, así que por el mismo argumento,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{I_1} : \underbrace{\hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}}_{k \text{ contracciones}} : &= : \hat{\varphi}_{I_1} \underbrace{\hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}}_{k \text{ contracciones que no involucran a } \hat{\varphi}_{I_1}} : \\ &+ : \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}}_{k+1 \text{ contracciones que sí involucran a } \hat{\varphi}_{I_1}} : \end{aligned}$$

En conjunto obtenemos entonces el resultado deseado

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}\} = : \hat{\varphi}_{I_1} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} : + \text{todas las contracciones} : \quad \checkmark$$

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} = : \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}}_{\text{contracción}} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N} + \dots :$$

La utilidad de este resultado radica en que, justo como en el caso  $N=2$ , al tomar el valor esperado en el vacío libre  $|0\rangle$ , del lado derecho sob sobrevivirán los términos donde todos los operadores  $\hat{\varphi}_{I_n}$  han sido contraídos (puesto que los otros términos involucran productos de operadores con  $\hat{a}$ 's, que aniquilan a  $|0\rangle$  hacia la derecha, y/o  $\hat{a}^\dagger$ 's, que aniquilan a  $\langle 0|$  hacia la izquierda).

Por supuesto, contraer todos los  $\hat{\varphi}_{I_n}$ 's solo es posible si

$N$  es par, y aprendemos entonces que

$$\langle 0| T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} |0\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es impar} \\ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}}_{\text{contracción}} \underbrace{\hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{contracción}} \dots \hat{\varphi}_{I_{N-1}} \hat{\varphi}_{I_N} + \dots & \text{si } N \text{ es par} \end{cases}$$

$G_N^{(0)}(x_1, \dots, x_N)$

$G_2^{(0)}(x_1, x_2)$

$\frac{1}{(N/2)!} \binom{N}{2} \binom{N-2}{2} \dots \binom{2}{2}$

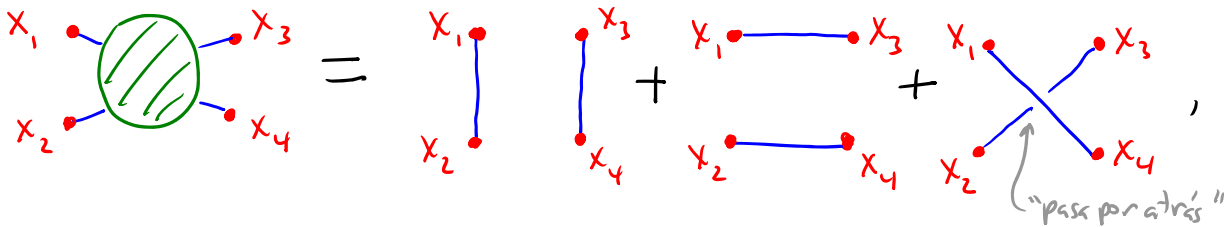
términos con  $\frac{N}{2}$  contracciones

Esto dice que cualquier  $G_N^{(0)}$  es simplemente una suma sobre productos de  $K_F$ 's. P.ej., para  $N=4$ ,

$$\underbrace{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4} \} | 0 \rangle}_{G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{propagador entre } x_1, x_2} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{propagador entre } x_1, x_2} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{propagador entre } x_1, x_2} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{propagador entre } x_1, x_2}.$$

amplitud de tener 4 partículas en 4 de los eventos  $x_1, x_2, x_3, x_4$

Este resultado se puede expresar de forma diagramática:

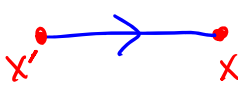


donde los puntos denotan lugares en el espaciotiempo, y las líneas representan propagadores,  $x \text{---} x' \equiv K_F(x-x')$ .

Cada término  $\equiv$  diagrama del lado derecho califica un proceso en el espaciotiempo en el cual se crean 2 partículas libres en 2 de los puntos, y después éstas se propagan a los 2 puntos restantes, donde son aniquiladas.

Si las partículas tuvieran carga ( $\Leftrightarrow \hat{\varphi}_I \neq \hat{\varphi}_I^\dagger$ ), entonces para distinguir entre partículas y antipartícula dibujaríamos por convención una flecha sobre cada línea en la dirección

de propagación de la partícula — que, como sabemos, es opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula —, es decir,



$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x) \hat{\varphi}_I^\dagger(x') \} | 0 \rangle$$

contiene  $\hat{a}$ 
contiene  $\hat{a}^\dagger$

$$\equiv K_F(x-x')$$

A pesar de lo intuitiva que resulta esta notación diagramática, es importante notar que en cada diagrama NO estamos especificando el orden temporal en el que sucedan los eventos  $x_1, \dots, x_N$ , o la relación entre las correspondientes posiciones espaciales, ¡y menos aún estamos sugiriendo que las partículas se propagan literalmente a lo largo de las trayectorias indicadas por las líneas! Uno de estos diagramas no representa entonces directamente a 1 solo proceso específico sobre el espaciotiempo, sino que resume toda una familia de procesos posibles.

L30; 19/04/17

Siguiendo estas mismas convenciones diagramáticas, examinemos ahora la expansión perturbativa del correlador



seguiremos llamando así para  $\lambda \neq 0$  ahí donde NO es literalmente amplitud de propagación de una partícula

de 2 puntos ( $\equiv$  propagador) pero en la teoría interactuante,

$$G_2(x_1, x_2) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_{H1} \hat{\phi}_{H2} \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \exp[-i \int_{-T}^T dt \int d^3y \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}_{Iy}^4] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_{Iy}^4] \} | 0 \rangle}$$

p.393

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_2^{(n)}(x_1, x_2) \leftarrow \text{término de orden } \lambda^n$$

Consideremos primero el numerador  $\equiv N_2(x_1, x_2)$ . El término de  $\mathcal{O}(\lambda)$  es

$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \hat{\phi}_I(x_2) \} | 0 \rangle = \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \equiv K_F(x_1 - x_2) = \text{---} x_1 \text{---} x_2 \text{---}$$

como esperábamos. El término de  $\mathcal{O}(\lambda')$  es más interesante:

$$N_2^{(1)}(x_1, x_2) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \hat{\phi}_I(x_2) (-\frac{i\lambda}{4!}) \int d^4y \hat{\phi}_I(y)^4 \} | 0 \rangle$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \left[ \underbrace{\hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy}}_{\text{otras maneras de contraer los } \hat{\phi}_{Iy} \text{ entre sí:}} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy} + \underbrace{\hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy}}_{\text{otras maneras de contraer } \hat{\phi}_{I1} \text{ y } \hat{\phi}_{I2} \text{ con los } \hat{\phi}_{Iy}:} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy} \right]$$

$\frac{1}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 3$  términos iguales

$4 \cdot 3 = 12$  términos iguales

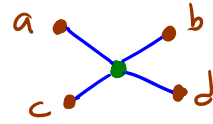
TOTAL:  $3 + 12 = 15 = \frac{1}{3!} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{1}{6} 15 \cdot 6 \cdot 1$  ✓

$$= -i\lambda \int d^4y \left[ \frac{1}{8} K_F(x_1 - x_2) K_F(y - y)^2 + \frac{1}{2} K_F(x_1 - y) K_F(y - y) K_F(y - x_2) \right]$$



a puntos distintos,  $\hat{\varphi}_{I_a} \hat{\varphi}_{I_b} \hat{\varphi}_{I_c} \hat{\varphi}_{I_d} \hat{\varphi}_{I_y} \hat{\varphi}_{I_y} \hat{\varphi}_{I_y} \hat{\varphi}_{I_y}$ , y las  $4!$  diferentes

maneras de hacer las contracciones correspondientes



darán el mismo resultado, cancelándose así el factor de  $\frac{1}{4!}$  que aparecía en  $\hat{H}_{int}^I$  (esta fue precisamente la razón por la que incluimos a  $\frac{1}{4!}$  como factor de normalización en  $\mathcal{L}_{int}$ ).

Pero la cancelación es incompleta cuando los patrones no se conectan todos a puntos distintos, cosa que sucede justo cuando  $c \neq 1$  ó  $l \neq 1$ .

La tercera contribución a  $s$  se refiere también a una cancelación incompleta, entre el factor  $\frac{1}{n!}$  de la expansión en Taylor del exponencial a  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  y las maneras en que los  $n$  vértices correspondientes se pueden permutar entre sí.

32.5: 26/10/12

Usando este mismo lenguaje diagramático, podemos calcular el término de  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  en el numerador de  $G_2(x_1, x_2)$ :

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \langle 0 | T \left\{ \hat{\varphi}_I(x_1) \hat{\varphi}_I(x_2) \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 \hat{\varphi}_I(y_1) \hat{\varphi}_I(y_2) \right\} | 0 \rangle$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{(-i\lambda)^2}{1152}}$

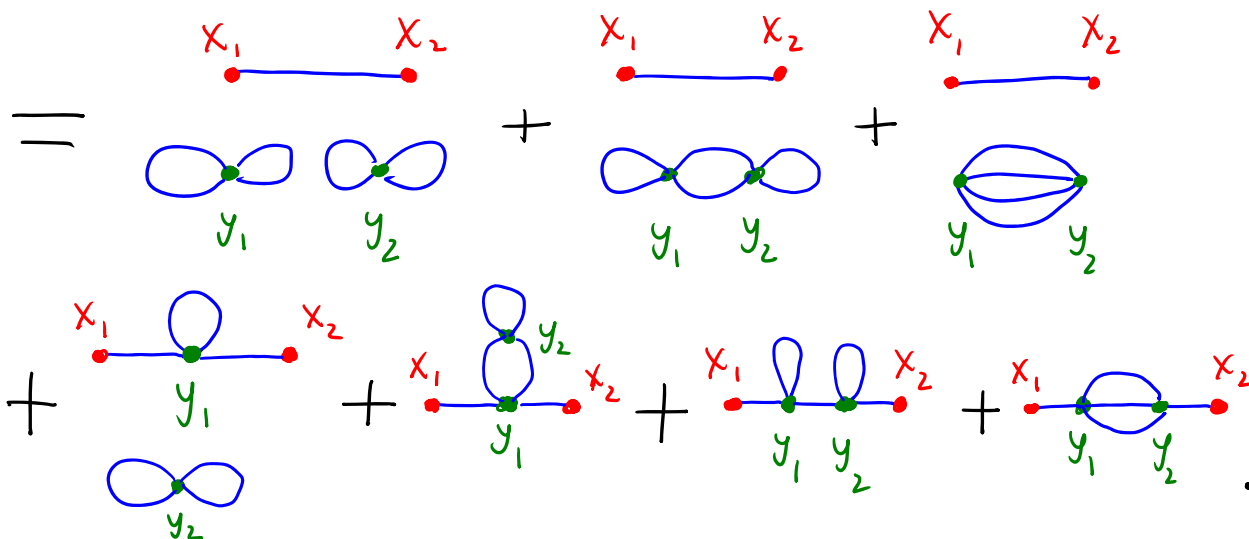
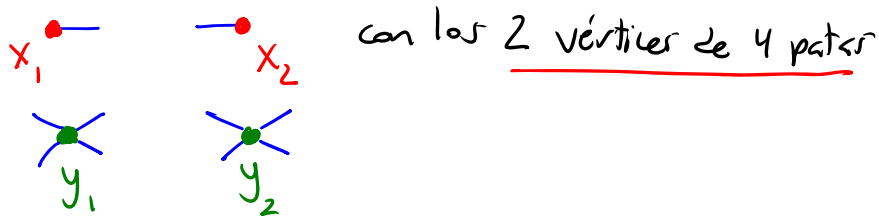
que usando el teorema de Wick se traduce en

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-i\lambda)^2}{1152} \int d^4y_1 d^4y_2 \left[ \underbrace{\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2}}_{\text{maneras restantes de}} \underbrace{\hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}}_{\text{contrar todos los campos}} \right]$$

945

lo cual es más fácil de expresar gráficamente como

$N_2^{(2)}(x_1, x_2) =$  suma sobre todos los diagramas topológicamente distintos que se obtienen al conectar los 2 puntos externos



los diagramas que se obtendrán intercambiando  $y_1 \leftrightarrow y_2$  o rotando/reflejando No son topológicamente distintos.  $x_1, x_2$  están fijas; pero  $y_1, y_2$  son variables móviles.

$$\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}$$

De acuerdo con nuestras convenciones, estos diagramas resumen respectivamente las siguientes expresiones analíticas:

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^4} \frac{1}{2!^2} \frac{1}{2!} K_F(x_1 - x_2) (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 K_F(y_1 - y_1)^2 \int d^4y_2 K_F(y_2 - y_2)^2$$

(3x3=9 términos iguales)

$\frac{1}{128} = \frac{9}{1152}$  ✓

$$+ \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} K_F(x_1 - x_2) (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 K_F(y_1 - y_1) K_F(y_1 - y_2) K_F(y_2 - y_2)$$

(6x6x2=72 términos iguales)

$\frac{1}{16} = \frac{72}{1152}$  ✓

$$+ \frac{1}{4!} \frac{1}{2!} K_F(x_1 - x_2) (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 K_F(y_1 - y_2)^4$$

(4! = 24 términos iguales)

$\frac{1}{48} = \frac{24}{1152}$  ✓

135: 04/11/22

$$+ \frac{1}{2^3} \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 K_F(x_1 - y_1) K_F(y_1 - y_1) K_F(y_1 - x_2) \int d^4y_2 K_F(y_2 - y_2)^2$$

(2x6x2x3=72 términos iguales)

$\frac{1}{16} = \frac{72}{1152}$  ✓

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 K_F(x_1 - y_1) K_F(y_1 - y_2) K_F(y_2 - y_2) K_F(y_1 - x_2)$$

(2x4x3x4x3 = 288 términos iguales)

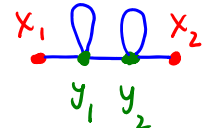
$\frac{1}{4} = \frac{288}{1152}$  ✓

$$\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}$$

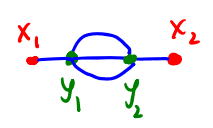
(suma continúa en la spte. página)

$$\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}$$

$$+ \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int^4 y_1 \int^4 y_2 K_F(x_1 - y_1) K_F(y_1 - y_2) K_F(y_2 - y_2) K_F(y_2 - y_2) K_F(y_2 - x_2)$$

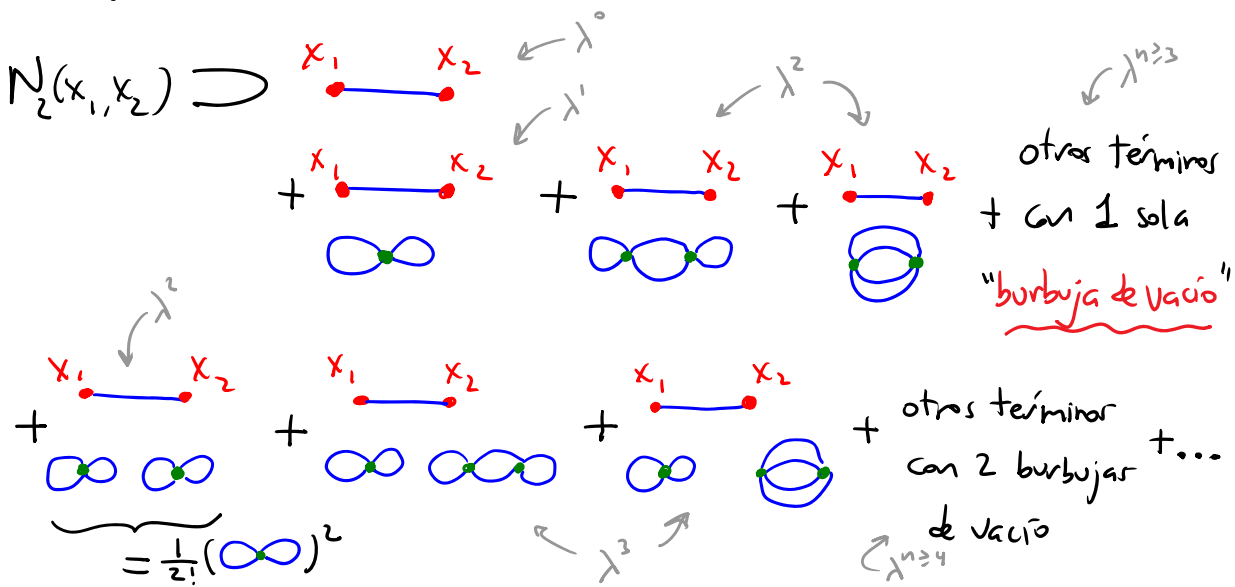
$\frac{1}{4} = \frac{288}{1152}$  ✓  (2x4x3x4x3 = 288 términos iguales)

$$+ \frac{1}{3!} (-i\lambda)^2 \int^4 y_1 \int^4 y_2 K_F(x_1 - y_1) K_F(y_1 - y_2)^3 K_F(y_2 - x_2)$$

$\frac{1}{6} = \frac{192}{1152}$  ✓  (2x4x4x3x2 = 192 términos iguales)

Podemos verificar que hemos contabilizado un total de  $9 + 72 + 24 + 72 + 288 + 288 + 192 = 945$  términos. ✓

Juntamos  $N_2^{(0)} + N_2^{(1)} + N_2^{(2)} + \dots$ , podemos ver que el numerador incluye en particular varios términos proporcionales a  $K_F(x_1, x_2)$ :



Toda esta serie de términos proporcionales a  $K_F(x_1-x_2)$  aparecen justo con los coeficientes numéricos necesarios para poder reescribirse como

$$\begin{aligned}
 & \overset{x_1}{\bullet} \text{---} \overset{x_2}{\bullet} \left[ 1 + \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right) \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2!} \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)^2 \\
 & \quad + \frac{1}{3!} \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)^3 \\
 & \quad \left. + \dots \right] \\
 & = \overset{x_1}{\bullet} \text{---} \overset{x_2}{\bullet} \exp \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Los otros términos en el numerador se pueden agrupar de manera similar, factorizando la porción que involucra a los puntos externos y sumando en una exponencial a las burbujas de vacío. P.ej.,

$$\begin{aligned}
 & \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots \\
 & + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots \\
 & = \text{tree-level diagram} \exp\left( \text{loop diagrams} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que el numerador de  $G_2(x_1, x_2)$  se puede expresar como

$$N_2(x_1, x_2) = \underbrace{\left[ \text{tree-level diagram} + \text{loop diagrams} + \dots \right]}_{\substack{\text{tods los diagramas "conexos"} \\ \text{= sin burbujas de vacío} \\ \text{= o conectados ("connected")}}} \times \exp\left( \text{loop diagrams} + \dots \right).$$



Para completar el cálculo de  $G_2(x_1, x_2)$ , falta ahora determinar el denominador

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &\equiv \langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(y)^4 \right] \right\} | 0 \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{i\lambda}{4!} \right)^n \int d^4y_1 \dots d^4y_n \underbrace{\langle 0 | T \left\{ \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(y_1)^4 \dots \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(y_n)^4 \right\} | 0 \rangle}_{\text{suma sobre todas las contracciones}} \\
 &\quad \left( \frac{1}{(2n)!} \binom{4n}{2} \binom{4n-2}{2} \dots \binom{2}{2} \text{ términos} \right)
 \end{aligned}$$

Esta expresión evidentemente produce puras burbujas de vacío,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= 1 + \text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{three-bubbles} + \dots \\
 &\quad + \text{two-bubbles} + \text{three-bubbles} + \text{four-bubbles} + \dots \\
 &\quad + \dots \\
 &= \exp \left( \text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{three-bubbles} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

lo cual felizmente cancela la exponencial que obtuvimos en el numerador  $N_2(x_1, x_2)$ .

A pesar de que las burbujas de vacío se cancelan por completo completo entre el numerador y el denominador de nuestra fórmula perturbativa para calcular funciones de correlación  $G_n$ , es interesante notar que podemos encontrarles un significado físico directo: recordando de la p.393 que

$$G_0 = \underbrace{\langle \Omega | \Omega \rangle}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega 2T}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_I(y)^4 \right] \right\} | 0 \rangle$$

veremos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\equiv \langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_I(y)^4 \right] \right\} | 0 \rangle \\ &= \exp \left( \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \dots \right) \\ &= |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2T} \end{aligned}$$

Es decir, las "burbujas de vacío" justamente contienen información respecto a la manera en que el vacío interactuante  $|\Omega\rangle$  difiere del vacío libre. Mientras que  $|0\rangle$ , por definición, no contiene ninguna de las "partículas" creadas por  $\hat{a}_p^\dagger$ , que son precisamente los objetos cuyos propagadores  $K_F(x-x')$  denotamos con líneas en los diagramas, el verdadero

vacío  $|\Omega\rangle$  puede visualizarse como una sopa burbujeante en la que estas "partículas" aparecen y desaparecen constantemente.  
L31: 2/04/17


De la ecuación anterior vemos en particular que la energía del vacío interactuante está dada por


$$E_{\Omega} = -\frac{1}{2T} \text{Im} \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right).$$

Representemos ahora el cálculo del propagador de la teoría interactuante,  $G_2(x_1, x_2)$ . En vista de la cancelación de las burbujas de vacío, nuestro resultado final es

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{N_2(x_1, x_2)}{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^0) & & \end{array} + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^1) & & \end{array} + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) & & \end{array} \\ + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) & & \end{array} + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) & & \end{array} + \dots \end{array}$$

Esto se presta también para una interpretación intuitiva: digamos desde un principio que el correlador de 2 puntos  $G_2(x_1, x_2)$  codificaría algo así como la amplitud de probabilidad de empezar

con 1 partícula (o antipartícula) en  $x_2$  y termina con con 1 partícula (o antipartícula) en  $x_1$ , y podemos ver que en nuestro desarrollo perturbativo esto se calcula incluyendo todos los posibles procesos donde, además de la propagación libre, tomamos en cuenta que, por efecto de  $\hat{H}_{int}^I$ , las "partículas" pueden aparecer y desaparecer, siempre en grupos de 4. Es decir, el vértice de 4 patas  codifica de manera covariante todos los posibles procesos:  $0 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 1$ ,  $4 \rightarrow 0$ .

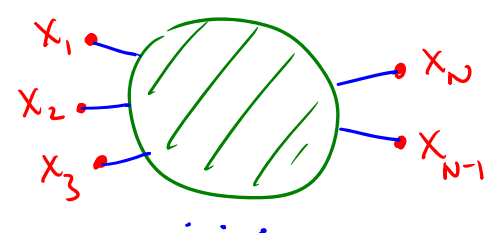


De manera similar, al calcular el correlador de  $N$  puntos

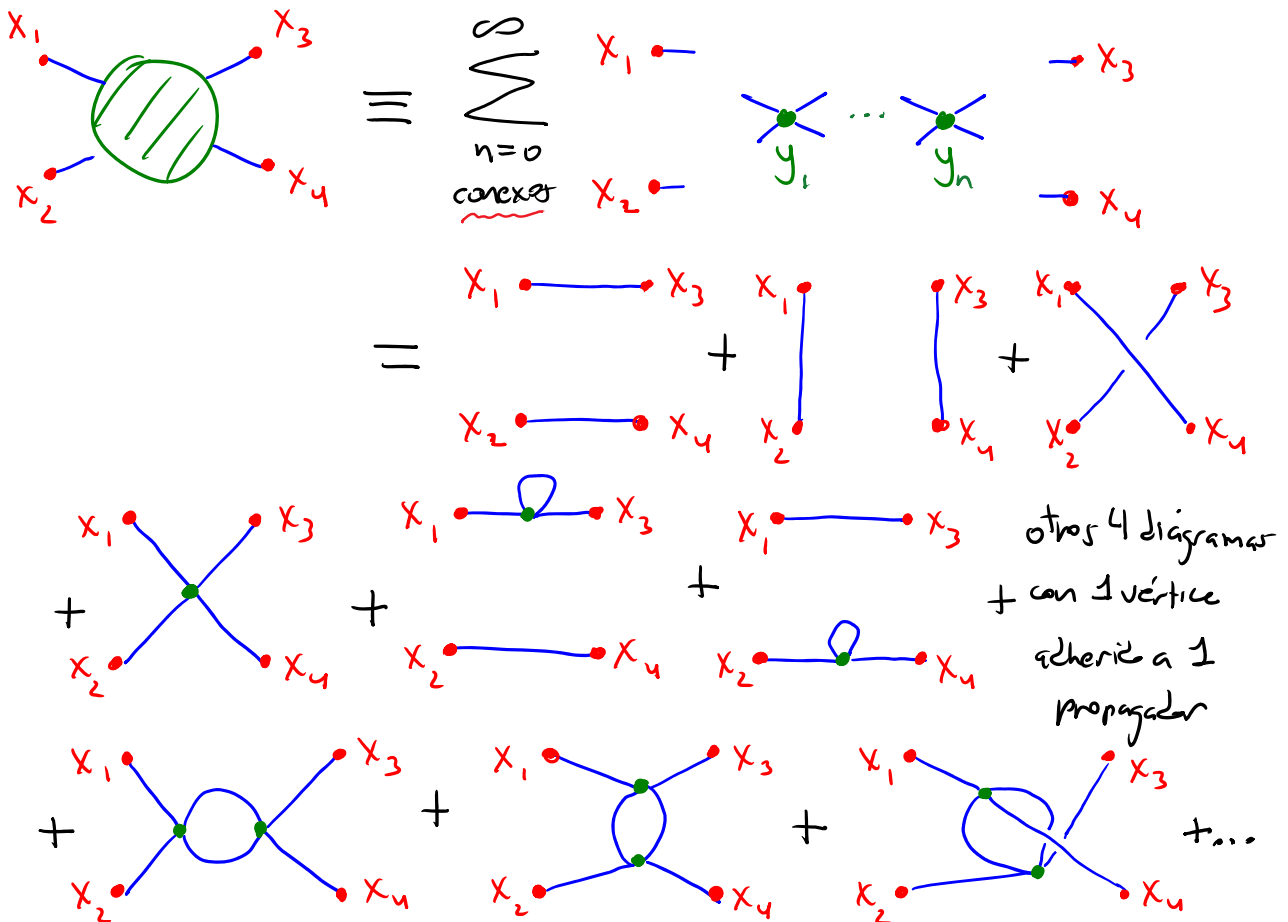
$$\begin{aligned}
 G_N(x_1, \dots, x_N) &\equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle} \\
 &\equiv \frac{N_N(x_1, \dots, x_N)}{D} ,
 \end{aligned}$$

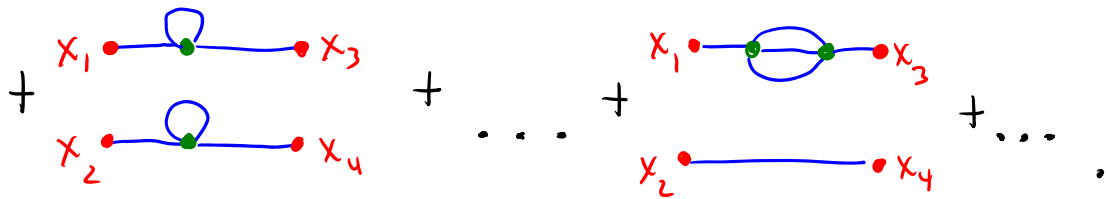
con el mismo razonamiento claramente obtendremos

$G_N(x_1, \dots, x_N) =$  Suma sobre todos los diagramas conexos  
 (es decir, sin burbujas de vacío) topológicamente  
 distintos con  $N$  puntos externos  $x_1, \dots, x_N$



Pej., la función de 4 puntos  $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  está dada por





Vale la pena resaltar que, si bien en esta suma todos los diagramas son conexos (no tienen burbujas de vacío), NO todos son "completamente conexos", es decir, no necesariamente sucede que todos los puntos externos acaban estando conectados entre sí.

Estos dibujos que hemos aprendido a hacer aquí, y que nos permiten resumir la expansión perturbativa, se conocen como diagramas de Feynman.

Como hemos visto, su utilidad es doble: son una excelente herramienta de visualización y

de cálculo. La receta que nos permite asignar una expresión analítica a cada diagrama se llama las reglas de Feynman.

[33.5: 29/10/18

Hasta ahora hemos hablado de estas reglas en espacio de posiciones. Resumiendo lo que hemos aprendido, y omitiendo desde ahora en adelante los colores que habíamos usado para



distinguir entre puntos externos e internos, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría  $\varphi^4$  en espacio de posición son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con  $N$  puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas. ← topológicamente distintos

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x' \end{array} \equiv K_F(x-x')$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).

2) Por cada vértice, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ | \\ y \end{array} \equiv -i\lambda \int d^4y$$

(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierta en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \equiv 1$$


(~ amplitud de probabilidad de que la partícula que está en  $x$  esté en  $x$ ).

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el factor de simetría

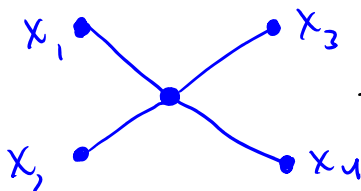
$$S \equiv \left( 2 \begin{array}{l} \text{por cada par de patas} \\ \text{de 1 mismo vértice} \\ \text{contraídas entre sí (c)} \end{array} \right) \times \left( l! \begin{array}{l} \text{por cada conjunto} \\ \text{de } l \text{ líneas} \\ \text{intercambiables} \end{array} \right) \times \left( v! \begin{array}{l} \text{por cada } v \\ \text{vértices} \\ \text{intercambiables} \end{array} \right)$$

Frecuentemente es más fácil trabajar en espacio de momentos (sobre todo más adelante, cuando aprendamos a calcular amplitudes de dispersión). Usando

$$K_F(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (= K_F(x-x'))$$


$$\equiv \tilde{K}_F(p) \equiv \overrightarrow{p} = \overleftarrow{-p}$$

podemos reescribir la expresión analítica para cualquier diagrama en términos de variables de momento. P.ej.



$$= -i\lambda \int d^4 y K_F(x_1-y) K_F(x_2-y) K_F(y-x_3) K_F(y-x_4)$$

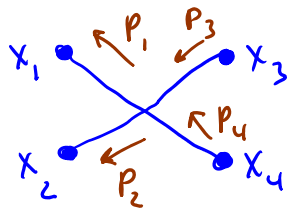
$$= -i\lambda \int d^4 y \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip_1 \cdot (x_1-y)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_2 \cdot (x_2-y)}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_3 \cdot (y-x_3)}}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_4 \cdot (y-x_4)}}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d^4 y e^{iy \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)} \frac{i e^{-ip_1 \cdot x_1}}{p_1^2 - m^2} \frac{i e^{-ip_2 \cdot x_2}}{p_2^2 - m^2} \frac{i e^{ip_3 \cdot x_3}}{p_3^2 - m^2} \frac{i e^{ip_4 \cdot x_4}}{p_4^2 - m^2}$$

+iε



expresión que podemos resumir diagramáticamente como



$$= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \left[ \left( \frac{4}{i\pi} \frac{i}{p_I^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} e^{+ip_3 \cdot x_3} e^{+ip_4 \cdot x_4} \right]$$

propagadores  $\tilde{K}_F$

ya no hay  $\int d^4 y$   
ni  $\int d^4 p_4$

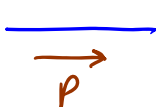
exponenciales asociados a puntos externos

$p_4 = p_1 + p_2 - p_3$

Más en general, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría  $\phi^4$  en espacio de momentos son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con  $N$  puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas

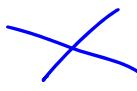
1) Por cada propagador, asignar un factor de



$$\equiv \tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).

2) Por cada vértice, asignar un factor de



$$\equiv -i\lambda$$

, imponiendo a mano la conservación del cuadrimomento que fluye a través del vértice

(amplitud de probabilidad de que ocurra un proceso con  $0 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, \text{ ó } 4 \rightarrow 0$  partículas).

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

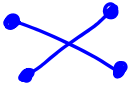
$$x \bullet \xleftarrow{p} \equiv e^{-ip \cdot x} \quad \leftrightarrow \quad x \bullet \xrightarrow{p} \equiv e^{ip \cdot x}$$

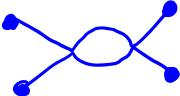
(~ amplitud de probabilidad de que 1 partícula en momento  $p$  esté en  $x$ , o viceversa - recordar que  $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{+ip \cdot \vec{x}}$  )


4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes de cada diagrama, e integrar  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  sobre los momentos que quedan indeterminados:

$$\begin{aligned} (\# \text{ de } \text{integrales}) &= (\# \text{ de } \text{propagadores}) - (\# \text{ de } \text{vértices}) \\ &= (\# \text{ de } \text{puntos } \text{externos}) + (\# \text{ de } \text{lazos}) - 1 \end{aligned}$$

} por propiedad de gráficas

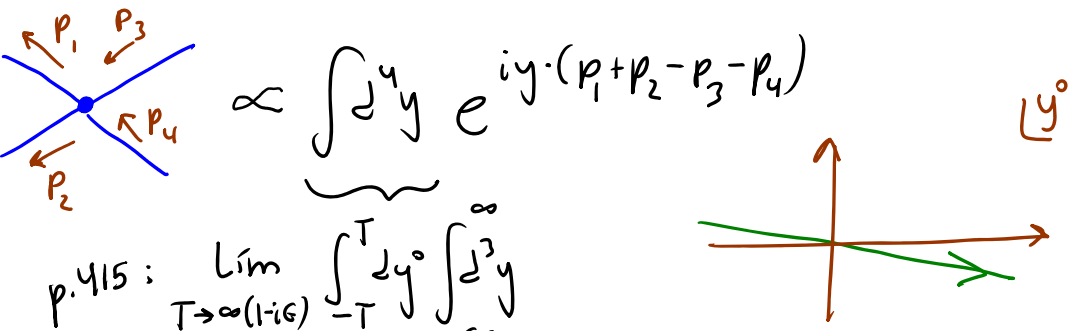
(P.ej.,   $\Rightarrow 4 - 1 = 3 = 4 + 0 - 1$ , ✓)

  $\Rightarrow 6 - 2 = 4 = 4 + 1 - 1$ , ✓

  $\Rightarrow 5 - 2 = 3 = 2 + 2 - 1$ . ✓ )

5) Dividir entre el factor de simetría  $s$ .

Siendo más cuidadosos, podemos notar que al calcular  $p_{ej}$ .



The diagram shows a blue vertex with four arrows representing momenta:  $p_1$  (top-left),  $p_2$  (bottom-left),  $p_3$  (top-right), and  $p_4$  (bottom-right). To the right is a coordinate system with a vertical axis labeled  $y$  and a horizontal axis labeled  $y^0$ .

$$\propto \int d^4 y e^{i y \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}$$

p. 415:  $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T d^4 y^0 \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T d^4 y^0 e^{i y^0 \cdot (p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0)} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y e^{-i \vec{y} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)}$$

$$y^0 \equiv y^0(1-i\epsilon)$$

$$= (1-i\epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d^4 y^0 e^{i y^0(1-i\epsilon)(p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0)} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)$$

← real

en realidad NO obtendríamos la delta de Dirac que dijimos para la energía,  $(2\pi) \delta(p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0)$  a menos que el exponente que se muestra sea imaginario puro (pues de otra manera la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} d^4 y^0$  sería divergente aún cuando  $p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0 \neq 0$ ). Debemos por tanto tomar  $p_n^0 \equiv p_n^{\prime 0}(1+i\epsilon)$  con  $p_n^{\prime 0} \in \mathbb{R}$ , para que el exponente sea

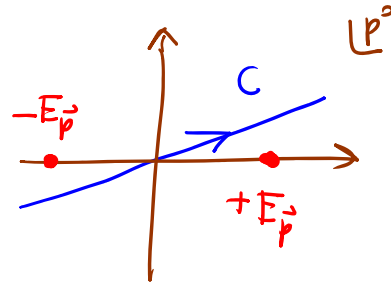
$$iy^\circ(p_1^\circ + p_2^\circ - p_3^\circ - p_4^\circ) = iy^\circ \underbrace{(p_1^\circ + p_2^\circ - p_3^\circ - p_4^\circ)}_{\text{reales}} \underbrace{(1-i\epsilon)(1+i\epsilon)}_{1+\epsilon^2 \leftarrow \text{real}},$$

con lo cual SÍ obtenemos la  $2\pi \delta(p_1^\circ + p_2^\circ - p_3^\circ - p_4^\circ)$  prometida.

Pero esta elección de  $p_n^\circ$  quiere decir

que el contorno de integración sobre

la energía,  $\int_C dp_n^\circ$ , debe ser entonces



como se muestra en la figura, ¡que es justo la receta


que tenemos para calcular el propagador de Feynman!

Aprendemos entonces que el  $-i\epsilon$  en el límite sobre

los tiempos inicial/final  $\mp T$  que requerimos en las

pp. 388 y 393 va de la mano del  $+i\epsilon$  en  $\tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ .

La expansión perturbativa que hemos desarrollado nos permite calcular cualquier función de correlación de la teoría interactiva como una serie de potencias en  $\lambda$ , que resumimos convenientemente usando diagramas de Feynman.

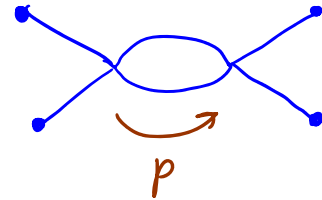
Al hacer cuentas en la práctica, siempre es relativamente fácil obtener resultados explícitos para los diagramas "a nivel árbol" ( $\equiv$  sin lazos, como p.ej. ) , pero más allá de eso, nos encontramos genéricamente con 2 problemas:

1) En un diagrama con 1 ó más lazos, la(s) integral(es)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

sobre los momentos

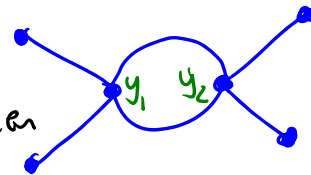
indeterminados (<sup>p.421</sup>  $\Rightarrow$  uno por cada lazo)



en general no convergen para p's grandes,  $p^\mu \rightarrow \pm\infty$

En espacio de posiciones, estas

"divergencias ultravioleta" ( $\equiv$  UV) provienen



del límite de distancias pequeñas donde 2 ó más

vértices coinciden en el espaciotiempo,  $y_1^\mu \rightarrow y_2^\mu$ .

Si la teoría tiene la propiedad de ser "renormalizable",

estas divergencias UV se pueden eliminar ajustando

un número finito de parámetros en el lagrangiano

(masas, acoplamientos, etc., cuyos valores deducimos

de los datos experimentales). Este cambio de variables se conoce como renormalización, y lo estudiaremos en detalle en el curso de Campos II.

En teorías con partículas sin masa, como QED, por los propagadores  $\propto \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$  pueden aparecer además "divergencias infrarrojas" ( $\equiv$  IR), que corresponden a bajas energías,  $p^\mu \rightarrow 0$ , o lo que es lo mismo, distancias grandes,  $|y_1^\mu - y_2^\mu| \rightarrow \infty$ . En Campos II veremos también cómo eliminarlas.

2) El número de diagramas que se obtienen a  $\mathcal{O}(\lambda^n)$  crece muy rápidamente, típicamente  $\sim n!$ , de tal manera que  $G_N^{(n)} \sim \lambda^n n!$ , y por lo tanto la serie perturbativa no converge (Tarea 8).

A pesar de ello, para  $\lambda \ll 1$  la serie es útil como "expansión asintótica": para la función de  $N$  puntos  $G_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$  se encuentra que

$$|G_N(\lambda) - \sum_{j=0}^n \underbrace{G_N^{(j)}(\lambda)}_{\equiv \lambda^j g_N^{(j)}}| < C_{n+1} \lambda^{n+1}$$

resultado exacto  $\nearrow$   
 aproximación perturbativa hasta  $O(\lambda^n)$   
 $\nwarrow$  con  $C_{n+1}$  y  $g_N^{(j)}$  independientes de  $\lambda$ , y donde  $C_{n+1}$  crece rápidamente con  $n$

Así que para un orden  $n$  dado, la precisión lograda con los primeros  $n+1$  términos de la expansión perturbativa mejora si  $\lambda$  disminuye. Pero para una cte. de acoplamiento  $\lambda$  dada, no importa cuán pequeños (siempre que  $\lambda > 0$ ),  $C_{n+1} \lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , así que en algún momento uno NO puede ya mejorar la precisión de la respuesta aproximada calculando más términos en la serie.

Para  $C_n \sim n!$  esto sucede cuando  $n \sim 1/\lambda \gg 1$ , así que la máxima precisión que uno puede lograr con la serie asintótica es de orden

$$C_n \lambda^n \sim \left(\frac{1}{\lambda}\right)! \lambda^{1/\lambda} \underset{\text{Stirling}}{\sim} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\lambda} e^{-1/\lambda} \lambda^{1/\lambda} = e^{-1/\lambda}$$

$\ll 1$  si  $\lambda \ll 1$

Como habíamos dicho antes, esto es una indicación de que existen efectos "no perturbativos", justamente de  $O(e^{-1/\lambda})$ .  
NO desarrollable en Taylor  $\nearrow$

Habiendo ya aprendido a calcular funciones de correlación, nos falta todavía entender en qué forma éstas codifican la información de las amplitudes de dispersión.

LS: 07/11/22

Para ello, consideremos primero nuevamente la función de 2 puntos  $G_2(x, x')$ , pero analizando su estructura sin recurrir a la expresión perturbativa.

Dado un conjunto completo de autoestados de  $\hat{H}$  y  $\hat{P}$ ,  $\{|E\rangle\}$ , (p.ej., los estados entrantes  $\{|p_1, \dots, p_N; +\rangle\}$  o salientes  $\{|p_1, \dots, p_N; -\rangle\}$ ) podemos escribir la relación de completitud

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{E \neq \Omega} |E\rangle\langle E|.$$

estados de 1, 2, ...  
partículas físicas

Por covariancia de Lorentz, cada estado en la suma pertenece a una familia de estados conectados entre sí por transformaciones

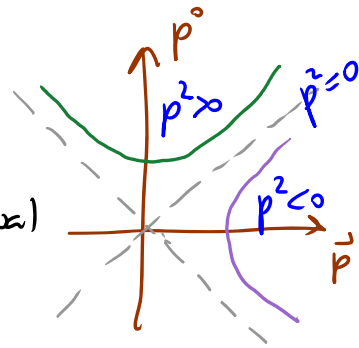
de Lorentz: si  $\hat{P}^\omega |E\rangle = p^\omega |E\rangle$ , entonces  $|E'\rangle \equiv \hat{U}(\Lambda) |E\rangle$  satisface  $\hat{P}^\omega |E'\rangle = p'^\omega |E'\rangle$  en  $p' = \Lambda p$ .

Si adoptamos la convención  $E_\Omega = 0$ , entonces por definición  $E_E > 0 \quad \forall E \neq \Omega$ . Esto implica en particular que



energía/momento total de las N partículas

el cuadrimento  $p^\omega$  de  $|\mathcal{E}\rangle$  debe ser tipo tiempo,  $p^2 > 0$ , pues de otra manera sería posible encontrar una  $\hat{\Lambda}$  con la cual  $|\mathcal{E}\rangle \rightarrow |\mathcal{E}'\rangle \equiv \hat{U}(\hat{\Lambda})|\mathcal{E}\rangle$  tenga energía



$E_{\mathcal{E}'} = \Lambda^0_\omega p^\omega \leq 0$ . (Suponer aquí que no hay partículas sin masa.)

Esto nos permite a su vez deducir que en la familia de  $|\mathcal{E}\rangle$  existen en particular uno o varios estados "en reposo"

$|\mathcal{E}_0\rangle$  tal que  $\hat{P}|\mathcal{E}_0\rangle = 0$ ,  $\hat{H}|\mathcal{E}_0\rangle = E_{\mathcal{E}_0}|\mathcal{E}_0\rangle$ ,

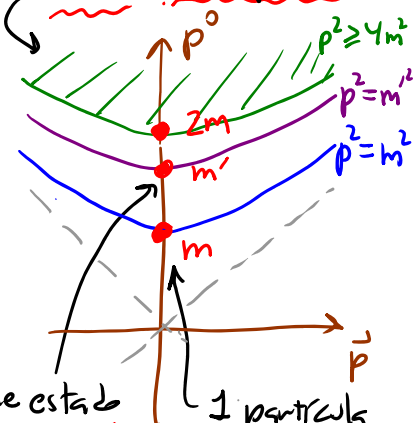
a partir del (de los) cuil(es) <sup>← pueden ser 1,2,3... partículas →</sup> podemos obtener al resto

de la familia en la forma  $|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle \equiv \hat{U}(\hat{L}(\vec{p}))|\mathcal{E}_0\rangle$ ,

con  $\hat{P}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle = \vec{p}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle$ ,  $\hat{H}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle = \sqrt{\vec{p}^2 + E_{\mathcal{E}_0}^2}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle$ .

Estados multiparticulares

Eligiendo una normalización relativista, podemos entonces escribir



$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\mathcal{E}_0 \neq \Omega} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathcal{E}_{\vec{p}}}} |\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle\langle\mathcal{E}_{\vec{p}}|$

estados "en reposo" de 1 o más partículas físicas

$E_{\mathcal{E}_{\vec{p}}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m_\mathcal{E}^2}$   
con  $m_\mathcal{E} \equiv E_{\mathcal{E}_0}$

Possible estado ligero (1 partícula) en reposo

1 partícula en reposo con masa física m ( $\neq m$  en  $\mathcal{L}$ )

Para no atorarnos en la notación, conviene desglosarla más:

Base para  $\mathcal{H}$

$$\equiv \{ | \epsilon \rangle \}$$

$$\equiv \{ | \Omega \rangle,$$

$$| \vec{p} \rangle,$$

Partículas físicas

$$| \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle,$$

(p.ej., estados entrantes)

$$| \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N \rangle$$

$\vdots$   
 $\vdots$   
 $\vdots$   
 $\}$   
 3N parámetros

$$\equiv \{ | \epsilon_{\vec{p}} \rangle \forall \vec{p} \}$$

estados genéricos, referidos al  $| \epsilon_0 \rangle$  correspondiente

$$\hat{P} | \epsilon_{\vec{p}} \rangle = \vec{p} | \epsilon_{\vec{p}} \rangle$$

Eigenvalores

bajo  $\hat{P}, \hat{H}$

$$\vec{p}=0, E_{\Omega}=0$$

$$\vec{p}, E_{\vec{p}}$$

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2, E_{\vec{p}}=E_{\vec{p}_1}+E_{\vec{p}_2}$$

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\dots+\vec{p}_N, E_{\vec{p}}=E_{\vec{p}_1}+\dots+E_{\vec{p}_N}$$

Lorentz

3 parámetros

$$\leftarrow | \Omega \rangle$$

$L(\vec{p})$

$$\leftarrow | \vec{0} \rangle$$

$$\leftarrow | \vec{p}'_1, -\vec{p}'_1 \rangle$$

$$\leftarrow | \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_{N-1}, -\vec{p}'_1, \dots, -\vec{p}'_{N-1} \rangle$$

3(N-1) parámetros

$$\equiv \{ | \epsilon_0 \rangle \}$$

estados en el marco del centro de masa  $\hat{P} | \epsilon_0 \rangle = 0$

bajo  $\hat{H}$

$$E_{\Omega}=0$$

$$E_{\vec{0}}=m$$

$$E = 2\sqrt{\vec{p}'_1{}^2 + m^2} \geq 2m$$

Insertando esta descomposición de  $\hat{1}$  en  $G_2(x, x')$ , tenemos

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(x') \} | \Omega \rangle = \theta(x^0 - x'^0) \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(x') | \Omega \rangle$$

$$+ \theta(x'^0 - x^0) \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x') \hat{\varphi}_H(x) | \Omega \rangle$$

$\rightarrow$  normalmente valor esperado en el vacío (vac) es cero

$$= \theta(x^0 - x'^0) \left[ \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x') | \Omega \rangle \right]$$

amplitud de que  $\hat{\varphi}_H(x)$  cree  $|\varepsilon_p\rangle$  a partir de  $|\Omega\rangle$

$$+ \sum_{\varepsilon_p \neq \Omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\varepsilon_p}} \left[ \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x) | \varepsilon_p \rangle \langle \varepsilon_p | \hat{\varphi}_H(x') | \Omega \rangle \right] + \theta(x'^0 - x^0) [x \leftrightarrow x']$$

p. 221

$$\langle \Omega | e^{i\hat{p} \cdot x} \hat{\varphi}_H(0) e^{-i\hat{p} \cdot x} | \varepsilon_p \rangle = \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(0) | \varepsilon_p \rangle e^{-i\hat{p} \cdot x} \Big|_{\hat{p}^0 = E_{\varepsilon_p}}$$

$$\langle \Omega | \hat{U}(\underline{L}(\hat{p})) [\hat{U}(\underline{L}(\hat{p}))^{-1} \hat{\varphi}_H(0) \hat{U}(\underline{L}(\hat{p}))] \hat{U}(\underline{L}(\hat{p}))^{-1} | \varepsilon_p \rangle$$

$\langle \Omega |$        $\hat{\varphi}_H(0)$  p. 221       $| \varepsilon_p \rangle$

es decir,

$$G_2(x, x') = \theta(x^0 - x'^0) \sum_{\varepsilon_p \neq \Omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \Omega | \hat{\varphi}_H(0) | \varepsilon_p \rangle|^2}{2E_{\varepsilon_p}} e^{-i\hat{p} \cdot (x - x')} \Big|_{\hat{p}^0 = E_{\varepsilon_p}}$$

$$+ \theta(x'^0 - x^0) [x \leftrightarrow x'] .$$

Esto se puede reescribir en la forma

en general  $\neq 0$  incluso para 2, 3, ... partículas

$$G_2(x, x') = \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\theta(x^0 - x'^0)}{2E_{\epsilon_p}} e^{-ip \cdot (x - x')} + \frac{\theta(x'^0 - x^0)}{2E_{\epsilon_p}} e^{ip \cdot (x - x')} \right] |\langle \epsilon_0 | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2$$

$p^0 = E_{\epsilon_p}$

↑ estado de 1, 2, 3, ... partículas físicas

$$\int \frac{d^4 p}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m_\epsilon^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - x')} \quad (\text{ver pp. 21-23}),$$

↑  $m_\epsilon \equiv E_{\epsilon_0}$  energía del correspondiente estado "en reposo"

o lo que es lo mismo,

$$G_2(x, x') = \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\epsilon^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - x')} |\langle \epsilon_0 | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2$$

$$\equiv K_F(x - x'; m_\epsilon^2)$$

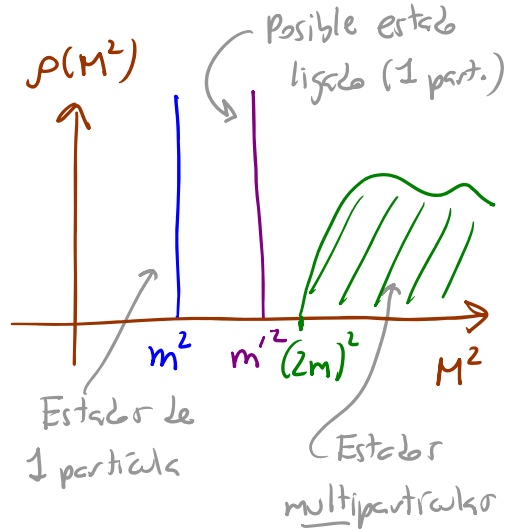
← propagador de Feynman para Klein-Gordon con masa  $m_\epsilon \equiv E_{\epsilon_0}$

Definimos la "densidad espectral"

$$\rho(M^2) \equiv \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \delta(M^2 - m_\epsilon^2) |\langle \epsilon_0 | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2,$$

= probabilidad de que  $\hat{\phi}_H(0)$  cree un estado con 'masa' (energía en reposo)  $M$  al actuar sobre el vacío

(se puede mostrar que  $\int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) = 1$ ).



Y obtenemos entonces la "representación espectral" (o de Källén-Lehmann) del propagador en la teoría interactuante,

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(x') \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(M^2) \rho(M^2) K_F(x-x'; M^2).$$

Vemos aquí que  $G_2(x, x')$  involucra a la misma función  $K_F(x-x')$  que el propagador libre  $G_2^{(0)}(x, x')$ , pero evaluada con las 'masas' físicas  $M^2 = m_\epsilon^2 = \{m^2, m'^2\} \cup [(2m)^2, \infty)$  que figuran en el espectro del Hamiltoniano completo  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ , y que corresponden a estados creados por  $\hat{\varphi}_H(0)$  a partir de  $|\Omega\rangle$ .

Podemos notar en particular que la contribución a la densidad espectral  $\rho(M^2)$  que proviene de los estados de 1 partícula  $|\vec{p}\rangle$  con masa física (medible experimentalmente)  $m^2$  está aislada del resto,

$$\rho(M^2) = \delta(M^2 - m^2) \underbrace{|\langle \vec{0} | \hat{\varphi}_H(0) | \Omega \rangle|^2}_{p. 429} + \begin{matrix} \text{ nada más hasta} \\ M^2 \geq m'^2 \approx (2m)^2 \end{matrix}$$

$|\langle \vec{p} | \hat{\varphi}_H(0) | \Omega \rangle|^2 \equiv Z$  "cte. de renormalización del campo"

= probabilidad de que  $\hat{\varphi}_H(0)$   
(ó  $\hat{\varphi}_H(x)$ ) cree una partícula

( $\zeta=1$  en la teoría libre;  $\zeta < 1$  en la teoría interactuante).

Si examinamos la contribución de estos estados al propagador interactuante expresado en espacio de momentos,

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(0) \} | \Omega \rangle$$

$\uparrow$  función solo de  $p^2$  (por Lorentz)       $G_2(x, x') = G_2(x-x')$  en  $x'=0$

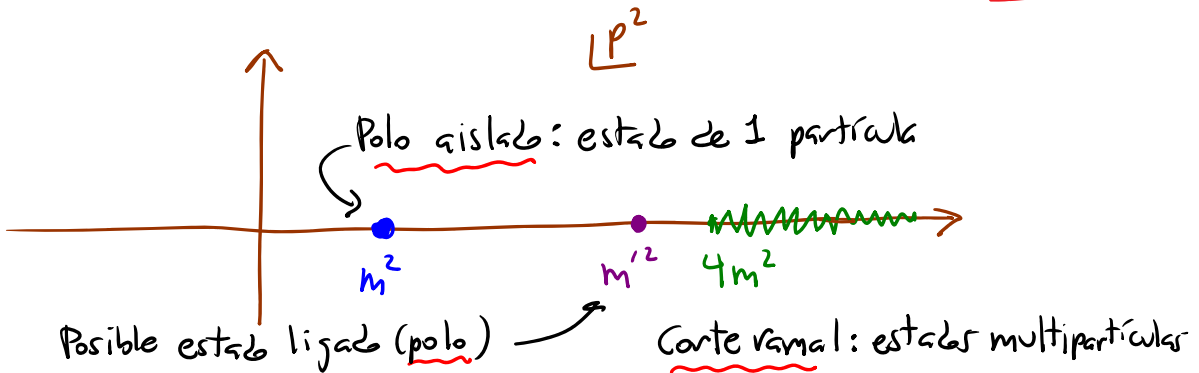
$$\stackrel{P.431}{=} \int d^4x e^{ip \cdot x} \int_0^\infty d(M^2) K_F(x; M^2) \rho(M^2)$$

$$= \int_0^\infty d(M^2) \underbrace{\tilde{K}_F(p; M^2)}_{\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}} \rho(M^2)$$

$\int_0^\infty d(M^2 - m^2) \zeta + \text{vack hasta } M^2 \gtrsim (2m)^2$   
 $\uparrow$  masa física

$$= \frac{i\zeta}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty d(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \rho(M^2)$$

vemos que los estados de 1 partícula aparecen como un polo:



La lección principal aquí es que buscando este polo en  $\tilde{G}_2(p)$  podemos determinar la masa física  $m^2$  de las partículas asociadas al campo interactuante  $\hat{\varphi}(x)$ . Esta masa, medible experimentalmente, representa directamente el eigenvalor del Hamiltoniano completo  $\hat{H}$  en el eigenestado  $|0\rangle$  que describe a 1 partícula en reposo (o, más en general, el eigenvalor del Casimir  $\hat{P}^2 \equiv \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu$  en la rep  $\{|p\rangle\}$ ).

L35: 31/10/16 (tómala repisón)

El valor de  $m^2$ , la masa física de las partículas, recibe una contribución de las interacciones, y por tanto en general DIFIERE de la 'masa desnuda' que figura en el Hamiltoniano libre  $\hat{H}_0$ , y que a partir de ahora denotaremos  $m_0^2$ :

$$\hat{H}_0 = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \hat{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\varphi}^2 \right) \leftrightarrow \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2.$$

Es decir, en la teoría libre encontramos que

$$\tilde{G}_2(p) = \tilde{G}_2^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \text{ y de aquí deducimos}$$

que  $m^2 = m_0^2$  (y  $Z = 1$ ); pero para  $\lambda \neq 0$  el polo de  $\tilde{G}_2(p)$  en general estará situado en  $p^2 = m^2 \neq m_0^2$  (y tendrá residuo  $Z < 1$ ).

L33: 24/09/17







Si denotamos

$$\text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} \equiv -i \Delta m^2(p^2),$$

veamos que tenemos una serie geométrica:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(p) &= \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} \\ &= \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[ (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right] + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[ (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left\{ 1 + \left[ (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right] + \left[ (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{1}{1 - (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}} \right\}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon}$$

← Serie converge solo si  
 $\left| \frac{\Delta m^2}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right| < 1$ , lo cual  
esperamos como  
frecuencia de  $\Delta m^2 \propto \lambda$ .

•  
← NO hay polo en  $p^2 = m_0^2$

Comparando con el resultado exacto según la representación espectral de Källén-Lehmann (KL), p. 432,

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots,$$

vemos que la masa física  $m^2$  es por definición el valor quizado de  $p^2$  que resuelve la ecuación

$$\left[ p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) \right]_{p^2=m^2} = 0 \iff m^2 = m_0^2 + \Delta m^2(m^2).$$

437: 09/11/22

Intuitivamente, esto nos dice que

$$-i\Delta m^2 = \text{---} \textcircled{\text{IIP}} \text{---} = \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{OO}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \dots$$

codifica la diferencia entre la "partícula libre"  $\hat{a}_p^\dagger |0\rangle$  y el estado  $|\vec{p}\rangle$  (entrante=saliente) que en verdad representa a 1 partícula física en la teoría con  $\lambda \neq 0$ . La partícula física puede visualizarse como hecha de una especie de nube de "partículas virtuales" que constantemente aparecen y desaparecen.

$-i\Delta m^2$  se conoce como su "autoenergía". Además, dado que

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon} \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) [1 - \Delta m^2(m^2)]}$$

$$\Delta m^2(m^2) + \frac{d\Delta m^2(p^2)}{d(p^2)} \Big|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) + \dots \quad \uparrow \equiv \frac{d\Delta m^2}{d(p^2)}$$

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

podemos deducir también que la constante de renormalización

del campo

$$Z \equiv |\langle \vec{p} | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2 = \frac{1}{1 - \Delta m^2(m^2)}$$

Con estas fórmulas podemos calcular  $m^2$  y  $Z$  de manera perturbativa. Notando que

$$i\Delta m^2(p^2) = \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots$$

claramente tendremos  $m^2 = m_0^2 + \mathcal{O}(\lambda)$  y  $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$ .

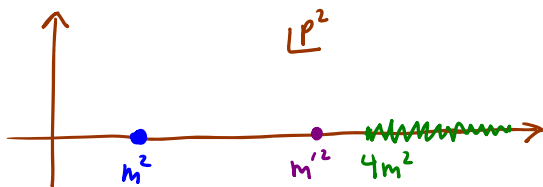
Con KL sabemos además que el propagador interactuante

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x) \hat{\phi}_H(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon}$$

contiene para  $p^2 \geq 4m^2$  información sobre estados multipartículas,

lo cual no es sorprendente en vista de la forma de los diagramas

que se incluyen en  $i\Delta m^2(p^2) = \underbrace{\text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \dots}_{\text{diagrams}}$



cundo  $p^2 \geq (2m)^2$ , las partículas intermedias pueden ser reales en lugar de "virtuales"

Habiendo entendido ya la manera en que las partículas físicas aparecen en  $\tilde{G}_2(p)$ , podemos encontrar de modo similar polos que corresponden a partículas físicas en

el correlador de N puntos en espacio de momentos,

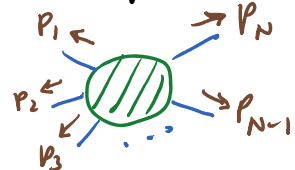
fuera de la capa de masa

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{ip_1 \cdot x_1} \dots e^{ip_N \cdot x_N} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle$$

notar signos

$$\propto (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_N) \cdot G_N(x_1, \dots, x_N)$$

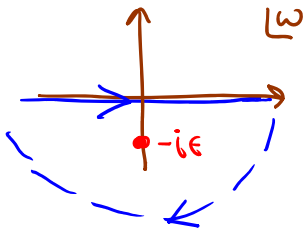
depende solo de diferencias  $x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots, x_1 - x_N$



Para mostrar esto, consideremos primero la región de la

integral  $\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1^0 d^4x_2^0 \dots d^4x_N^0$  donde  $x_1^0 > \max(x_{n>1}^0) \equiv t$  :  
 restringe a  $\int_t^{\infty} d^4x_1^0$

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) = \int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \left[ \theta(x_1^0 - t) \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle \right.$$



$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega(x_1^0 - t)}}{\omega + i\epsilon} + \theta(t - x_1^0) \dots \right]$$

Insertar (p. 428) ignore

$$\hat{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{\epsilon_{\vec{q}} \neq \Omega} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} |\epsilon_{\vec{q}}\rangle \langle \epsilon_{\vec{q}}|$$

$$= \sum_{\epsilon_{\vec{q}} \neq \Omega} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \left[ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\epsilon} e^{-i\omega(x_1^0 - t)} \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) | \epsilon_{\vec{q}} \rangle \right.$$

$$\left. \times \langle \epsilon_{\vec{q}} | T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle + \dots \right] \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) | \epsilon_{\vec{q}} \rangle e^{-iq \cdot x_1} \Big|_{\vec{q} = \vec{p}_1}^{\omega = E_{\vec{q}}}$$

(ver p. 429)

La integral sobre  $x_1^\mu$  se descompone entonces en

$$\int d^4x_1^0 e^{ix_1^0(p_1^0 - \omega - E_{\vec{q}})} \int d^3x_1 e^{-i\vec{x}_1 \cdot (\vec{p}_1 - \vec{q})} = (2\pi) \delta(p_1^0 - \omega - E_{\vec{q}}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}),$$

Usando estas deltas de Dirac para eliminar las integrales sobre  $\vec{q}$  y  $\omega$ , tenemos

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) = \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \frac{1}{2E_{\epsilon_0}} \int d^4x_2 \dots e^{ip_2 \cdot x_2} \dots \frac{i e^{i(p_1^0 - E_{\epsilon_0})t}}{p_1^0 - E_{\epsilon_0} + i\epsilon}$$

$$\cdot \langle \Omega | \hat{\phi}_H(0) | \epsilon_0 \rangle \langle \epsilon_0 | T \{ \hat{\phi}_H(x_2) \dots \} | \Omega \rangle$$

+ ...  
 ↖ otros órdenes temporales

El término en la suma que corresponde al estado de 1 partícula,  $|\epsilon_0\rangle = |\vec{0}\rangle$ , contribuye aquí nuevamente un polo aislado:

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots) = \int d^4x_2 \dots e^{ip_2 \cdot x_2} \dots \frac{i e^{i(p_1^0 - E_{\vec{p}_1})t}}{2E_{\vec{p}_1} p_1^0 - E_{\vec{p}_1} + i\epsilon} \langle \Omega | \hat{\phi}_H(0) | \vec{0} \rangle \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\phi}_H(x_2) \dots \} | \Omega \rangle$$

↖  $\equiv \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2}$

$$\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{(p_1^0 + E_{\vec{p}_1})}{2E_{\vec{p}_1}} e^{i(p_1^0 - E_{\vec{p}_1})t} \sqrt{2}$$

→ 1 si  $p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1}$

p. 431

+ ...  
 ↖ términos de estados multiparticulares y de otros órdenes temporales

Si  $p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1}$  ( $\Rightarrow p_1^2 \rightarrow m^2$   $\forall p_1^0 > 0$ ) este término diverge y da por tanto la contribución dominante a la función de correlación (singularidad que proviene de la región  $x_1^0 \rightarrow +\infty$ ):

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots) \xrightarrow[p_1^0 \rightarrow +E_{p_1}]{\frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon}} \int d^4x_2 \dots e^{ip_2 \cdot x_2} \dots \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

Vemos entonces que, al llevar a  $p_1^0$  a la capa de masa así,  
 encontramos un polo en cuyo residuo se ha reemplazado a  $\int d^4x_1 e^{ip_1 \cdot x_1} \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) \dots$  por el estado de 1 partícula saliente  $\langle \vec{p}_1 |$ .  
← por región  $x_1^0 \rightarrow +\infty$  en  $\int d^4x_1$       ← futuro remoto  
L36: 05/11/18      L33: 26/04/17      ↑ porque  $x_1^0 \rightarrow +\infty$

De manera similar, podemos considerar, p.ej., la región de integración  $x_N^0 < \min(x_{n < N}^0) \equiv t'$  en este mismo término, donde

$$T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_{N-1}) \hat{\varphi}_H(x_N) \} = T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_{N-1}) \} \hat{\varphi}_H(x_N)$$

y tenemos por tanto ↑ insertar ↑

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots p_N) \sim \frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \int d^4x_2 \dots d^4x_N e^{ip_2 \cdot x_2} \dots e^{ip_N \cdot x_N} \\ \cdot \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t' - x_N^0)}}{\omega + i\epsilon} \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_{N-1}) \} | \epsilon_{\vec{q}} \rangle \langle \epsilon_{\vec{q}} | \hat{\varphi}_H(x_N) | \Omega \rangle + \dots$$

$$\underbrace{\theta(t' - x_N^0)}_{\theta(t' - x_N^0)} \underbrace{\langle \epsilon_{\vec{q}} | \hat{\varphi}_H(0) | \Omega \rangle e^{i\vec{q} \cdot x_N}}_{\substack{\vec{q} = E_{\vec{q}} \\ \vec{q} = E_{\vec{q}}}}$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} dx_N^0 e^{ix_N^0(p_N^0 + \omega + E_{\vec{q}})} \int d^3x_N e^{-i\vec{x}_N \cdot (\vec{p}_N + \vec{q})} = (2\pi)^4 \delta(p_N^0 + \omega + E_{\vec{q}}) \delta^{(3)}(\vec{p}_N + \vec{q})$$

que diverge ahora cuando  $p_N^0 \rightarrow -E_{\vec{q}}$ .

Vemos que si tomamos  $p_N^0 \rightarrow -E_{\vec{p}_N} = -\sqrt{\vec{p}_N^2 + m^2}$  encontraremos nuevamente un polo donde logremos aislar otra vez la contribución de un estado de 1 partícula,

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots p_N) \xrightarrow[\substack{p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1} \\ p_N^0 \rightarrow -E_{\vec{p}_N}}]{\frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{z}}{p_N^2 - m^2 + i\epsilon}} \int d^4x_2 \dots d^4x_{N-1} e^{ip_2 \cdot x_2} \dots e^{ip_{N-1} \cdot x_{N-1}} \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\psi}_H(x_2) \dots \hat{\psi}_H(x_{N-1}) \} | -\vec{p}_N \rangle.$$

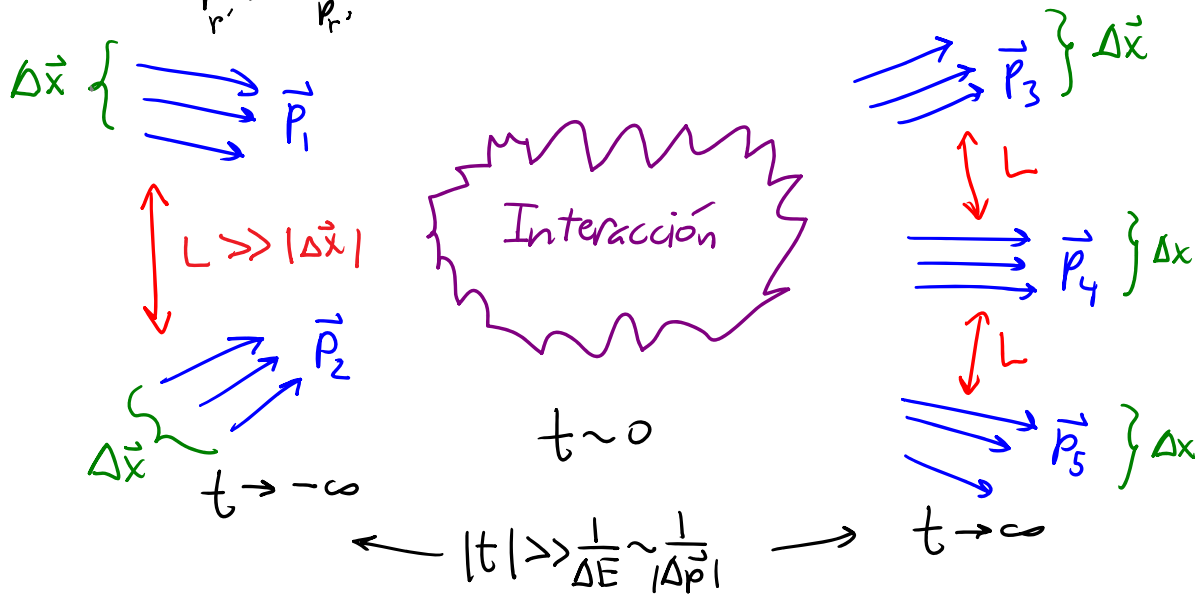
Es decir, haciendo que  $p_N^0$  se aproxime a la capa de masa de esta manera, el efecto neto es reemplazar a  $\int d^4x_N e^{ip_N \cdot x_N} \hat{\psi}_H(x_N) | -\vec{p}_N \rangle$  por el estado de 1 partícula entrante  $| -\vec{p}_N \rangle$ . El que este estado ahora sea entrante y no saliente se debe en última instancia al hecho de que la singularidad aquí proviene de la región de integración  $x_N^0 \rightarrow -\infty$ .

Es posible continuar de esta manera, reemplazando cada operador de campo  $\hat{\psi}_H(x_n)$  con una partícula en el estado entrante ( $x_n^0 \rightarrow -\infty$ ) o saliente ( $x_n^0 \rightarrow +\infty$ ), dependiendo de si buscamos el polo en  $p_n^0 \rightarrow -E_{\vec{p}_n}$  ó  $p_n^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_n}$ , respectivamente. Estrictamente hablando, en los pasos intermedios resulta necesario



utilizar paquetes de onda, para asegurarnos de que las distintas partículas presentes en los estados inicial/final no interfieran entre sí [ver p.ej. Peskin 7.2, o para otro enfoque, Greiner 9.4]. Tomando el límite en el que los paquetes de onda estén más y más localizados en espacio de momentos recuperamos la definición de los estados entrantes y salientes, respectivamente, cuyo traslape es precisamente la amplitud de dispersión o matriz S (ver pp. 105-108):

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots p_N) \xrightarrow[p_r^0 \rightarrow -E_{p_r}]{p_r^0 \rightarrow +E_{p_r}} \frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{i\sqrt{z}}{p_N^2 - m^2 + i\epsilon} \langle \underbrace{\vec{p}_{I_1} \dots \vec{p}_{I_n}}_r ; - | \underbrace{\vec{p}_{I_{n+1}} \dots \vec{p}_{I_N}}_{r'} ; + \rangle$$



Obtenemos entonces la "fórmula de reducción" de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ)


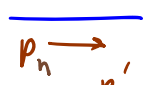
$$\langle \underbrace{p'_1 \dots p'_N}_{p_n \circ > 0}; - | \underbrace{p_1 \dots p_N}_{p_n \circ > 0}; + \rangle = \lim_{\substack{p_n^{1/2} \rightarrow m^2 \\ p_n^2 \rightarrow m^2}} (\sqrt{Z})^{-(N'+N)} \frac{p_1'^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_N'^2 - m^2}{i} \frac{p_1^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_N^2 - m^2}{i} \tilde{G}_{N'+N}(p'_1, \dots, p'_N, -p_1, \dots, -p_N)$$

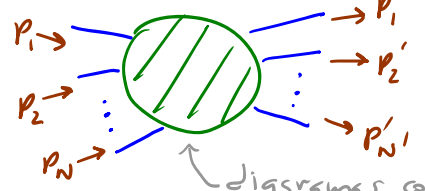
$$\int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \} | \Omega \rangle$$

que establece la relación NO PERTURBATIVA entre amplitudes de dispersión y funciones de correlación de  $\hat{\phi}_H$ . De hecho, es posible reemplazar aquí a  $\hat{\phi}_H(x)$  con cualquier operador local  $\hat{O}(x)$  tal que  $\langle \hat{p} | \hat{O}(0) | \Omega \rangle \equiv \sqrt{Z_O} \neq 0$ , reemplazando también  $\sqrt{Z} \rightarrow \sqrt{Z_O}$ .

$\sim \langle \hat{p}_1 | \hat{p} \rangle + \langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 | \hat{p} \rangle + \langle \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3 | \hat{p} \rangle + \dots$ , tal como ocurre con  $\hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle$

Ahora, ¿qué significa esto en términos de diagramas de Feynman?

Hemos visto ya (p.434) que la transformada de Fourier  $G_{N'+N} \rightarrow \tilde{G}_{N'+N}$  reemplaza a los puntos externos  por patas externas con momento definido , de modo que

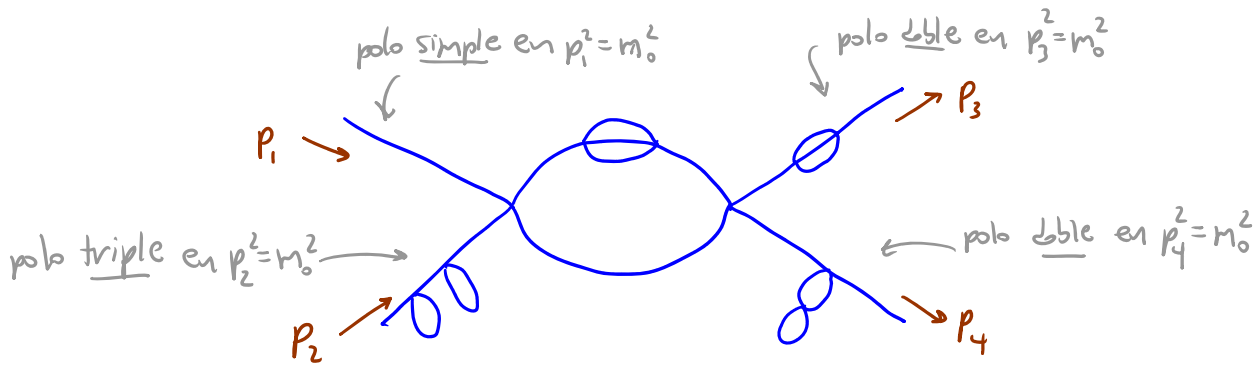
$$\tilde{G}_{N'+N}(p'_1, \dots, p'_N, -p_1, \dots, -p_N) = \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{fuera de la capa}} \text{diagramas conexos}$$


En un diagrama dado, cada pata externa contribuye

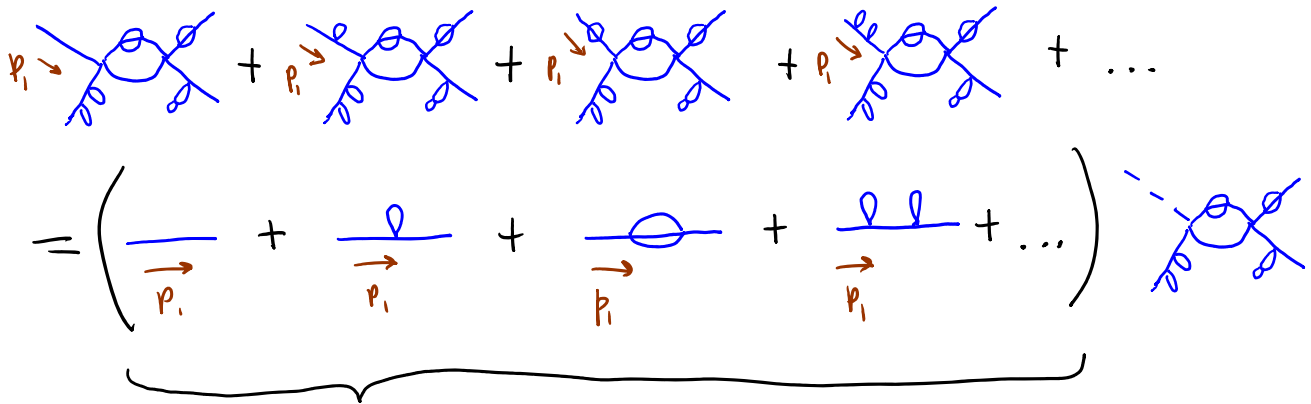
(justo como cualquier otra línea) un factor de  $\tilde{G}_2^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$ , es decir, un polo en  $p_n^2 = m_0^2$ . La fórmula de LSZ

nos pide buscar NO esto, sino los polos en  $p_n^2 = m^2 \forall n$ .

Por nuestro análisis de  $\tilde{G}_2(p)$  en las pp. 435-37, sabemos que tales polos provienen NO de un diagrama dado, como p.ej.,



sino de la suma de toda una familia de diagramas. P.ej., el polo en  $p_1^2 = m^2$  proviene de



$$\tilde{G}_2(p_1) = \text{diagram with shaded circle} = \text{diagram with 1 loop} + \text{diagram with 2 loops} + \dots$$

$$\stackrel{p. 436}{=} \frac{i}{p_1^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p_1^2 \rightarrow m^2} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Realizando el mismo tipo de suma infinita para encontrar los

polos en  $p_2^2 \rightarrow m^2$ ,  $p_3^2 \rightarrow m^2$ ,  $p_4^2 \rightarrow m^2$ , obtenemos

$$= \left( p_1 \rightarrow \text{pole} \right) \left( p_2 \rightarrow \text{pole} \right) \left( p_3 \rightarrow \text{pole} \right) \left( p_4 \rightarrow \text{pole} \right) \times \text{bubble}$$

$$\sim \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{iZ}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{iZ}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon}$$

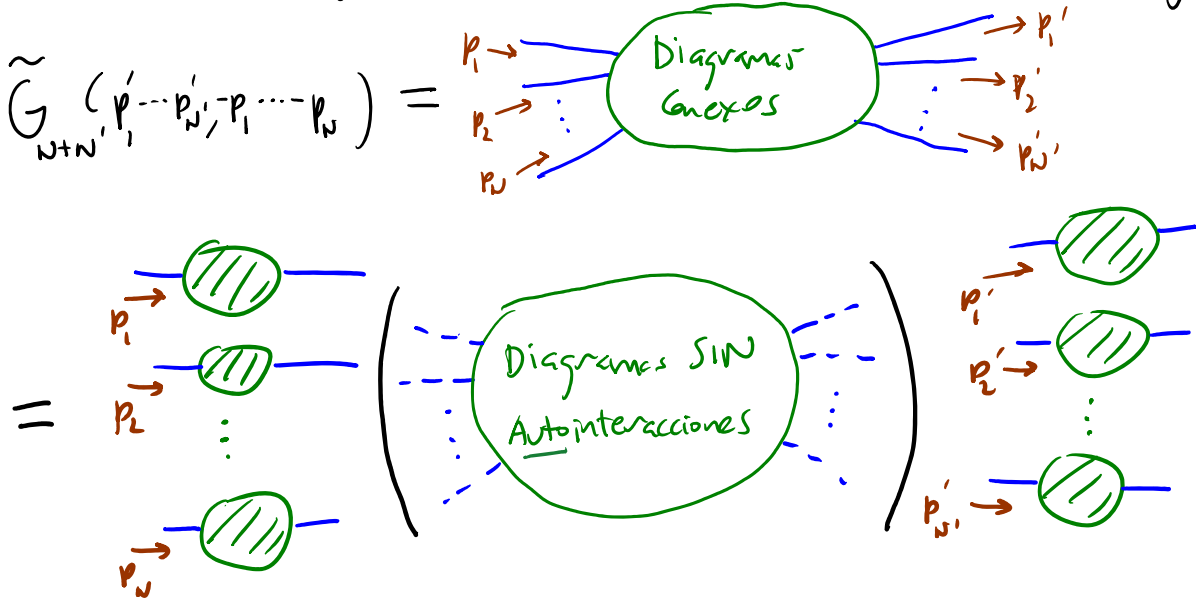
Es decir, es solo después de sumar todos estos diagramas y tomar  $p_n^2 \rightarrow m^2$  que estamos describiendo un proceso de dispersión de partículas verdaderamente físicas (a diferencia de las partículas libres asociadas a las patas externas originales  $\overline{p_n \rightarrow} = G_2^{(0)}(p_n)$ ).

El residuo del polo múltiple en este ejemplo con 4 patas externas es entonces

$$(iZ)^4 \times \text{bubble}$$

la porción central del diagrama original, que describe a las partículas interactuando entre sí, a diferencia de las porciones omitidas, que describen a cada partícula interactuando solo consigo misma.

Para el caso más general  $N \rightarrow N'$  encontramos de manera análoga

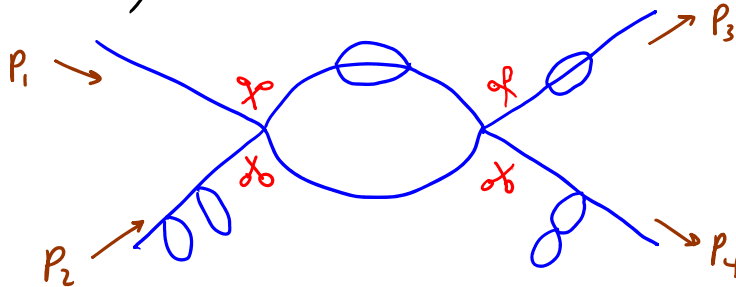


Según la fórmula LSZ, la amplitud de dispersión es  $(i\sqrt{z})^{-(N+N')}$  multiplicado por el residuo del polo de  $\tilde{G}_{N+N}$  en  $p_1^2 = \dots = p_N^2 = m^2, p'_1{}^2 = \dots = p'_{N'}{}^2 = m^2$ , lo cual corresponde a eliminar el factor de  $\tilde{G}_2(p_n) = \text{---} \text{---} \text{---}$  que obtuvimos arriba (después de la suma) para cada pata externa, llevar  $p_n^m, p_n'^m$  a la capa de masa  $\forall n$ , y asociar por último un factor de  $\sqrt{z}$  a cada pata (porque  $\tilde{G}_2$  incluye un factor de  $z$ ). Es decir,

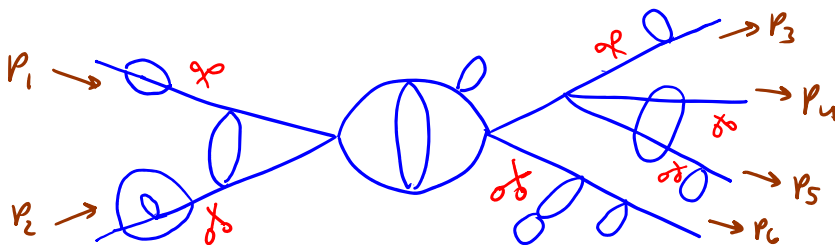
$$\langle p'_1 p'_2 \dots p'_{N'} ; - | p_1 p_2 \dots p_N ; + \rangle = \left( \text{Suma sobre diagramas conexos y amputados} \right)$$

The diagram shows a central green oval with a cross-hatch pattern, representing the sum of connected and amputated diagrams. It has  $N$  incoming blue lines labeled  $p_1, p_2, \dots, p_N$  and  $N'$  outgoing blue lines labeled  $p'_1, p'_2, \dots, p'_{N'}$ . An arrow points to the oval with the text "Suma sobre diagramas conexos y amputados".

donde "amputar" un diagrama significa eliminar las patas externas, cortando cada una de ellas en el lugar más interno posible. P.ej., en el diagrama que vimos recientemente,



habría que cortar en donde aparecen las tijeras: empezando en la punta de cada pata y caminando hacia el centro del diagrama, encontramos el último lugar donde la pata se desconecta del diagrama al convertirse 1 sola línea, y cortamos precisamente ahí, descartando incluso el propagador libre asociado a esa última línea (que por esta razón denotaremos por ahora como puntada). Otro ejemplo sería



En la práctica, por supuesto, para restringirnos a diagramas amputados lo que hacemos es simplemente NO dibujar diagramas que tengan porciones que se deban amputar. Como hemos dicho, la explicación intuitiva es que esas porciones describen procesos de "autointeracción" que corrigen a las partículas libres  $|\vec{p}_n\rangle_{\text{I}} \equiv \sqrt{2E_n} \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle$  para convertirlos en partículas físicas  $|\vec{p}_n; \pm\rangle$ , análogamente a la manera en que las burbujas de vacío expresan la diferencia entre el vacío libre  $|0\rangle$  y el verdadero vacío  $|\Omega\rangle$ .

De hecho, es posible resumir la misma expansión diagramática que hemos encontrado escribiendo, en analogía con

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\psi}_{HI} \dots \hat{\psi}_{HN} \} | \Omega \rangle = \left( \langle 0 | T \{ \hat{\psi}_{\text{I}1} \dots \hat{\psi}_{\text{I}N} \exp[-i \int d^4y \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}^{\text{I}}(y)] \} | 0 \rangle \right)_{\text{parte conexa}}$$

$\hat{U}_{\text{I}}(\infty, -\infty)$

las amplitudes de dispersión en la forma

$$\langle p'_1 \dots p'_N; - | p_1 \dots p_N; + \rangle = \left( \sqrt{Z} \right)^{N+N'} \left( \langle p'_1 \dots p'_N; - | T \{ \exp[-i \int d^4y \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}^{\text{I}}(y)] \} | p_1 \dots p_N; + \rangle_{\text{I}} \right)_{\text{parte conexa y amputada}}$$

$\hat{U}_{\text{I}}(-\infty, \infty)$

autoestados de  $\hat{H}$       autoestados de  $\hat{H}_0$

ignorar correcciones al vacío      ignorar correcciones a partículas

En esta versión de la fórmula, al usar el teorema de Wick para reemplazar  $T\{\dots\} \rightarrow : \dots :$  No solo nos interesarán los términos donde todas las  $\hat{\phi}_I(y)$ 's estén contraídos entre sí, puesto que los estados inicial y final no son aquí simplemente el vacío libre  $|0\rangle$ .

P.ej., a diferencia del resultado  $\hat{\phi}_I^+(y)|0\rangle = 0$  que utilizábamos antes, tendríamos ahora  $\hat{\phi}_I^+(y)|\vec{p}\rangle \propto \hat{a}_{\vec{p}}^+$

$$\hat{\phi}_I^+(y)|\vec{p}\rangle_I = \left( \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik \cdot y} \right) (\sqrt{2E_p} \hat{a}_{\vec{p}}^+ |0\rangle)$$

↑  
proviene de  $\hat{\mathcal{L}}_{int}^I(y)$   
(↔ vértice de 4 patas)

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^+] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p})$$

$$= e^{-ip \cdot y} |0\rangle.$$

Resulta entonces natural definir un nuevo tipo de "contracción",

$$\underbrace{\hat{\phi}_I(y)|\vec{p}\rangle_I}_{\text{contracción}} \equiv e^{-ip \cdot y}, \quad \text{y de manera similar, } \underbrace{\langle \vec{p} | \hat{\phi}_I(y)}_{\text{contracción}} \equiv e^{ip \cdot y}.$$

Con esta definición, la receta para calcular cada elemento de matriz  $\langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_N | \hat{\phi}_I(y_1)^4 \dots \hat{\phi}_I(y_n)^4 | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N \rangle_I$  será nuevamente



Considerar todas las posibles contracciones de los  $4n+N+N'$  objetos - p.ej.  $\langle \underbrace{p'_1 p'_2}_{I_1} | \underbrace{\varphi_I(y) \varphi_I(y) \varphi_I(y) \varphi_I(y)}_{I_2} | p_1 p_2 \rangle_{I_3}$ .

Con esto evidentemente recuperaremos los mismos diagramas que obtuvimos antes de  $\langle \hat{\varphi}_{I_1} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N+N'}} \hat{\varphi}_{I_y}^4 \cdots \hat{\varphi}_{I_{y_n}}^4 | \hat{\varphi}_{I_0} \rangle$ .

Las fases  $e^{i p \cdot y}$  que provienen de los nuevos tipos de contracciones claramente darán, después de integrar sobre la posición del vértice correspondiente,  $\int d^4 y$ , una delta de Dirac que expresa igual que antes la conservación del cuadrimomento que fluye a través de ese vértice. Juntando todos estos elementos, es fácil verificar que la fórmula del final de la p. 448 en realidad es equivalente a nuestro resultado de la p. 446.

Al hablar de amplitudes de dispersión, es habitual definir un operador unitario  $\hat{S}$  que relacione a la base de estados entrantes con la de estados salientes,

$$|p_1 p_2 \cdots p_N; +\rangle = \hat{S} |p'_1 \cdots p'_N; -\rangle$$

$\hat{S}$  unitario porque preserva el producto interno

$$\left( \Rightarrow \langle p'_1 \cdots p'_N; - | = \langle p'_1 \cdots p'_N; + | (\hat{S}^\dagger)^{-1} = \langle p'_1 \cdots p'_N; + | \hat{S} \right),$$

de tal forma que los elementos de matriz de  $\hat{S}$  en cualquiera de estas 2 bases coinciden precisamente con las amplitudes de dispersión,

S de "streuung" = dispersion  
o "scattering"

$$\begin{aligned} \langle p'_1 \dots p'_N; - | p_1 \dots p_N; + \rangle &= \langle p'_1 \dots p'_N; + | \hat{S} | p_1 \dots p_N; + \rangle \\ &= \langle p'_1 \dots p'_N; - | \hat{S} | p_1 \dots p_N; - \rangle \\ &\equiv S_{p'_1 \dots p'_N; p_1 \dots p_N} \quad \text{"Matrix S"} \end{aligned}$$

Este lenguaje nos permite separar fácilmente

$$\hat{S} = \hat{1} + i \hat{T}$$

describe todos los posibles procesos  
no triviales de interacción entre  
las partículas

Expresa la posibilidad trivial de  
que las partículas simplemente  
"se sigan de frente" (que por  
supuesto existe solo para  $N=N'$ )

[38:11/11/22]

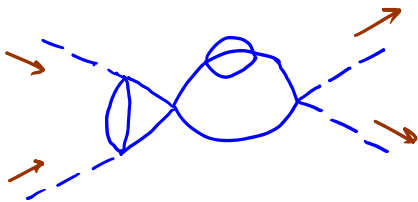
Con esta definición, entonces, para calcular

$$\begin{aligned} \langle p'_1 \dots p'_N; + | i \hat{T} | p_1 \dots p_N; + \rangle &\equiv \langle p'_1 \dots p'_N; + | \hat{S} | p_1 \dots p_N; + \rangle - \langle p'_1 \dots p'_N; + | p_1 \dots p_N; + \rangle \\ &= \langle p'_1 \dots p'_N; - | p_1 \dots p_N; + \rangle - \int_{N'} \sum_{\Pi} \prod_{I=1}^N (2\pi)^3 2p_I^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\Pi(I)} - \vec{p}_I) \quad \swarrow p \cdot 10^3 \\ &\quad \left( \text{permutaciones } \Pi: (12 \dots N) \rightarrow (\Pi(1)\Pi(2)\dots\Pi(N)) \right) \end{aligned}$$

de manera perturbativa, debemos omitir los diagramas triviales donde cada partícula entrante se conecta solo con 1 partícula saliente. En la práctica, nos interesan principalmente los casos donde el número de partículas inicial es  $N=2$  (como en las colisiones usuales en los aceleradores) o  $N=1$  (que sería relevante para considerar el decaimiento de una partícula inestable).

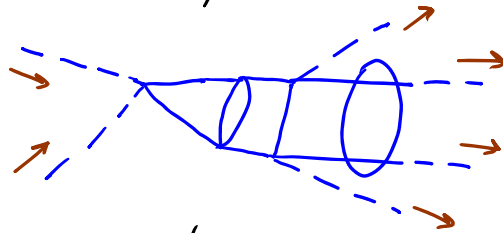
Pero con solo  $N \leq 2$  patas iniciales, los diagramas no triviales (aquellos que se incluyen en  $i\hat{T}$ ) serán todos de manera inevitable no solo conexos sino, de hecho, completamente conexos, es decir, tendrán todas sus patas externas conectadas entre sí.

P.ej.,  $N=2, N'=2$

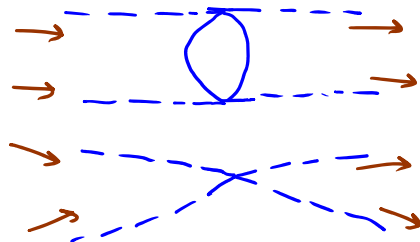


ó

$N=2, N'=4$



(pero no sucede lo mismo para, p.ej.,  $N=4, N'=4$  :



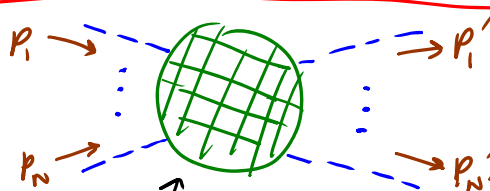
este diagrama,  
 induce en  $\langle p_1 \dots p_n | i\hat{T} | p_1 \dots p_n \rangle$ ,  
 es conexo pero  
 no completamente ).

Observando además que, por invariancia bajo translaciones, tendremos  $S_{p'_1 \dots p'_N; p_1 \dots p_N} \propto (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + \dots + p'_N - p_1 - \dots - p_N)$ , es habitual definir

$$\langle p'_1 \dots p'_N; + | i\hat{T} | p_1 \dots p_N; + \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + \dots + p'_N - p_1 - \dots - p_N) i\mathcal{M}(p_1 \dots p_N \rightarrow p'_1 \dots p'_N),$$

donde  $\mathcal{M}$  se conoce como el "elemento de matriz invariante", (o amplitud invariante), y es análoga a la amplitud de dispersión  $f(\theta, \varphi)$  de la mecánica cuántica no relativista, en cuanto a que codifica toda la información dinámica del proceso de dispersión.


Resumiendo lo visto hasta ahora, tenemos


$$i\mathcal{M}(p_1 \dots p_N \rightarrow p'_1 \dots p'_N) =$$



Suma sobre diagramas conexos y amputados

L35 = 28/04/17

con las siguientes reglas de Feynman en espacio de momentos:

1) Por cada propagador,  =  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ .  
 $\curvearrowright = m^2$  a orden más bajo

2) Por cada vértice,  =  $-i\lambda$ , imponiendo conservación del (cuadri)momento.

3) Por cada pata externa,  =  $\sqrt{z}$   
 $\curvearrowright = 1$  a orden más bajo

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes del diagrama, e integrar  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  sobre cada momento que quede indeterminado: 1 por cada lazo.


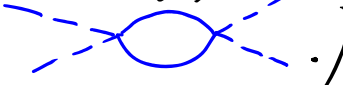
$$\left( \text{En } G_N(x_1, \dots, x_N) = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_N}{(2\pi)^4} \dots e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_N x_N} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{i}{k_N^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \right),$$

teníamos en la p. 421  $\left( \begin{matrix} \# \text{ de} \\ \text{integrales} \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} \# \text{ de} \\ \text{lazos} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} \# \text{ de puntas} \\ \text{externas} \end{matrix} \right) - 1$ ,

y al pasar a  $\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_N x_N} G_N(x_1, \dots, x_N)$

las integrales asociadas a las patas externas se eliminan, excepto

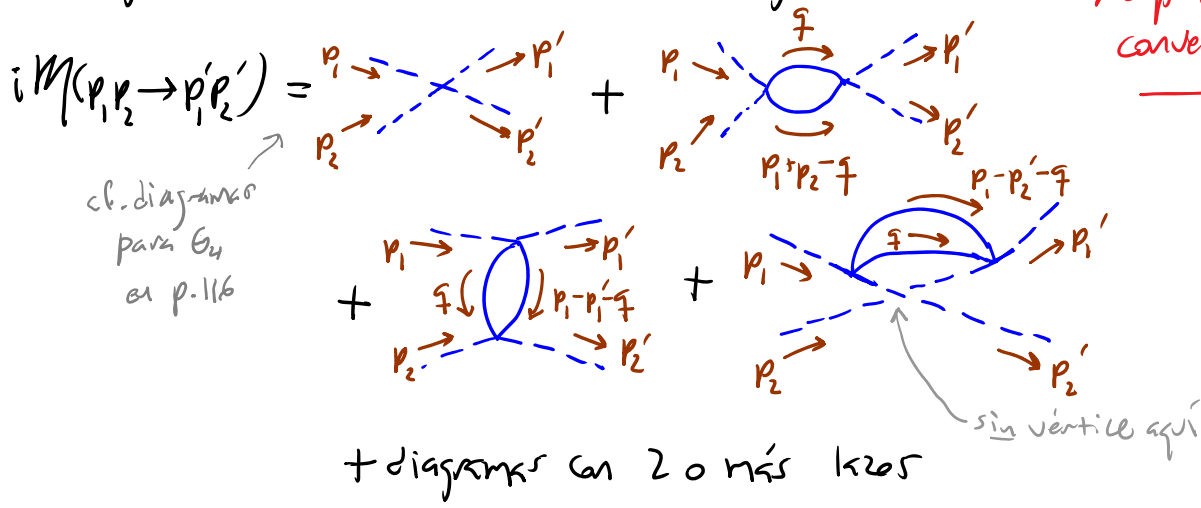
1 por la conservación de momento. Quedan así, p.ej.,

0 integrales en , y 1 en .)

5) Dividir entre el factor de simetría  $s$ .

[37.17: 07/11/18 (20 min extra)]

Un ejemplo de la aplicación de estas reglas sería



$$= -i\lambda(\sqrt{z})^4 + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 z^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

$$+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 z^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - p'_1 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

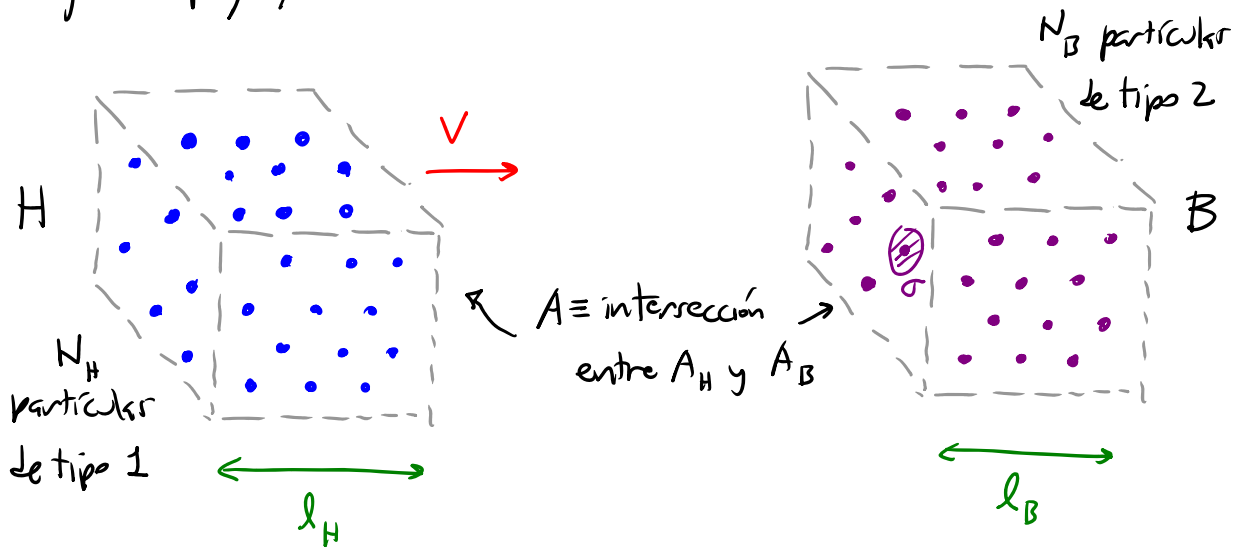
$$+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 z^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - p'_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

+ términos con 2 o más integrales

$= -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$ .  $\lambda$  es un parámetro controla la intensidad con la cual interactúan las partículas físicas

Ahora bien, los resultados experimentales para un proceso de dispersión 2 partículas  $\rightarrow$  N partículas se expresan no directamente en términos de  $M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, \dots, p'_N)$ , sino de la "sección eficaz" que mide el área efectiva que una de las

partículas entrantes le presenta a la otra, para el proceso en cuestión. Más concretamente, pensemos en una situación experimental típica, donde un haz  $H$  de partículas incide sobre un "blanco"  $B$  de partículas (posiblemente de un segundo tipo), con velocidad relativa  $v$



de tal manera que se producen un cierto número de colisiones binarias, cada una potencialmente con un resultado final distinto. En este contexto, la sección eficaz  $\sigma$  asociada a un cierto tipo de eventos de dispersión específicos se define expresando el número  $N_E$  de estos eventos en la forma

$$N_E = N_H N_B \frac{\sigma}{A} = (\rho_H l_H A) (\rho_B l_B A) \frac{\sigma}{A}$$

p.ej.,  $p+e \rightarrow p+e+\gamma$   
ó  $n+\nu_e$   
etc

← número/volumen

(donde  $\rho_H, \rho_B$  son densidades de número), es decir,

$$\sigma \equiv \frac{N_E}{\rho_H l_H \rho_B l_B A}$$

(definición simétrica bajo  $H \leftrightarrow B$ ).

La lógica de esta definición es que naturalmente  $N_E$  será proporcional a  $\rho_H, l_H, \rho_B, l_B, A$ , así que nos interesa normalizar nuestro conteo de eventos dividiendo entre todas estas cantidades (lo cual implica que  $[\sigma] = L^2$ ), para obtener un resultado dependiente solo de la física en cuestión, y no de los detalles del experimento.

Si las partículas H se desplazan con velocidad  $v$ , entonces avanzan la distancia  $l_H$  en un tiempo  $t = l_H/v$ , y podemos reexpresar

$$\sigma = \frac{N_E}{\rho_H (vt) \rho_B l_B A} = \frac{N_E/t}{(\rho_H v) (\rho_B l_B A)} = \frac{\text{tasa de eventos de interés}}{(\text{flujo de partículas H}) N_B}$$

← número/tiempo · (área transversal)

Quisiéramos ahora expresar  $\sigma$  en términos de la amplitud

$$\langle \underbrace{p'_1 \dots p'_N}_{\equiv f} ; - | \underbrace{p_1 p_2}_{\equiv i} ; + \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N) i \mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N)$$

La probabilidad de este proceso está dada por



$$P_{i \rightarrow f} = \frac{|\langle f|i \rangle|^2}{\langle i|i \rangle \langle f|f \rangle}.$$

Siendo más cuidadosos, habría que usar aquí paquetes de ondas [ver, p.ej., Peskin 4.5]; pero obtendremos el mismo resultado final con un argumento simplificado.

Recordando la normalización que adoptamos para nuestros estados de 1 partícula (p. 76),

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})}_{\int d^3x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}} \implies \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})}_V, \quad \text{V volumen del espacio}$$

y dado que  $\langle f|i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) i\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ ,

tenemos

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N)]^2 |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2}{(2E_1 V)(2E_2 V)(2E'_1 V) \dots (2E'_N V)}$$

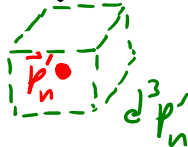
$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 (2E_1 V)^{-1} \dots (2E'_N V)^{-1}$$

$\underbrace{VT}$ : el proceso de dispersión ocurre en un cubo de volumen  $V=L^3$ , y tiene una duración  $T$ .

$P_{i \rightarrow f}$  representa la probabilidad de que el proceso de dispersión tenga como resultado final un conjunto de  $N$  partículas con momentos definidos con total precisión.

En el mundo real, por supuesto, utilizamos detectores que cuentan el número de partículas dentro de un cierto range de momentos, así que en realidad queremos calcular

$$dP_{i \rightarrow f \pm \delta f} \equiv P_{i \rightarrow f} \cdot dN_{f \pm \delta f}$$

$\swarrow$  número de estados finales  
 en el range " $f \pm \delta f$ " especificado  
 por 

Podemos determinar  $dN_{f \pm \delta f}$  notando que, en el espacio dentro de una caja de volumen  $V=L^3$ , los momentos están discretizados (debido a las condiciones de frontera impuestas en las paredes de la caja),  $\vec{p}' = \frac{2\pi}{L} \vec{n}'$  con  $\vec{n}' \in \mathbb{Z}^3$ . De modo que, para contar los estados, simplemente hay que sumar sobre los  $\vec{n}'$  involucrados,  $\sum_{\vec{n}'}$ , lo cual en el límite continuo corresponde a

integran sobre  $\vec{p}'$  con la medida de integración

$$\sum_{\vec{n}'} \rightarrow \int \frac{d^3 p'}{(2\pi/L)^3} = V \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}.$$

La probabilidad diferencial para el proceso de dispersión donde la partícula final  $n$  está en la región  $d^3 p'_n$  alrededor del valor  $\vec{p}'_n$  es entonces

$$\begin{aligned} dP_{i \rightarrow f \pm \delta f} &= P_{i \rightarrow f} dN_{f \pm \delta f} \\ &= \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_2 - p'_1 \dots - p'_N) V T |M_{i \rightarrow f}|^2 (2E_1 V)^{-1} (2E_2 V)^{-1} (2E'_1 V)^{-1} \dots (2E'_N V)^{-1} \right] \\ &\quad \cdot \left[ \sqrt{\frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3}} \dots \sqrt{\frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3}} \right], \end{aligned}$$

(que integrada sobre un cierto rango finito de los  $\vec{p}'_n$  nos dará una probabilidad a secas) y la tasa diferencial correspondiente es

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i \rightarrow f \pm \delta f} &\equiv \frac{dP_{i \rightarrow f \pm \delta f}}{T} \\ &= \underbrace{\frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \dots \frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3 2E'_N} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_2 - p'_1 \dots - p'_N)}_{\equiv d\pi'_N \text{ "espacio fase invariante"}} \frac{V T}{T} \frac{|M_{i \rightarrow f}|^2}{2E_1 V 2E_2 V} \end{aligned}$$

A partir de la definición que dimos en la p. 457, la sección eficaz diferencial (que integrada sobre cierto rango de momentos nos daría la sección eficaz a secas) está dada por

$$d\sigma = \frac{\text{tasa diferencial para los eventos de interés}}{(\text{flujo de partículas incidentes}) N_B}$$

$$\rho_H |\vec{v}_H| = \frac{N_H}{V} |\vec{v}_H|$$

Puesto que nosotros estamos trabajando con  $N_H = 1 = N_B$ , esto se traduce en (tomando arbitrariamente  $H \rightarrow 1, B \rightarrow 2$ )

$$d\sigma = \frac{d\Gamma_{i \rightarrow f} \pm d\sigma}{\frac{1}{V} |\vec{v}_1| \cdot 1} = \frac{d\Gamma'_N}{|\vec{v}_1|} \frac{|M_{i \rightarrow f}|^2}{2E_1 2E_2 V}$$

es decir,

$$d\sigma = \frac{d\Gamma'_N}{4E_1 |\vec{v}_1| m_2} |M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N)|^2$$

↑  $m_2$ , porque estamos considerando B en reposo

$|\vec{v}_1|$ , puesto que a partir de  $E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2}$ , la velocidad (de grupo) de la partícula es  $\vec{v}_1 = \frac{\partial E_1}{\partial \vec{p}_1} = \frac{\vec{p}_1}{E_1}$ .

$$\leftrightarrow \vec{p}_1 = \frac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}$$

Obtuvimos esta fórmula en el marco de referencia "del laboratorio", donde la partícula 2 (el 'blanco') está en reposo ( $\vec{v}_2 = \frac{\vec{p}_2}{E_2} = 0$ ). Pero notemos que, en este marco, el factor que aparece en el denominador de  $d\sigma$  se puede reescribir en la forma

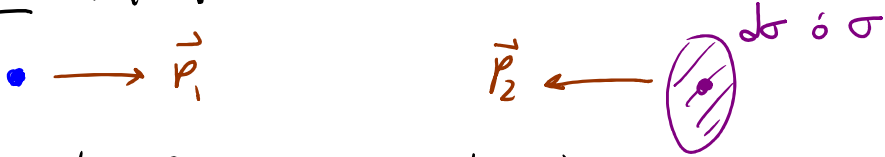
$$\begin{aligned} 4|\vec{p}_1| m_2 &= 4 \sqrt{(E_1^2 - m_1^2) m_2^2} \\ &= 4 \sqrt{[(E_1, m_2) - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2]^2 - m_1^2 m_2^2} \\ &= 4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \end{aligned}$$

y esta última versión es invariante bajo Lorentz. La fórmula

$$d\sigma = d\pi'_N \frac{|M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N)|^2}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}$$

es válida entonces en cualquier marco de referencia conectado con el "marco del laboratorio" ( $\vec{v}_2 = 0$ ) a través de un empujón en la dirección de  $\vec{v}_1 = \frac{\vec{p}_1}{E_1}$ , es decir, en cualquier marco de referencia donde los momentos  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$  sean colineales ( $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ ), porque al ser la sección eficaz  $d\sigma$  (ó  $\sigma$ ) un área transversa a este

tipo de empujones, tiene en todos estos marcos el mismo valor:



(Bajo transformaciones de Lorentz más generales,  $d\sigma$  no es invariante, sino que transforma como un área transversal a la  $\vec{v}_i$  del marco de laboratorio.)

Para  $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$  podemos simplificar

$$\begin{aligned} \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} &= \sqrt{(E_1 E_2)^2 + (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 - 2E_1 E_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - (E_1^2 - \vec{p}_1^2)(E_2^2 - \vec{p}_2^2)} \\ &= E_1 E_2 \sqrt{\frac{\vec{p}_1^2}{E_1^2} + \frac{\vec{p}_2^2}{E_2^2} - \frac{2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{E_1 E_2}} \\ &= E_1 E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| \\ &= E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \end{aligned}$$

velocidad relativa en el marco inercial en cuestión

y obtenemos finalmente

$$d\sigma = \int \prod_N' \frac{|M(p_1, p_2 \rightarrow p_1' \dots p_N')|^2}{4E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

$$\uparrow = \frac{d^3 p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'} \dots \frac{d^3 p_N'}{(2\pi)^3 2E_N'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - \dots - p_N') \quad p. 460$$

En particular, en el "marco del centro de masa", donde  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ,

$$E_1 E_2 \underbrace{\left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|}_{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \underbrace{|\vec{p}_1 E_2 - \vec{p}_2 E_1|}_{+\vec{p}_1} = |\vec{p}_1| \underbrace{(E_2 + E_1)}_{\equiv E_{CM}} \leftarrow \text{energía total en este marco}$$

Para el caso muy común de dispersión  $1+2 \rightarrow 1'+2'$ , podemos además simplificar la integral sobre el espacio fase invariante en este mismo marco (del centro de masa):

$$\begin{aligned} \int d\pi_2' &= \int \frac{d^3 p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'} \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'} (2\pi)^4 \delta(E_{CM} - E_1' - E_2') \delta^{(3)}(\vec{0} - \vec{p}_1' - \vec{p}_2') \\ &\Rightarrow \vec{p}_2' = -\vec{p}_1' \\ &= \int \frac{d^3 p_1'}{(2\pi)^3 4 \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_1^2} \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_2^2}} 2\pi \delta(E_{CM} - \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_1^2} - \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_2^2}), \end{aligned}$$

que pasando a coordenadas esféricas  $\vec{p}_1' \rightarrow (|\vec{p}_1'|, \theta', \phi')$ ,

donde  $d^3 p_1' = |\vec{p}_1'|^2 d|\vec{p}_1'| \underbrace{\sin\theta' d\theta' d\phi'}_{\equiv d\Omega'}$ , se convierte en

$$\int d\pi_2' = \int \frac{|\vec{p}_1'|^2 d|\vec{p}_1'| d\Omega'}{(2\pi)^2 4 \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_1^2} \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_2^2}} \frac{\delta(|\vec{p}_1'| - p_{1*})}{\left| \frac{|\vec{p}_1'|}{E_1'} + \frac{|\vec{p}_1'|}{E_2'} \right|} \left| \frac{\partial(E_{CM} - \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_1^2} - \sqrt{|\vec{p}_1'^2 + m_2^2})}{\partial |\vec{p}_1'|} \right|$$

valor que hace que  $E_2' = E_{CM} - E_1'$ ,

lo cual se reduce a  $\leftarrow$  en valor apropiado por conservación

$$\int d\Omega'_2 = \int \frac{d\Omega'}{4(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}'_1|^2}{E'_1 E'_2} \frac{1}{\left(\frac{|\vec{p}'_1|}{E'_1} + \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_2}\right)} = \int \frac{d\Omega'}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{\underbrace{(E'_2 + E'_1)}_{E_{CM}}}$$

Juntamos estos 2 resultados en nuestra fórmula,

$$d\sigma = d\Omega'_2 \frac{|M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2)|^2}{4E_1 E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|} \quad \leftarrow \text{en cualquier marco colineal}$$

$$= \frac{d\Omega'}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{E_{CM}} \frac{|M|^2}{4|\vec{p}'_1| E_{CM}}, \quad \leftarrow \text{en el marco del centro de masa}$$

concluimos finalmente que la sección eficaz diferencial por unidad de ángulo sólido en el marco del centro de masa es

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{|\vec{p}_1|} |M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2)|^2.$$

Si además las 4 partículas tienen la misma masa  $m$  (lo cual aplica en particular si  $E_{CM} \gg m_n \forall n$ , porque entonces  $m_n \approx 0$ ),

la condición  $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \Rightarrow 2\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m^2} = 2\sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m^2}$  implica que  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}'_1|$ , y obtenemos la fórmula simplificada



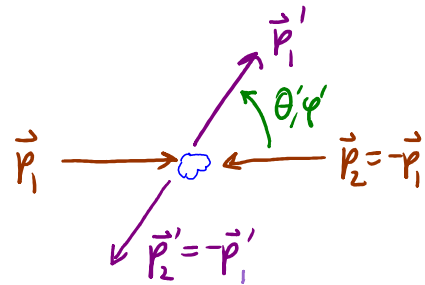
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} .$$

Pej., en la teoría  $\varphi^4$  habíamos ya determinado (en la p. 455) que

$$iM(p_1 p_2 \rightarrow p'_1 p'_2) = -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

así que en ese caso

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{cm} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} + \mathcal{O}(\lambda^3).$$



De aquí podemos obtener la sección eficaz total integrando sobre el ángulo sólido  $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$  y dividiendo entre 2 para tomar en cuenta que las 2 partículas en el estado final son idénticas (por lo que al integrar sobre todos los  $\theta', \varphi'$  estaríamos contando doble):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \int d\Omega' \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{cm} = \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin\theta' d\theta' d\varphi'}_{4\pi} \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi E_{cm}^2} . \end{aligned}$$

139:14/11/22    138-17: 09/11/18

Como ya habíamos dicho, desde la perspectiva experimental son de interés no solo procesos de dispersión  $1+2 \rightarrow 1'+\dots+N'$ , sino también  $1 \rightarrow 1'+\dots+N'$ , que corresponden al decaimiento de una partícula inestable. En este segundo caso la cantidad física que uno necesita calcular es la tasa de decaimiento

$$\boxed{d\Gamma \equiv \frac{(\# \text{ de decaimientos})/T}{\# \text{ de partículas inestables}}} \quad (\Rightarrow [d\Gamma] = L^{-1})$$

Esta tasa se llama "parcial" o "total" dependiendo de si restringimos o no nuestra atención a decaimientos donde el estado final  $1'+\dots+N'$  es de un tipo específico dado.

A partir de la tasa de decaimiento total  $\Gamma_{\text{tot}} \equiv \int d\Gamma_{\text{tot}}$ , la vida media de la partícula se define como

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}} \quad (\Leftrightarrow N_{\text{sobrevivientes}}(t) = N_0 e^{-t/\tau})$$

En la p. 460 habíamos ya obtenido una fórmula para la tasa diferencial,

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i \rightarrow f \pm \delta f} &= \frac{dP_{i \rightarrow f \pm \delta f}}{T} = \frac{|\langle f | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} \frac{dN_{f \pm \delta f}}{T} \\ &= d\pi'_N \frac{\sqrt{T}}{T} \frac{|M_{i \rightarrow f}|^2}{2E_f V}, \end{aligned}$$

donde estamos tomando en cuenta que ahora hay solo 1 partícula en el estado inicial  $|i\rangle$ . En el marco donde la partícula inestable está en reposo, la tasa de decaimiento diferencial (que integrada nos dará la tasa de decaimiento a secas) estaría entonces dada por

$$d\Gamma = d\pi'_N \frac{|M|^2}{2m_i}.$$

Esta fórmula es correcta (si  $\Gamma \ll m_i$ ), pero su deducción se complica por el hecho de que una partícula inestable en realidad NO puede ser considerada como un estado asintótico (cuya definición requiere tomar  $t \rightarrow -\infty$ ), sino que debe entenderse más correctamente como un estado intermedio en un proceso de dispersión

$l' + \dots + N' \xrightarrow{\text{resonancia}} l \rightarrow l' + \dots + N'$  ( $\Leftrightarrow$  polo fuera del eje real)

p.ej.  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$

[ver p.ej. Peskin 7.3, Srednicki 25].

L36: 03/05/17

Para poder decir algo respecto a este proceso, una buena mano de un resultado que es importante en sí misma y represente una generalización del teorema óptico habitual.

Notemos que la unitariedad del operador de dispersión

$$\hat{S} = \hat{1} + i\hat{T}, \quad \hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{1}, \quad \text{implica que}$$

$$(\hat{1} - i\hat{T}^\dagger)(\hat{1} + i\hat{T}) = \hat{1} \Rightarrow -i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) = \hat{T}^\dagger \hat{T}.$$

Tomando el elemento de matriz entre un estado inicial  $|p_1 \dots p_N\rangle \equiv |i\rangle$  y un estado final  $|p'_1 \dots p'_N\rangle \equiv |f\rangle$ , vemos que

$$-i\langle f | \hat{T} | i \rangle + i\langle f | \hat{T}^\dagger | i \rangle = \langle f | \hat{T}^\dagger \hat{T} | i \rangle$$

no confundir
insertar
estados multipartículas

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left( \int \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_j}} \langle \mathbf{q}_j | \right)$$

$$\equiv \sum_{\mathbb{I}} |\mathbb{I}\rangle\langle\mathbb{I}|$$

Es decir,

$$-i\langle f | \hat{T} | i \rangle + i\langle i | \hat{T} | f \rangle^* = \sum_{\mathbb{I}} \langle f | \hat{T}^\dagger | \mathbb{I} \rangle \langle \mathbb{I} | \hat{T} | i \rangle.$$

En términos de  $\mathcal{M}$ 's, esta ecuación dice que



## 6. Procesos a Nivel Árbol en Electrodinámica Cuántica

Para generalizar la expansión perturbativa al caso del campo de Dirac  $\hat{\psi}(x)$ , en primer lugar es importante recordar que el orden temporal se define con signos menos adicionales por cada transposición de operadores fermiónicos. P.ej.,

$$T\{\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x')\} = \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ -\hat{\psi}(x')\hat{\psi}(x) & \text{si } x^0 < x'^0 \end{cases},$$

ó

$$T\{\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_3)\hat{\psi}(x_4)\} = (-)^3 \hat{\psi}(x_3)\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_4)\hat{\psi}(x_2)$$

si  $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$ .

El orden normal se define de manera análoga, y para el

operador de campo en el cuadro de interacción, tenemos entonces

$$T\{\hat{\psi}_I(x_1)\hat{\psi}_I(x_2)\} = \theta(x_1^0 - x_2^0) \left[ \hat{\psi}_{I1}^- \hat{\psi}_{I2}^- + \hat{\psi}_{I1}^+ \hat{\psi}_{I2}^+ + \hat{\psi}_{I1}^- \hat{\psi}_{I2}^+ - \hat{\psi}_{I2}^- \hat{\psi}_{I1}^+ + \underbrace{\{\hat{\psi}_{I1}^+, \hat{\psi}_{I2}^-\}}_{\text{anticomutador}} \right]$$

$$= : \hat{\psi}_{I1} \hat{\psi}_{I2} :$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) \left[ -(\hat{\psi}_{I1} \leftrightarrow \hat{\psi}_{I2}) \right].$$

$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s e^{-ip \cdot x_1}$

Reagrupando términos, esto dice que

$$T\{\hat{\Psi}_{\mathbf{I}}(x_1)\hat{\Psi}_{\mathbf{I}}(x_2)\} = \theta(x_1^0 - x_2^0) : \hat{\Psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2} : + \theta(x_2^0 - x_1^0) : \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2} \hat{\Psi}_{\mathbf{I}1} :$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{: \hat{\Psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2} :}$$

$$+ \theta(x_1^0 - x_2^0) \{\hat{\Psi}_{\mathbf{I}1}^+, \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2}^-\} - \theta(x_2^0 - x_1^0) \{\hat{\Psi}_{\mathbf{I}2}^+, \hat{\Psi}_{\mathbf{I}1}^-\}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\equiv \hat{\Psi}_{\mathbf{I}}(x_1) \hat{\Psi}_{\mathbf{I}}(x_2)}$$

$$= \langle 0 | T\{\hat{\Psi}_{\mathbf{I}}(x_1) \hat{\Psi}_{\mathbf{I}}(x_2)\} | 0 \rangle$$

$$\stackrel{p.222}{=} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i(p + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

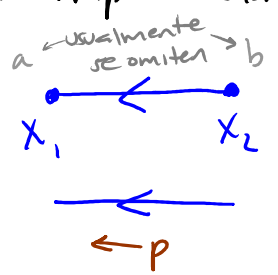
$$\frac{i}{p - m_0} = \tilde{D}_F(p) \neq \tilde{D}_F(-p)$$

$$D_F(x_1 - x_2) \neq D_F(x_2 - x_1)$$

O, en resumen,

$$T\{\hat{\Psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2}\} = : \hat{\Psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2} + \hat{\Psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\Psi}_{\mathbf{I}2} :$$

En los diagramas, representaremos al propagador libre como una línea con una flecha en la dirección en que se propagará la partícula (dirección que, como sabemos, es contraria a la de la antipartícula). Es decir,



$\hat{a} + \hat{b}^+$  aniquila partícula  $\hat{a}^+ + \hat{b}$  crea partícula

$$\equiv D_F(x_1 - x_2) = \langle 0 | T \{ \hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2} \} | 0 \rangle,$$

$$\equiv \tilde{D}_F(p).$$

con índices espinoriales  $ab$  asociados a los extremos

Dado que  $\tilde{S}_F(x_1 - x_2), \tilde{S}_F(p)$  En los libros, normalmente  $S_F(x_1 - x_2), \tilde{S}_F(p)$

$$T \{ \hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2} \} = : \hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2} :, \quad T \{ \hat{\bar{\Psi}}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \} = : \hat{\bar{\Psi}}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} :,$$

anticommutan

no hay contracciones posibles entre  $\hat{\Psi}_I$  y  $\hat{\Psi}_I$  ó  $\hat{\bar{\Psi}}_I$  y  $\hat{\bar{\Psi}}_I$

(o, en otras palabras, podemos definir

$$\underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2}} = 0 = \underbrace{\hat{\bar{\Psi}}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2}}).$$

Con estas convenciones, el teorema de Wick se escribe igual

que antes: suma sobre cualquier número de contracciones

$$T \{ \hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots \} = : \hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots + \underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots}_{\text{contraction}} + \underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots}_{\text{contraction}} + \dots + \underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots}_{\text{contraction}} + \dots : ,$$



donde debemos tener presente los posibles signos fermiónicos,

como p.ej., 
$$: \underbrace{\hat{\Psi}_{I_1} \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_3} \hat{\Psi}_{I_4} \dots}_{\text{signos}} : = - \underset{\uparrow}{D_F(x_1-x_3)} : \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_4} \dots : ,$$

$$: \hat{\Psi}_{I_1} \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_3} \hat{\Psi}_{I_4} \dots : = - : \hat{\Psi}_{I_1} \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_4} \hat{\Psi}_{I_3} \dots : = - \underset{\uparrow}{D_F(x_1-x_2)} \underset{\uparrow}{D_F(x_4-x_3)} : \dots :$$

Con el teorema de Wick podemos, como antes, calcular cualquier función de correlación en la teoría interactiva.

Al considerar amplitudes de dispersión a partir de

la fórmula que presentamos en la p.448,

partícula n ó antipartícula  $\bar{n}$

$$\langle p'_1, n'_1, s'_1, \dots, p'_N, n'_N, s'_N ; - | p_1, n_1, s_1, \dots, p_N, n_N, s_N ; + \rangle = \sqrt{z'_1} \dots \sqrt{z'_N} \sqrt{z_1} \dots \sqrt{z_N}$$

↑ etiquetas asociadas al espín  $\lambda$  (p.276)

$$\times \left( \int_{\mathbb{I}} \langle p'_1, n'_1, s'_1, \dots, p'_N, n'_N, s'_N | \underbrace{T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{int}^\pm(y) \right]}_{\hat{U}_{\mathbb{I}}(-\infty, \infty)} \right\}} | p_1, n_1, s_1, \dots, p_N, n_N, s_N \rangle \right)_{\text{parte conexa y amputada}}$$

encontramos factores adicionales en las patas externas:

a diferencia de  $\hat{\Psi}_{\mathbb{I}}^\pm(y) | \vec{p} \rangle = e^{-ip \cdot y} | 0 \rangle$ , tenemos aquí

$$\hat{\Psi}_{\mathbb{I}}^\pm(y) | \vec{p}, n, s \rangle = \left( \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} u_{\vec{p}'}^{s'} e^{-ip' \cdot y} \right) \left( \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} | 0 \rangle \right)$$

↑ partícula

→  $\{ \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'}, \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta^{ss'}$

es decir, 
$$\hat{\Psi}_{\mathbb{I}}^\pm(y) | \vec{p}, n, s \rangle = e^{-ip \cdot y} \underset{\uparrow}{u_{\vec{p}}^s} | 0 \rangle ,$$

así que definimos la contracción

$$\underbrace{\hat{\Psi}_I(y) | \vec{p}ns \rangle}_{e^{-i\hat{a}\cdot\vec{u}} + e^{i\hat{b}\cdot\vec{v}}} \equiv e^{-ip\cdot y} u_{\vec{p}}^s.$$

$$e^{-i\hat{a}\cdot\vec{u}} + e^{i\hat{b}\cdot\vec{v}}$$

Al integrar sobre la posición del vértice,  $\int d^4y$ , la fase contribuye como antes a dar una delta de Dirac que impone la conservación del (cuanti)momento que fluye a través de ese vértice, pero el espín  $u_{\vec{p}}^s$  permanece como un factor que debe asociarse a la parte externa que describe a una partícula entrante. De manera similar,

$$\underbrace{\langle \vec{p}ns | \hat{\Psi}(y)}_{e^{i\hat{a}\cdot\vec{u}} + e^{-i\hat{b}\cdot\vec{v}}} \equiv e^{ip\cdot y} \bar{u}_{\vec{p}}^s \quad \text{factor asociado a parte externa de partícula saliente,}$$

$$\underbrace{\hat{\Psi}(y) | \vec{p}\bar{n}s \rangle}_{e^{i\hat{a}\cdot\vec{u}} + e^{-i\hat{b}\cdot\vec{v}}} \equiv e^{-ip\cdot y} \bar{v}_{\vec{p}}^s \quad \text{parte externa de antipartícula entrante,}$$

$$\underbrace{\langle \vec{p}\bar{n}s | \hat{\Psi}(y)}_{e^{-i\hat{a}\cdot\vec{u}} + e^{i\hat{b}\cdot\vec{v}}} \equiv e^{ip\cdot y} v_{\vec{p}}^s \quad \text{parte externa de antipartícula saliente.}$$

Para QED, necesitamos además de a  $\hat{\Psi}(x)$  al campo vectorial  $\hat{A}_\mu(x)$ . En la norma de Lorentz,  $\partial \cdot A = 0$ , usamos

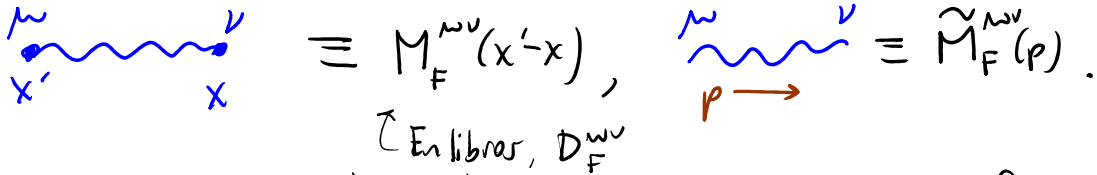
$$\mathcal{L}_{M_L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} J(\partial \cdot A)^2,$$

y eligiendo  $J=1$  ("norma de Feynman"), sabemos que el propagador libre está dado por la expresión covariante (p. 352, 59)

$$M_F^{\mu\nu}(x'-x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{A}_I^\mu(x') \hat{A}_I^\nu(x) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \underbrace{\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}}_{\tilde{M}_F^{\mu\nu}(p)}$$

$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda}^\mu + c.h.)$   
 $\lambda = 0, 1, 2, 3$

Es habitual denotar



Para el caso donde los estados asintóticos incluyen fotones, definiremos las contracciones

$$\hat{A}^\mu(y) | \vec{p} \lambda \rangle \equiv e^{-ip \cdot y} \epsilon_{p\lambda}^\mu$$

$\leftarrow$  parte externa para fotón entrante,  
 necesariamente con polarización transversal:  $\lambda = 1, 2$

$$\langle \vec{p} \lambda | \hat{A}^\mu(y) \equiv e^{ip \cdot y} \epsilon_{p\lambda}^{\mu*}$$

$\leftarrow$  parte externa para fotón saliente.

$e^{-i\vec{p} \cdot \vec{a}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{a}^*}$

El último ingrediente que nos falta es el vértice de interacción. Dado que

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu \psi)}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\mathcal{L}_{M,L}(\partial_\mu A_\nu)}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\mathcal{L}_{int}(A_\mu, \psi)}_{-g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu}$$

veamos que

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int} = g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

← carga eléctrica

$J^\mu$  corriente de Noether  
corriente en ec. de Maxwell

de modo que en la expansión perturbativa de

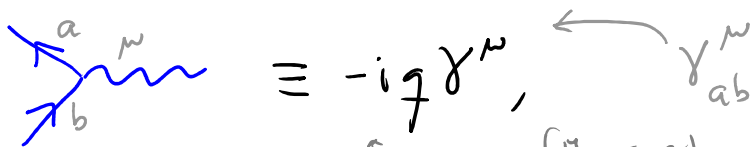
$$\hat{U}_I(-\infty, \infty) = T \left\{ \exp \left[ -i \int d^4y \hat{\mathcal{H}}_{int}^\pm(y) \right] \right\}$$

No hay campos repetidos  
⇒ no hay prefactor numérico

$\hat{\psi}_\pm \gamma^\mu \hat{\psi}_\pm \hat{A}_{\pm\mu}$   
 ← crea/aniquila fotón  
 ← aniquila fermión (o crea anti fermión)  
 ← crea fermión (o aniquila anti fermión)

obtendremos un vértice de 3 patas,

asociado a un factor analítico que en espacio de momentos es simplemente lo que resta de  $-i \hat{\mathcal{H}}_{int}^\pm$  tras omitir los campos:



←  $\gamma^\mu_{ab}$   
 ← en  $\int d^4y$  si estamos en espacio de posiciones

donde  $g$  es entonces la constante de acoplamiento de QED,

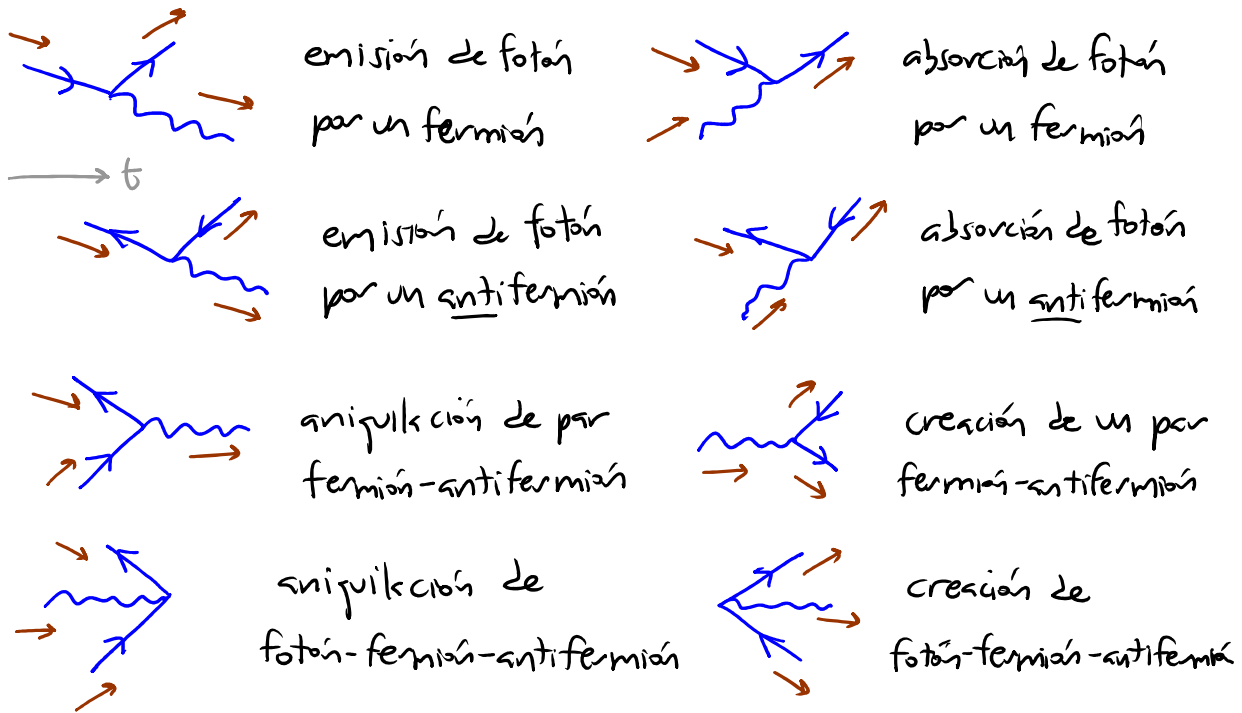
$g = e = -|e|$  para el electrón/positrón, muón/antimuón o tauón/antitauón.

En Campos II veremos que, justo como  $m_0^2 \neq m^2$ , en realidad la carga

desnuda  $g_0$  que aparece en el vértice difiere de la carga física  $g$  por correcciones cuánticas, pero  $g_0 = g$  a orden más bajo.

← acoplamiento entre "partículas"  
 ← acoplamiento entre partículas  $g$

Dependiendo de cómo estén orientadas sus patas con respecto a la dirección del tiempo, este vértice puede describir a cualquiera de 8 procesos físicos:



Una buena noticia es que en QED, a nivel ya de los diagramas conexos (como en amplitudes de dispersión), No hay factores de simetría: las 3 patas del vértice se refieren a operadores distintos (por lo cual no incluimos un factor de  $1/3!$  en la normalización de  $\mathcal{L}_{int}$ ), y en ausencia de burbujas de vacío no habrá vértices intercambiables.


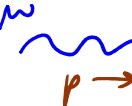
Uo: 16/11/20

L37: 05/05/17

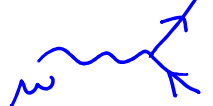
Resumiendo, las reglas de Feynman en espacio de momentos

para amplitudes de dispersión en QED son:

0) Sumar sobre todos los diagramas conexos y amputados.

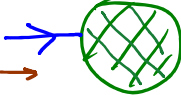
1) Propagadores:   $\equiv \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$ ,   $\equiv \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$

↖ = m<sup>2</sup> a orden más bajo

2) Vértice:   $\equiv -ig \gamma_0^\mu$ , imponiendo conservación de momento

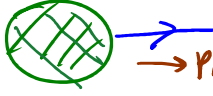
↖ = g a orden más bajo

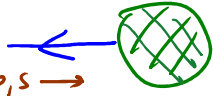
3) Patras externas (que, de ahora en adelante, por simplicidad ya no dibujaremos como líneas punteadas):

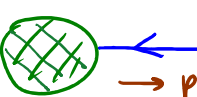
  $\equiv \sqrt{Z_2} u_p^s$  fermión entrante (p.ej. electrón)

↖ factor de renormalización del fermión = 1 a orden más bajo

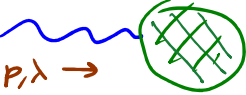
$$\left( \langle \Omega | \hat{\Psi}_H(0) | \vec{p}, s \rangle \equiv \sqrt{Z_2} u_p^s \leftrightarrow \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\Psi}_H(x) \hat{\Psi}_H^\dagger(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \right)$$

  $\equiv \sqrt{Z_2} \bar{u}_p^s$  fermión saliente

  $\equiv \sqrt{Z_2} \bar{v}_p^s$  antifermión entrante (p.ej. antielectrón)

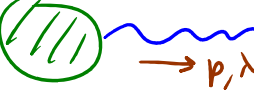
  $\equiv \sqrt{Z_2} v_p^s$  antifermión saliente

↖ si fields en patas externas  
↙ apunta hacia afuera del diagrama, tenemos espinores conjugado de Dirac

  $\equiv \sqrt{Z_3} \epsilon_{\vec{p}\lambda}^\mu$  fotón entrante

↖ factor de renormalización del fotón = 1 a orden más bajo

$$\left( \langle \Omega | \hat{A}_H^\mu(0) | \vec{p}, \lambda \rangle \equiv \sqrt{Z_3} \epsilon_{\vec{p}\lambda}^\mu \leftrightarrow \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{A}_H^\mu(x) \hat{A}_H^\nu(0) \} | \Omega \rangle = \frac{-i Z_3 \eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} + \dots \right)$$

  $\equiv \sqrt{Z_3} \epsilon_{\vec{p}\lambda}^{\mu*}$  fotón saliente

4) Multipliquen partes e integrar  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  sobre momentos indeterminados (uno por cada línea).

5) Determinar el signo del diagrama (al sumar los distintos diagramas, los signos relativos son importantes).

29.17: 12/11/18

Como ejemplo, analicemos el proceso de dispersión  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .  
 ¡como en LEP!

Un caso así involucra a 2 distintos campos de Dirac,  $\Psi_{(e)}$  y  $\Psi_{(\mu)}$ , con diferentes masas pero ambas acopladas al mismo campo electromagnético  $A_\mu$ , con la misma carga  $q = e = -|e|$ :  
 ↓ no es subíndice vectorial  
 ↓ no es subíndice espinorial

$$\mathcal{L}_{QED}^{(e,\mu)} = \bar{\Psi}_{(e)} (i\not{\partial} - m_{e0}) \Psi_{(e)} + \bar{\Psi}_{(\mu)} (i\not{\partial} - m_{\mu 0}) \Psi_{(\mu)} - \frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2 - e_0 \bar{\Psi}_{(e)} \gamma^\mu \Psi_{(e)} A_\mu - e_0 \bar{\Psi}_{(\mu)} \gamma^\mu \Psi_{(\mu)} A_\mu .$$

términos tipo  $\bar{\Psi}_{(e)} \gamma^{\mu\nu} \Psi_{(\mu)} A_\mu$  también serían constantes; pero no figuran en QED

Para los diagramas, conviene entonces distinguir de alguna forma entre los propagadores del electrón  $\rightarrow$  y del muón  $\Rightarrow$ .

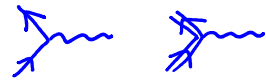
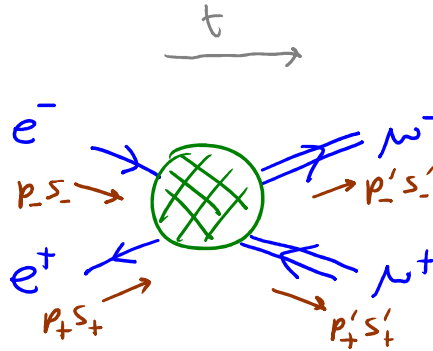
Y tenemos también 2 vértices  , que

se refieren a procesos físicos distintos, pero están asociados al mismo factor analítico  $-ie_0 \gamma^\mu$ .

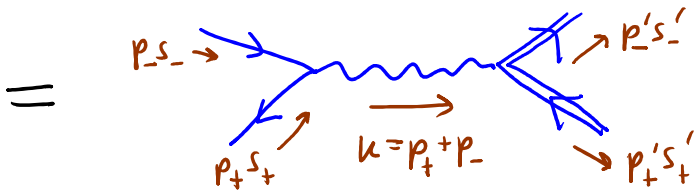
↑ = e a orden más bajo

Tenemos entonces

$$iM(p_+ p_- \rightarrow p'_+ p'_-) =$$



(suma sobre diagramas totalmente conexos y computado)



comenzar aquí

$\mathcal{O}(e^2)$

$+ \mathcal{O}(e^4)$

Recordar que felizmente

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \ll 1$$

$$= -\bar{v}_{p_+}^{s_+} (-ie\gamma^\mu) u_{p_-}^{s_-} \left( \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}_{p'_-}^{s'_-} (-ie\gamma^\nu) v_{p'_+}^{s'_+}$$

signo:  $\langle p'_+ p'_- | (\hat{\Psi}_{(e)} \hat{A} \hat{\Psi}_{(e)})_{y_1} (\hat{\Psi}_{(e)} \hat{A} \hat{\Psi}_{(e)})_{y_2} | p_+ p_- \rangle$

por simplicidad, en este capítulo adoptamos

la convención  $\langle p'_+ p'_- | \equiv \langle 0 | \hat{a}_{p'_+}^\dagger \hat{a}_{p'_-}^\dagger$ , que es el orden opuesto a la p. 103

$$= -\frac{ie^2}{k^2} (\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma^\mu u_{p_-}^{s_-}) (\bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\nu v_{p'_+}^{s'_+})$$

Notar que el resultado es escalar

Esto implica que

$$|M|^2 = \frac{e^4}{k^4} (\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma^\mu u_{p_-}^{s_-}) (\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma^\nu u_{p_-}^{s_-}) (\bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\mu v_{p'_+}^{s'_+}) (\bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\nu v_{p'_+}^{s'_+})$$

$\underbrace{u_{p_-}^{s_-} \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu v_{p_+}^{s_+}}_{\gamma^\mu \gamma^\nu} = \bar{u}_{p_-}^{s_-} \gamma^\nu v_{p_+}^{s_+}$ 
 $\underbrace{\bar{v}_{p'_+}^{s'_+} \gamma_\nu u_{p'_-}^{s'_-}}_{\gamma^\nu}$

p. 237



es decir,

$$|M|^2 = \frac{e^4}{k^4} \left( \bar{V}_{p_+}^{s_+} \gamma^\mu u_{p_-}^{s_-} \bar{u}_{p_-}^{s_-} \gamma^\nu v_{p_+}^{s_+} \right) \left( \bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\mu v_{p'_+}^{s'_+} \bar{v}_{p'_+}^{s'_+} \gamma_\nu u_{p'_-}^{s'_-} \right).$$

Ahora bien, en la situación experimental más común, los haces de partículas iniciales ( $e^+e^-$ ) No están polarizados (no tienen espín definido) y los detectores de partículas finales ( $\mu^+\mu^-$ ) son insensibles a la dirección del espín, así que nos interesa la sección eficaz promediada sobre los espines iniciales y sumada sobre los posibles espines  finales.

Recordando (de las pp. 260-261) las identidades

$$\sum_{s=1}^2 u_p^s \bar{u}_p^s = \not{p} + m_0, \quad \sum_{s=1}^2 v_p^s \bar{v}_p^s = \not{p} - m_0, \quad \leftarrow \text{estructura aquí } \mathbb{1}$$

↑ = m a orden más bajo ↓

veamos que al tomar el primer factor entre paréntesis en  $|M|^2$

y sumar sobre los espines tenemos

$$\sum_{s_+, s_- = 1}^2 \left( \bar{V}_{p_+}^{s_+} \gamma_{ab}^\mu u_{p_-}^{s_-} \bar{u}_{p_-}^{s_-} \gamma_{cd}^\nu v_{p_+}^{s_+} \right) = (\not{p}_+ - m_e)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_- + m_e)_{bc} \gamma_{cd}^\nu$$

↑ masa del electrón (e ≠ índice espinorial)

$$= \text{Tr} \left[ (\not{p}_+ - m_e) \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_- + m_e) \gamma_{cd}^\nu \right],$$

↑ traza sobre índices espinoriales

Con el resultado análogo para el segundo factor, tenemos entonces que

tenemos un espín 0 el otro      detectamos un espín y el otro

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}|^2 &\equiv \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s_+, s_-} \right) \left( \sum_{s'_+, s'_-} \right) |M|^2 \\
 &= \frac{e^4}{4k^4} \text{Tr} \left[ (\not{p}_+ - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_+ + m_e) \gamma^\nu \right] \text{Tr} \left[ (\not{p}'_- + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}'_- - m_\mu) \gamma_\nu \right].
 \end{aligned}$$

$\nearrow \gamma^\rho p_{+\rho}$        $\nwarrow$  muón (no índice vectorial)

Para llegar a un resultado más explícito, necesitamos ahora ser capaces de calcular trazas de productos de 2, 3 ó 4 matrices de Dirac.

Para esto, notemos primero que  $(\gamma^5)^2 = +\mathbb{1}$ ,  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  p.234

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] &= \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] \\
 &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5] \quad \text{por ciclicidad de la traza} \\
 &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}],
 \end{aligned}$$

$\uparrow$  traza sobre índices espinores

de donde podemos concluir que  $\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = 0$  para  $n$  impar.

Para  $n=2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= \text{Tr}[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\nu \gamma^\mu] = \text{Tr}[2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} - \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &= 8\eta^{\mu\nu} - \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu] = 8\eta^{\mu\nu} - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu],
 \end{aligned}$$

$\underbrace{2\eta^{\mu\nu} \text{Tr}(\mathbb{1})}_{\text{matriz } 4 \times 4}$

$\xrightarrow{\text{ciclicidad}}$

es decir,

$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$

Para  $n=4$ , procediendo de manera similar podemos ver que

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] &= \text{Tr}[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\lambda \gamma^\rho - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\rho] \\
 &= \text{Tr}[2\eta^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\rho - \underbrace{\gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\lambda\} \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho}] \\
 &= \text{Tr}[2\eta^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\rho - \gamma^\nu 2\eta^{\mu\lambda} \gamma^\rho + \underbrace{\gamma^\nu \gamma^\lambda \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} - \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu}] \\
 &= 2\eta^{\mu\nu} \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\rho]}_{4\eta^{\lambda\rho}} - 2\eta^{\mu\lambda} \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho]}_{4\eta^{\nu\rho}} + 2\eta^{\mu\rho} \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\lambda]}_{4\eta^{\nu\lambda}} - \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu]}_{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho]} \quad \leftarrow \text{ciclidad}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) .$$

Para otros  $n \in 2\mathbb{Z}_+$ , vemos que opera una especie de teorema de Wick: obtenemos una suma con signos alternantes sobre

las distintas maneras de 'contracer' todas las matrices de

Dirac,  $\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{\equiv} \eta^{\mu\nu}$ .  $\leftarrow$  solo  $\neq 0$  si  $\mu=\nu$

Notemos por cierto que este último resultado implica que

para  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  tenemos  $\text{Tr}[\gamma^5] = 0$  (como se mostró

también en la Tarea 4).

Aunque no lo necesitamos aquí, por "Wick" es cierto además que

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^5] = -4i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}}.$$

Regresando a la cuenta, con las identidades recién

obtenidas vemos que

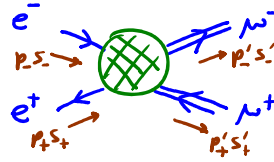
$$\begin{aligned} & \text{Tr}[(\not{p}_+ - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_- + m_e) \gamma^\nu] \\ &= \text{Tr}[\not{p}_+ \gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - m_e \text{Tr}[\cancel{\gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu}] + m_e \text{Tr}[\cancel{\not{p}_+ \gamma^\mu \gamma^\nu}] \\ & \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\not{p}_+ \not{p}_-} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu]} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4\eta^{\mu\nu}} \\ & \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4(\eta^{\rho\mu} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{\rho\lambda} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu} \eta^{\mu\lambda})} \\ &= 4(\not{p}_+^\mu \not{p}_-^\nu - \not{p}_+ \cdot \not{p}_- \eta^{\mu\nu} + \not{p}_+^\nu \not{p}_-^\mu - m_e^2 \eta^{\mu\nu}), \end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\text{Tr}[(\not{p}'_- + m_\omega) \gamma_\mu (\not{p}'_+ - m_\omega) \gamma_\nu] = 4(\not{p}'_- \not{p}'_+ \eta_{\mu\nu} - \not{p}'_- \cdot \not{p}'_+ \eta_{\mu\nu} + \not{p}'_-^\mu \not{p}'_+^\nu - m_\omega^2 \eta_{\mu\nu}),$$

por lo que

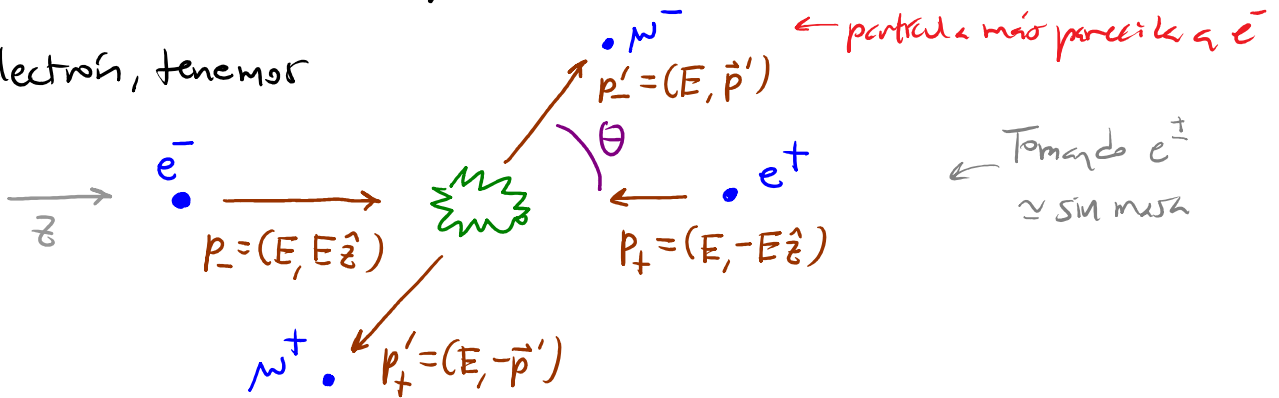
$$\begin{aligned} |\overline{M}|^2 &= \frac{e^4}{4k^4} 16(\not{p}_+^\mu \not{p}_-^\nu - \not{p}_+ \cdot \not{p}_- \eta^{\mu\nu} + \not{p}_+^\nu \not{p}_-^\mu - m_e^2 \eta^{\mu\nu})(\not{p}'_- \not{p}'_+ \eta_{\mu\nu} - \not{p}'_- \cdot \not{p}'_+ \eta_{\mu\nu} + \not{p}'_-^\mu \not{p}'_+^\nu - m_\omega^2 \eta_{\mu\nu}) \\ &= \frac{4e^2}{k^4} (2\not{p}_+ \cdot \not{p}'_- \not{p}_- \cdot \not{p}'_+ + 2\not{p}_+ \cdot \not{p}'_+ \not{p}_- \cdot \not{p}'_- - 4\not{p}_+ \cdot \not{p}_- \not{p}'_- \cdot \not{p}'_+ + 4\not{p}_+ \cdot \not{p}_- \not{p}'_+ \cdot \not{p}'_- \\ & \quad - 2m_\omega^2 \not{p}_+ \cdot \not{p}_- + 4m_\omega^2 \not{p}_+ \cdot \not{p}_- - 2m_e^2 \not{p}'_- \cdot \not{p}'_+ + 4m_e^2 \not{p}'_- \cdot \not{p}'_+ + 4m_e^2 m_\omega^2), \end{aligned}$$



$$|\overline{M}|^2 = \frac{8e^4}{k^4} (p_+ \cdot p'_- \cdot p_- \cdot p'_+ + p_+ \cdot p'_+ \cdot p_- \cdot p'_- + m_\mu^2 p_+ \cdot p_- + m_e^2 p'_+ \cdot p'_- + 2m_e^2 m_\mu^2)$$

Dado que  $\frac{m_e}{m_\mu} \approx \frac{1}{200}$  y debemos tener  $E_{cm} \gtrsim 2m_\mu$  para que este proceso de dispersión pueda ocurrir, podemos aproximar  $m_e \approx 0$  (el error inducido por esta aproximación es menor que el que proviene de ignorar términos de  $\mathcal{O}(e^4)$  en  $M$ ).

Evaluaremos ahora la sección eficaz en el marco del centro de masa, donde si orientamos el eje  $z$  en la dirección de movimiento del electrón, tenemos



con  $|\vec{p}'| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$ ,  $\vec{p}' \cdot \hat{z} = |\vec{p}'| \cos \theta$ , de modo que

el proceso se puede parametrizar en términos de  $E$  y  $\theta$ .

Usando  $k^2 = (p_+ + p_-)^2 = (2E)^2 + 0 = 4E^2$ ,  $p_+ \cdot p_- = E^2 - (-E^2) = 2E^2$ ,

$p_+ \cdot p'_+ = E^2 - E|\vec{p}'| \cos \theta = p_- \cdot p'_-$ ,

$p_+ \cdot p'_- = E^2 + E|\vec{p}'| \cos \theta = p_- \cdot p'_+$ ,

podemos escribir

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{(2E)^4} \left[ E^2(E - |\vec{p}'| \cos\theta)^2 + E^2(E + |\vec{p}'| \cos\theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right]$$

↓ ignoramos los 2 términos con  $m_e \approx 0$

$$= \frac{e^4}{2} \left[ 1 - 2 \frac{|\vec{p}'|}{E} \cos\theta + \underbrace{\frac{|\vec{p}'|^2}{E^2}}_{\substack{E^2 - m_\mu^2 \\ E^2}} \cos^2\theta + 1 + 2 \frac{|\vec{p}'|}{E} \cos\theta + \underbrace{\frac{|\vec{p}'|^2}{E^2}}_{\substack{E^2 - m_\mu^2 \\ E^2}} \cos^2\theta + 2 \frac{m_\mu^2}{E^2} \right]$$

p. 486

$$= e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right].$$

← naturalmente, es independiente del ángulo azimutal  $\varphi$

Usando esto en la fórmula simplificada que obtuvimos en la p. 465

para la sección eficaz diferencial  $1+2 \rightarrow 1'+2'$ , tenemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{|\vec{p}_1|} \overline{|M|^2} = \frac{1}{256\pi^2 E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \overline{|M|^2}$$

(2E)<sup>2</sup> ↗

$$\frac{|\vec{p}'|}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}$$

es decir,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{e^4}{256\pi^2} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right].$$

Usando  $\int d\Omega = 4\pi$ ,  $\int d\Omega \cos^2\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \underbrace{d(\cos\theta)}_x \underbrace{\cos^2\theta}_{x^2} = 2\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}$ ,

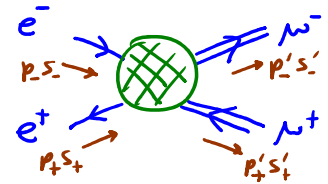
↙  
 $d\phi d\theta \sin\theta$

la sección eficaz total es entonces

$$\sigma_{CM} = \frac{e^4}{64\pi} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \frac{1}{3} \right],$$

o, sacando un factor de  $\frac{4}{3}$  de los corchetes,

$$\sigma_{CM} = \frac{e^4}{48\pi} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right].$$



Podemos notar que la raíz sería imaginaria para  $E_{CM} = 2E < 2m_\mu$ , donde por supuesto sabemos que  $\sigma_{CM} = 0$ .

141:18/11/22

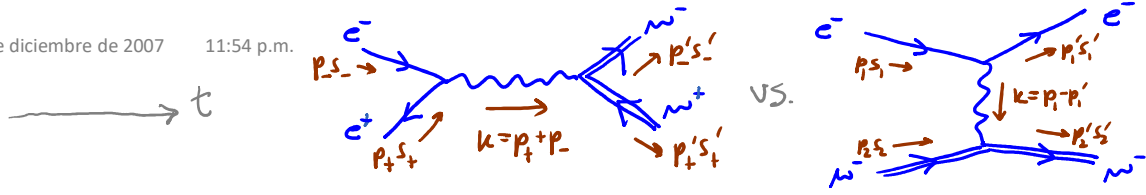
Como segundo ejemplo, consideremos ahora el proceso de dispersión

electrón-muón, es decir,  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ :

$$iM(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2) = \text{Diagram} + O(e^4)$$

$$= -\frac{ie^2}{k^2} (\bar{u}_{p'_1}^{s'_1} \gamma^\mu u_{p_1}^{s_1}) (\bar{u}_{p'_2}^{s'_2} \gamma_\mu u_{p_2}^{s_2}).$$

Podemos notar que este es el mismo diagrama que en nuestro ejemplo anterior, pero orientado de manera distinta con respecto



al eje temporal, con lo cual describe un proceso físico diferente:

lo que era un e<sup>+</sup> entrante se convirtió en un e<sup>-</sup> saliente, y el mu<sup>+</sup> saliente se convirtió en un mu<sup>-</sup> entrante:  $e^- e^+ \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-$ .

Al sumar sobre el espín del e<sup>-</sup> final, tendremos así

$$\sum_{s'_1} u_{p'_1}^{s'_1} \bar{u}_{p'_1}^{s'_1} = \not{p}'_1 + m_e$$

$$\sum_{s_+} v_{p_+}^{s_+} \bar{v}_{p_+}^{s_+} = \not{p}_+ - m_e$$

momento fluye hacia afuera en lugar de adentro

Pero reemplazando  $p_+ \rightarrow -p'_1$  justamente obtendríamos el mismo

resultado, excepto por un factor de -1. Lo mismo sucede para

el muón inicial en comparación con el antimuón final que teníamos

antes: obtenemos el mismo resultado, salvo un factor de -1, si

sustituimos  $p'_1 \rightarrow -p_2$ . Por otra parte, para las 2 partículas que

no modificamos, necesitamos renombrar  $p_- \rightarrow p_1$ ,  $p'_- \rightarrow p'_2$ . Podemos

entonces simplemente traducir así nuestro resultado de la p. 486:

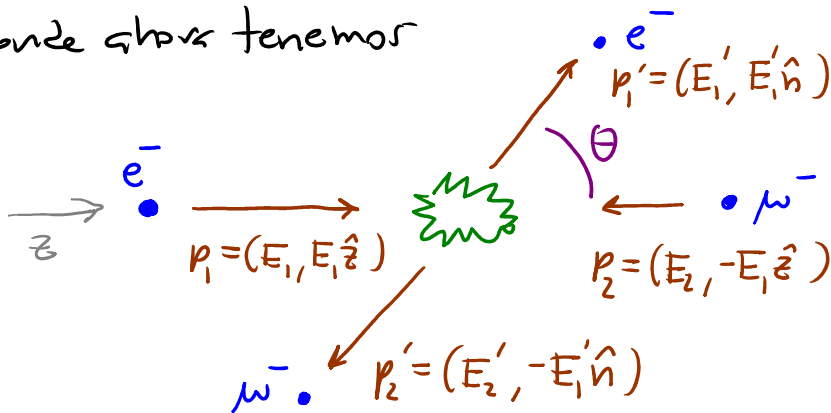
$$|\overline{M}|^2 = \frac{d e^4}{k^4} (p_1 \cdot p'_2 p_1 \cdot p_2 + p'_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p'_2 - m_\mu^2 p_1 \cdot p_1 - m_e^2 p_2 \cdot p'_2 + 2 m_e^2 m_\mu^2)$$

La relación que hemos encontrado en este ejemplo, entre



un proceso con una partícula entrante/saliente con momento  $p$  y el mismo proceso pero con esa partícula reemplazada por una antipartícula saliente/entrante con momento  $-p$ , aplica en general (con un factor de  $-1$  si la partícula en cuestión es un fermión), y se conoce como simetría de cruce ("crossing symmetry"). Se le puede entender como consecuencia de la fórmula de LSZ (p.444): con  $\hat{\varphi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ ,  $p$  vs.  $-p$  decide entre  $n$  saliente y  $\bar{n}$  entrante. Es importante notar que para un  $p^\mu$  dado, solo 1 de los 2 procesos es físico, dependiendo de si  $p^0 > 0$  ó  $-p^0 > 0$ .

Regresando a la cuenta, podemos evaluar  $|\overline{M}|^2$  en el marco del centro de masa (aproximando nuevamente  $m_e \approx 0$ ), donde ahora tenemos



$$\begin{aligned} \text{con } \hat{n} \cdot \hat{z} &= \cos \theta, \\ E_2 &= \sqrt{E_1^2 + m_\mu^2} \\ E_2' &= \sqrt{E_1'^2 + m_\mu^2} \\ E_1 + E_2 &= E_1' + E_2' \\ \Rightarrow E_1' &= E_1, E_2' = E_2. \end{aligned}$$

Podemos caracterizar el proceso usando  $E_1$  y  $\theta$ .

Dado que  $p_1 \cdot p_2 = E_1(E_2 + E_1) = p_1' \cdot p_2'$  ,  $p_1' \cdot p_2 = E_1(E_2 + E_1 \cos \theta) = p_1' \cdot p_2'$  ,  
 $p_1 \cdot p_1' = E_1^2(1 - \cos \theta)$  y  $k^2 = (p_1 - p_1')^2 = \cancel{p_1^2} - 2p_1 \cdot p_1' + \cancel{p_1'^2}$   
 $= -2E_1^2(1 - \cos \theta)$  ,

tenemos

$$|M|^2 = \frac{2e^4}{E_1^2(1 - \cos \theta)^2} \left[ (E_2 + E_1)^2 + (E_2 + E_1 \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta)^2 \right]$$

$\uparrow = \sqrt{E_1^2 + m_\mu^2}$

Y usando el hecho de que  $|\vec{p}_1'| = |\vec{p}_1|$  , concluimos que (p. 465)

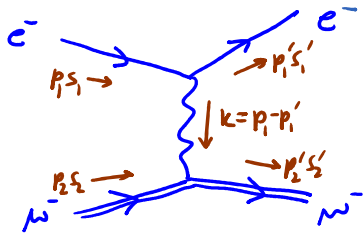
$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{p}_1'|}{|\vec{p}_1|} |M|^2$$

$\uparrow (E_1 + E_2)^2$

$$= \frac{e^4}{32\pi^2 (E_1 + E_2)^2 E_1^2} \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} \left[ (E_2 + E_1)^2 + (E_2 + E_1 \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta)^2 \right]$$

$\propto \frac{1}{k^4}$  diverge cuando  $\theta \rightarrow 0$  , porque  $k = p_1 - p_1' \rightarrow 0$

y el fotón va a la zona de masa.  $\leftarrow$  para de ser virtual a ser real



Debido a esto,  $\sigma_{TOT}$  diverge (divergencia IR), manifestación del hecho de que la interacción electromagnética es de largo alcance ( $k \rightarrow 0$  corresponde a distancia grande entre  $e^-$  y  $\mu^-$ ).

L40: 14/11/19

Para nuestro tercer ejemplo, notemos que si en el proceso anterior reemplazamos a  $\mu^-$  con un segundo  $e^-$  para considerar la 'dispersión de Møller',  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  (Tarea 6), entonces contribuyen a  $\mathcal{O}(e^2)$  no 1 sino 2 diagramas,

$$i\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2) =$$

que corresponden respectivamente a las contracciones

$$\langle p'_1, p'_2 | \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_1}} \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_2}} | p_1, p_2 \rangle \quad \text{signo: -}$$

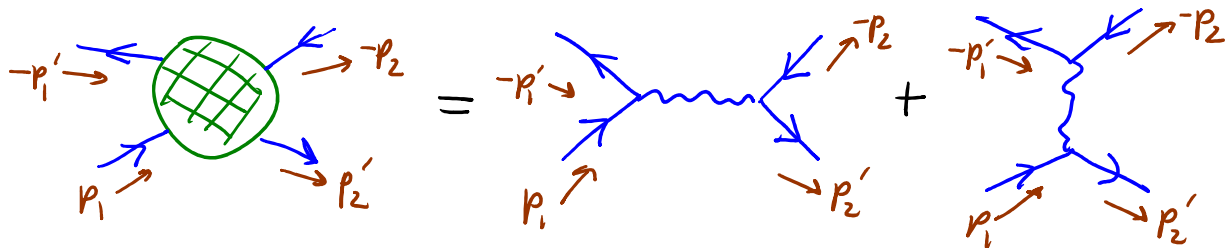
1 cruce  $\nearrow$

$$\langle p'_1, p'_2 | \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_1}} \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_2}} | p_1, p_2 \rangle \quad \text{signo: +}$$

2 cruces  $\nearrow$

El signo menos relativo es justo lo que esperaríamos notando que los estados finales en los 2 diagramas difieren por el intercambio de 2 fermiones idénticos. Este mismo resultado aplica en cualquier proceso. (Y habiéndolo tomado en cuenta, notamos que el intercambio de fermiones entrantes No resulta en nuevas contribuciones, sino en diagramas equivalentes, que sirven para cancelar el  $\frac{1}{2!}$  de la expansión en Taylor de  $T\{\exp[-i\int d^4y \hat{\mathcal{L}}_{int}^I(y)]\}$ .)

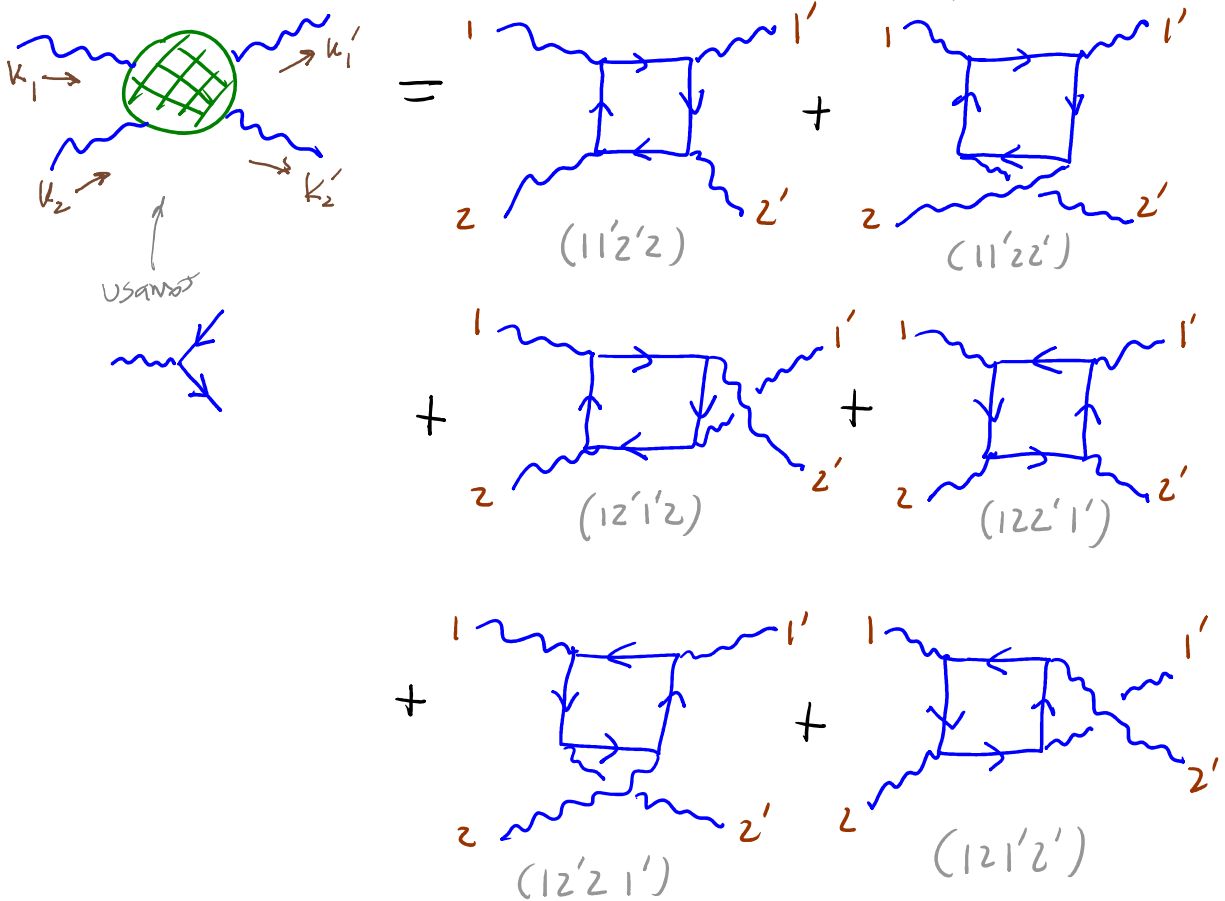
Podemos observar además que el proceso  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  está relacionado con la 'dispersión de Bhabha'  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$  (Tarea 6) por simetría de cruce, así que en



también encontraremos un signo menos relativo entre los 2 diagramas, a pesar de que No difieren entre sí por el intercambio de fermiones idénticos.

==

Otra situación donde siempre se obtiene un signo menos es en presencia de un lazo fermiónico. P.ej., en la dispersión fotón-fotón, o 'dispersión de Delbrück',  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , se tiene

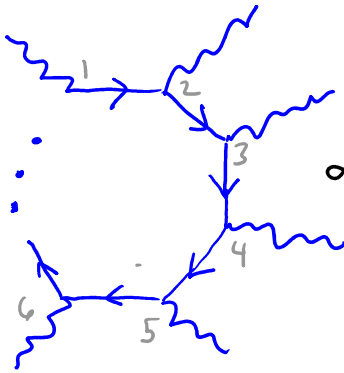


El primer diagrama corresponde a la contracción

$$\langle k'_1, k'_2 | (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_1} (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_2} (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_3} (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_4} | k_1, k_2 \rangle$$

propagador fermiónico  $D_F$  es  $\hat{\bar{\Psi}} \hat{\Psi} = -\hat{\Psi} \hat{\bar{\Psi}} \Rightarrow$  signo: -

Claramente esto mismo se repite en el resto de los diagramas, y de hecho, en cualquier lazo fermiónico:



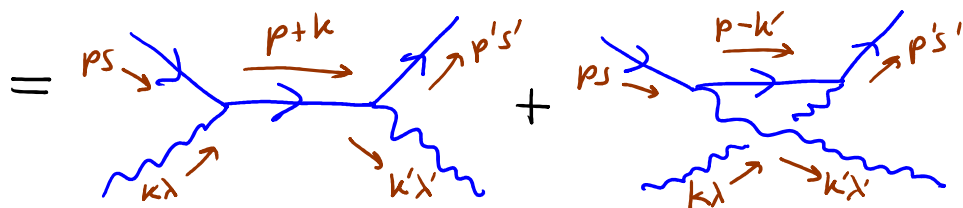
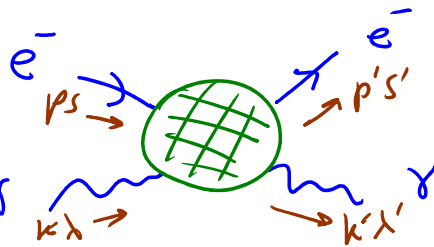
$$\propto (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_n} (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_{n-1}} \cdots (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_2} (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_1}$$

crusa un número impar de operadores fermiónicos para colocarse a la extrema izquierda, formando  $\hat{\Psi}_{y_1} \hat{\Psi}_{y_n} = D_F(y_1, y_n)$ .

==

Nuestro último ejemplo será el proceso de 'dispersión de Compton',  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ :

$i\mathcal{M}(pk \rightarrow p'k') =$



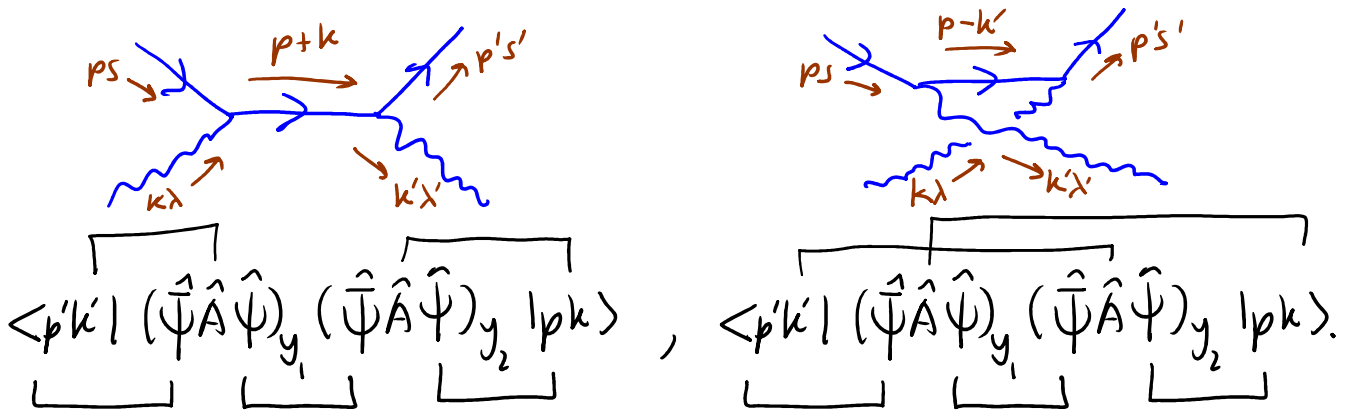
2 nove de des

que se traduce en

$$iM(p, k \rightarrow p', k') = + \bar{u}_{p'}^{s'} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u_p^s (\epsilon_{k\lambda})_\nu (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_\mu$$

$$+ \bar{u}_{p'}^{s'} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u_p^s (\epsilon_{k\lambda})_\mu (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_\nu$$

donde el signo de los 2 diagramas queda determinado por



Factorizando los espinores y los vectores de polarización que aparecen en ambos términos, tenemos

$$iM = -ie^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_\mu (\epsilon_{k\lambda})_\nu \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u_p^s$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cancel{p^2 + 2p \cdot k + k^2 - m^2}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\cancel{p^2 - 2p \cdot k' + k'^2 - m^2}}$

Usando  $\underbrace{(\not{p} + m)}_{p_\rho \gamma^\rho} \gamma^\nu u_p^s = (-\gamma^\nu \not{p} + \underbrace{p_\rho \{\gamma^\rho, \gamma^\nu\}}_{2\eta^{\rho\nu}} + \gamma^\nu m) u_p^s$

$$= 2p^\nu u_p^s - \underbrace{\gamma^\nu (\not{p} - m)}_{=0} u_p^s \quad \text{ec. de Dirac}$$

podemos reescribir

$$iM = -ie^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_{\mu} (\epsilon_{k\lambda})_{\nu} \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \frac{2\gamma^{\mu\nu} \not{p}' + \gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\nu}}{2p \cdot k} + \frac{2\gamma^{\nu\mu} \not{p} - \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu}}{-2p \cdot k'} \right] u_p^s.$$

Con esto podemos calcular  $|M|^2$ , promediar sobre el espín  $s$  del electrón inicial, y sumar sobre el espín  $s'$  del electrón final, como aprendimos a hacer desde nuestro primer ejemplo.

La novedad en este proceso es que tenemos además partículas externas de fotones. Al igual que para los electrones, supondremos que el experimento se realiza con fotones no polarizados, así que promediaremos sobre la helicidad  $\lambda$  del fotón inicial y sumaremos sobre la helicidad  $\lambda'$  del fotón final.

Antes de hacer esto, nos conviene recordar que el formalismo debe ser invariante bajo transformaciones de norma,

$$\hat{A}_{\mu}(x) \simeq \hat{A}'_{\mu}(x) = \hat{A}_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \hat{\Theta}(x),$$

que, como vimos en las pp. 307-8, corresponde en espacio de momentos

$$\hat{A}^{\mu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left( e^{-ik \cdot x} \hat{a}_{k\lambda} \epsilon_{k\lambda}^{\mu} + e^{ik \cdot x} \hat{a}_{k\lambda}^{\dagger} \epsilon_{k\lambda}^{\mu*} \right)$$

$$a \quad \boxed{\epsilon_{k\lambda}^{\mu} \simeq \epsilon'_{k\lambda}{}^{\mu} = \epsilon_{k\lambda}^{\mu} + c k^{\mu}},$$



con  $C$  una constante arbitraria. Si escribimos nuestra amplitud en la forma

$$i\mathcal{M}(pk \rightarrow p'k') \equiv (\epsilon_{\mu\nu}^*)_{\rho} (\epsilon_{\mu\nu})_{\nu} \underbrace{iM^{\mu\nu}(k', k; p, p')}_{\text{diagramas sin incluir los factores asociados a las patas externas de fotón}}$$

diagramas sin incluir los factores asociados a las patas externas de fotón

entonces por invariancia de norma debemos tener

$$\boxed{k'_{\mu} M^{\mu\nu}(k', k) = 0 = k_{\nu} M^{\mu\nu}(k', k)} \quad \text{Identidad de Ward}$$

Y evidentemente tendríamos este mismo resultado con cualquier

número de fotones externos:  $(k_n)_{\mu_n} M^{\mu_1 \mu_2 \dots}(k_1, k_2, \dots) = 0 \quad \forall n.$

[42: 21/11/22]

En nuestro caso particular, podemos verificar que la identidad de Ward en verdad se cumple. P.ej., si en  $i\mathcal{M}(pk \rightarrow p'k')$

reemplazamos  $(\epsilon_{\mu\nu})_{\nu} \rightarrow k_{\nu}$ , nos queda una expresión

$$\propto \bar{u}_{p'}^s \left[ \frac{2\gamma^{\mu} k \cdot p + \gamma^{\mu} \cancel{k} \cancel{k}}{2p \cdot k} + \frac{2\cancel{k} p^{\mu} - \cancel{k} \cancel{k}' \gamma^{\mu}}{-2p \cdot k'} \right] u_p^s$$

$$\begin{aligned} \cancel{k} \cancel{k} &= k_{\rho} k_{\lambda} \frac{1}{2} \{\gamma^{\rho}, \gamma^{\lambda}\} \\ &= k_{\rho} k_{\lambda} \eta^{\rho\lambda} = k^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{k} \cancel{k}' &= \cancel{p+k} \cancel{p+k}' \\ &= (p'+k'-p) \cancel{k}' \end{aligned}$$



Vale la pena resaltar que, en general, en la expansión perturbativa la identidad de Ward se satisface no en cada diagrama por separado, sino solo después de haber realizado la suma de diagramas hasta un orden dado.

Habiendo entendido esto, podemos ver que al tomar

$$|M|^2 = \left| (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k\lambda})^\nu M_{\mu\nu}(k',k) \right|^2$$

y suman sobre las 2 posibles polarizaciones de los fotones (transversales, por tratarse de fotones reales), tendremos

$$\sum_{\lambda',\lambda=1}^2 |M|^2 = \sum_{\lambda'=1}^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k'\lambda'})^\rho \sum_{\lambda=1}^2 (\epsilon_{k\lambda})^\nu (\epsilon_{k\lambda}^*)^\sigma M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}^*$$

$$\stackrel{p. 348}{=} \mathcal{P}^{\mu\rho}(\vec{k}') \stackrel{p. 351}{=} -\eta^{\mu\rho} + \frac{k'^0 (k'^\mu \delta_0^\rho) - k'^\mu k'^\rho - k'^2 \delta_0^\mu \delta_0^\rho}{|\vec{k}'|^2}$$

matriz que proyecta sobre 3 vectores ortogonales a  $\vec{k}'$

por la identidad de Ward se anula al multiplicar por  $M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}^*$

así que en este contexto podemos reemplazar

$$\mathcal{P}^{\mu\rho}(\vec{k}') = \sum_{\lambda'=1}^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k'\lambda'})^\rho \rightarrow -\eta^{\mu\rho} = \sum_{\lambda'=0}^3 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k'\lambda'})^\rho.$$

Evidentemente tenemos de igual manera

$$\sum_{\lambda=1}^2 (\epsilon_{k\lambda})^\nu (\epsilon_{k\lambda}^*)^\sigma \rightarrow -\eta^{\nu\sigma},$$

de modo que al promediar  $|M|^2$  sobre la polarización del fotón inicial y sumar sobre la del fotón final obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 |M|^2 &= (-\eta^{\mu\rho})(-\eta^{\nu\sigma}) M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}^* \\ &= M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^*. \end{aligned}$$

En nuestra cuenta de la dispersión de Compton, esto equivale a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 |M|^2 &= \frac{e^4}{2} \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \frac{\gamma^\mu K \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu K' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right] u_p^s \\ &\quad \times \bar{u}_p^s \left[ \frac{\gamma_\nu K \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu K' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] u_{p'}^{s'}. \end{aligned}$$

↑  
para  $M_{\mu\nu}^*$   
usamos p. 481

Si ahora promediamos/sumamos también sobre el espín de los electrones para determinar

$$\overline{|M|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{s, s'=1}^2 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 |M|^2, \quad \text{encontramos que}$$

$$\overline{|M|^2} = \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[ (\not{p}' + m) \left( \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu \not{p}^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu \not{p}'^\mu}{2p \cdot k'} \right) \right. \\ \left. \times (\not{p} + m) \left( \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu \not{p}'^\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu \not{p}_\nu}{2p \cdot k'} \right) \right]$$

Antes de tomar la traza, esta horrible expresión con hasta 8 matrices de Dirac se puede simplificar un poco usando las identidades

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = (\gamma^0)^2 - (\vec{\gamma})^2 = 4 \cdot \mathbb{1},$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \\ = 2\eta^{\mu\nu} \gamma_\mu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu,$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \\ \Rightarrow (\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \\ (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$$

junto con

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho},$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu,$$

que se demuestran de manera similar.

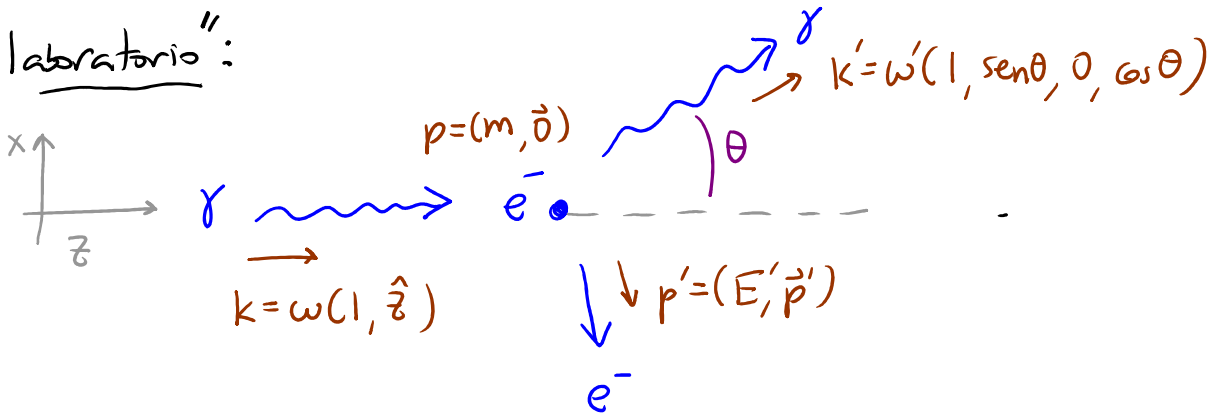
Después de mucho trabajo [ver Peskin pp. 161-162] se obtiene un resultado relativamente sencillo:

$$|\overline{m}|^2 = 2e^4 \left[ \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right].$$

141-33: 16/11/18

L385: 08/05/17

Para variar, evaluaremos esta expresión en el marco "del laboratorio":



con

$$\begin{aligned} |\vec{p}'|^2 &= E'^2 - m^2, & \omega + m &= \omega' + E', \\ 0 &= \omega' \sin\theta + p'_x, & \omega &= \omega' \cos\theta + p'_z, \end{aligned}$$

de modo que el proceso se puede parametrizar en términos de  $\omega$  y  $\theta$ .

Dados  $\omega, \theta$ , podemos determinar en particular  $\omega'$  despejando de las 4 fórmulas anteriores, o equivalentemente, notando que

$$\begin{aligned} m^2 &= p'^2 = (p + k - k')^2 = p^2 + 2p \cdot (k - k') + \cancel{k^2} - 2k \cdot k' + \cancel{k'^2} \\ &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta), \end{aligned}$$

lo cual implica la fórmula de Compton

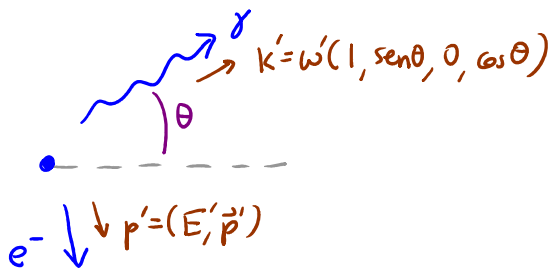
$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \quad (\Rightarrow \frac{\omega'}{\omega} < 1 \text{ efecto Compton})$$

Sabiendo que  $p \cdot k = m \omega$  y  $p \cdot k' = m \omega'$ , nuestro resultado

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}|^2 &= 2e^4 \left[ \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right] \\
 &= 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m \underbrace{\left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)}_{\substack{\text{p. 503} \\ \frac{m}{\omega} (1 - [1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)])}} + m^2 \underbrace{\left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2}_{\substack{\text{p. 503} \\ (\cos\theta - 1)^2}} \right] \\
 &= 2e^4 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 1 + \cos^2\theta \right] = 2e^4 \left[ \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} + \cancel{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} - \cancel{1} + \cos^2\theta \right]
 \end{aligned}$$

En este marco, la integral sobre el espacio fase invariante es

$$\begin{aligned}
 \int d\pi'_2 &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{p}' - \vec{k} - \vec{p}) \delta(\omega' + E' - \omega - E) \\
 &\Rightarrow \vec{p}' = (-\omega' \sin\theta, 0, \omega - \omega' \cos\theta) \\
 &= \int \frac{\omega'^2 d\omega' d\Omega'}{(2\pi)^3 2\omega'} \frac{1}{2\sqrt{\omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2}} (2\pi) \delta(\omega' + \sqrt{\omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2} - \omega - m)
 \end{aligned}$$



$$\frac{\delta\left(\omega' - \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}\right)}{1 + \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{\sqrt{\omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2}}}$$

$$= \int \frac{d\Omega'}{(2\pi)^2 4} \left( \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}} \frac{1}{1 + \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{\sqrt{\omega'^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}}} \right) \left| \omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega'^2 - \omega^2 \cos^2 \theta} = E' = \omega + m - \omega'$$

$$\frac{\frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}}{\omega + m - \omega' + \omega' - \omega \cos \theta} = \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2},$$

es decir,

$$d\pi'_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega' \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2} \xrightarrow{\int d\phi} \frac{d(\cos \theta)}{8\pi} \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2}$$

Usando esto en la fórmula de la p. 463 para la sección eficaz, tenemos

$$d\sigma = d\pi'_2 \frac{|\overline{M}|^2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| 4E_1 E_2} \leftarrow 1 \cdot 4 \omega m$$

$p = (m, \vec{0})$   
 $\gamma \rightsquigarrow \vec{e} \cdot$   
 $\vec{k} = \omega(1, \hat{z})$

$$= \frac{d(\cos \theta)}{32\pi \omega m} \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2} 2e^4 \left[ \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta) - \cos^2 \theta \right]$$

o, en forma más abreviada,



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right]$$

Fórmula de Klein-Nishina

$$\text{con } \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}$$

Podemos notar aquí que cuando  $\omega \ll m$  tenemos  $\frac{\omega'}{\omega} \rightarrow 1$  y por tanto  $\leftarrow 0.511 \text{ MeV} (\leftrightarrow \text{rayos gamma})$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} \rightarrow \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} [1 + \cos^2\theta], \quad \int d\Omega \quad \int d\Omega \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{lab}} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} \rightarrow \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} \left[4\pi + \frac{4\pi}{3}\right] = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2,$$

que reproduce correctamente la bien conocida

valor clásico del electrón

sección eficaz de Thomson.



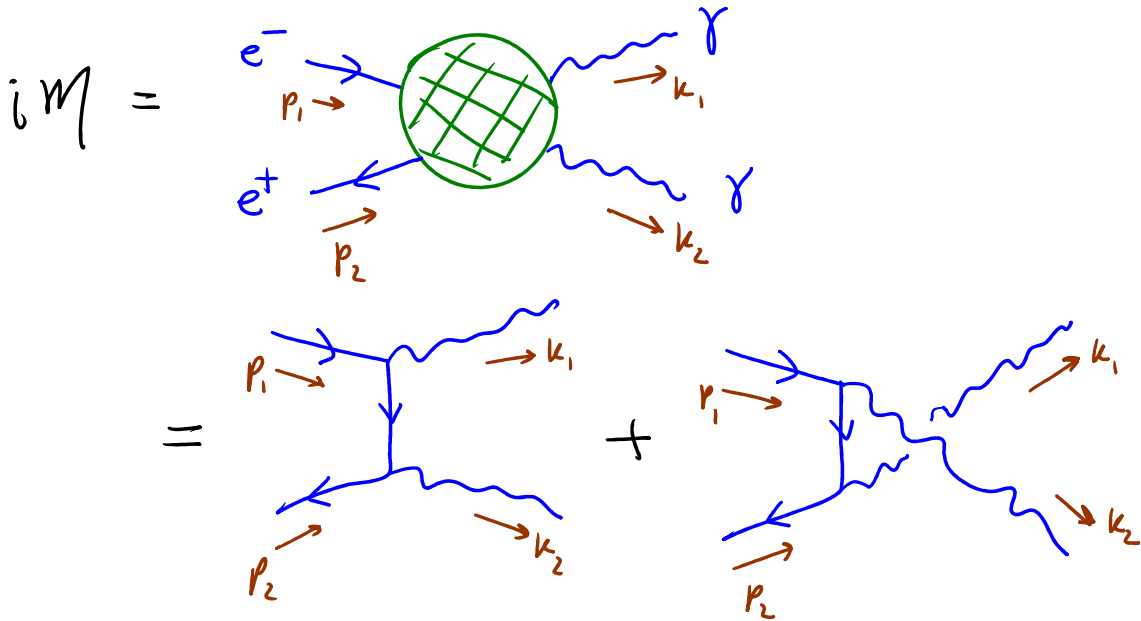
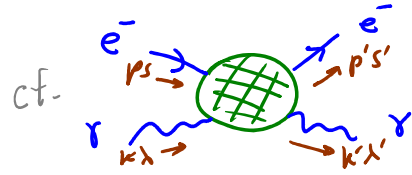
Una última observación es que la dispersión de Compton

$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$  está relacionada por simetría de cruce con

el proceso de aniquilación electrón-positrón  $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$ ,

es decir, involucra los mismos diagramas pero orientados de

formas distintas en el tiempo:



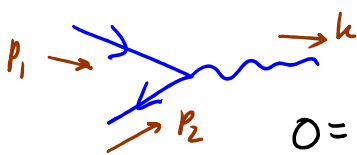
Podemos entonces obtener el resultado para  $\overline{|M|^2}$

simplemente reemplazando

$$p \rightarrow p_1, \quad p' \rightarrow -p_2, \quad k \rightarrow -k_1, \quad k' \rightarrow k_2$$

en el resultado correspondiente para la dispersión Compton (p. 502) y multiplicando a  $\overline{|M|^2}$  por  $-1$  (por 1 fermión cruzado).

Vale la pena resaltar que este es el proceso de dispersión más sencillo para la aniquilación electrón-positrón, porque en



No se podría conservar el (vector) momento:

$$0 = k^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2m^2 + 2(E_{p_1} E_{p_2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

imposible con las 3 partículas en la capa

$$= 2m^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| \left( \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{p}_1|^2}} \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{p}_2|^2}} - \cos \alpha \right) > 0 \quad \uparrow \quad \times$$

## 7. Integral Funcional

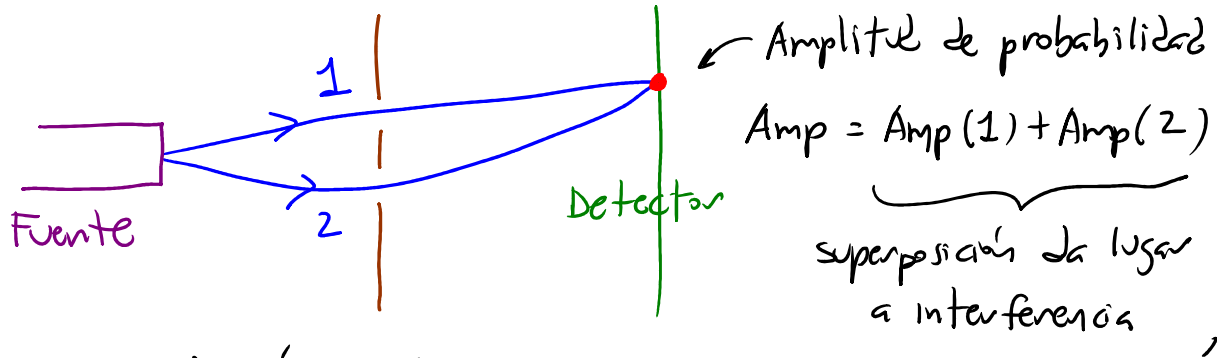
Hasta ahora hemos aprendido a cuantizar campos con el método tradicional de "cuantización canónica", que involucra a operadores sujetos a ciertas relaciones de conmutación, y está basado en la descripción Hamiltoniana de la teoría.

Feynman descubrió un método completamente distinto que da los mismos resultados: la "cuantización por integral de trayectoria (o funcional)", que No involucra a operadores, y está basada en la descripción Lagrangiana. Como todo en la vida, tiene:

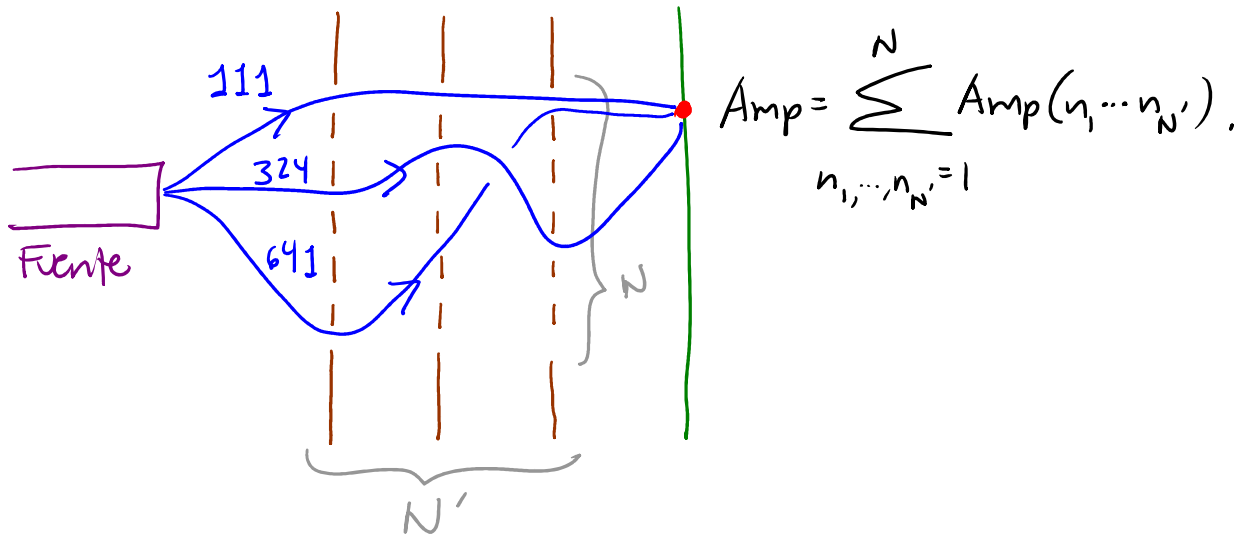
<u>Ventajas</u>	<u>Desventajas</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa <u>números</u> en vez de operadores</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La integración funcional esconde algunos <u>sutilezas</u></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para sistemas relativistas, el uso de <math>L</math> hace manifiesta la <u>invariancia de Lorentz</u></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Por no basarse directamente en <math>H</math>, la <u>unitariedad</u> <u>No</u> es manifiesta</li> </ul>

Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilita la deducción de las <u>reglas de Feynman</u> para la expansión perturbativa</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En algunos casos, las reglas de Feynman leídas ingenuamente a partir de <math>\mathcal{L}</math> son <u>incorrectas</u></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilita la deducción de las "<u>identidades de Ward</u>" (generalización cuántica del teorema de Noether)</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proporciona intuición acerca del <u>límite clásico</u>, y facilita la obtención de una expansión semiclásica</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilita enormemente la cuantización de <u>teorías de normas</u>, especialmente no abelianas</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite la extracción de información <u>no perturbativa</u> (pej, QCD en la retícula)</li> </ul>	

La motivación básica es el principio de superposición en, p.ej., el experimento de la doble rendija:



o con  $N \times N'$  rendijas,



Así que, más en general, esperaríamos poder escribir al propagación en la forma

$$G(x, x') \sim \sum_{\text{trayectoria}} \text{Amp}(\text{trayectoria}),$$

aunque nos falta entender cómo podemos definir esta 'suma', y cuál amplitud debemos asignar a cada trayectoria.

Por simplicidad, deduciremos primero la integral de trayectoria no en teoría cuántica de campos, sino en mecánica cuántica no relativista, es decir, para un sistema con un conjunto finito de grados de libertad.

Para tal sistema, cuantizado canónicamente, tenemos operadores  $\hat{q}_a, \hat{p}_a$   $a=1, \dots, L$  en el cuadro de Schrödinger, que satisfacen

$$[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\delta_{ab}, \quad [\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 = [\hat{p}_a, \hat{p}_b].$$

Podemos encontrar una base de eigenestados  $|q\rangle$  tales que

$$\hat{q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle, \quad \langle q' | q \rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta^{(L)}(q' - q)$$

$$\Leftrightarrow \hat{1} = \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q| \equiv \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q|,$$

o autoestados  $|p\rangle$  tales que

$$\hat{p}_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad \langle p' | p \rangle = (2\pi)^L \delta^{(L)}(p' - p)$$

$$\Leftrightarrow \hat{1} = \int \frac{d^L p}{(2\pi)^L} |p\rangle \langle p|.$$

insertar por convención

Como siempre,  $\langle q | \hat{p}_a | \psi \rangle = -i \frac{\partial}{\partial q_a} \langle q | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \langle q | p \rangle = \prod_a \exp(i q_a p_a) \equiv \exp(i q \cdot p).$$

En el cuadro de Heisenberg, los operadores correspondientes son

$$\hat{q}_a(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{q}_a e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{p}_a(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{p}_a e^{-i\hat{H}t},$$

con los conjuntos completos de autoestados

$$|q;t\rangle \equiv \exp(i\hat{H}t) |q\rangle \Rightarrow \hat{q}_a(t) |q;t\rangle = q_a |q;t\rangle,$$

$$|p;t\rangle \equiv \exp(i\hat{H}t) |p\rangle \Rightarrow \hat{p}_a(t) |p;t\rangle = p_a |p;t\rangle,$$

que también satisfacen

$$\langle q';t | q;t \rangle = \delta^{(L)}(q' - q), \quad \langle p';t | p;t \rangle = (2\pi)^L \delta^{(L)}(p' - p),$$

$$\langle q;t | p;t \rangle = \exp(i q \cdot p),$$

$$\hat{1} = \int d^L q |q;t\rangle \langle q;t|,$$

$$\hat{1} = \int \frac{d^L p}{(2\pi)^L} |p;t\rangle \langle p;t| \quad \forall t.$$

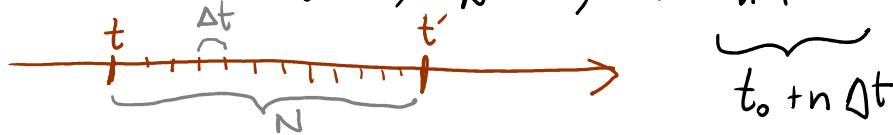
Nuestro objetivo es calcular el propagador

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \langle q' | \exp[-i\hat{H}(t'-t)] | q \rangle$$

en términos de una suma sobre trayectorias.

Para ello, enfoquemos primero nuestra atención en la evolución infinitesimal, dividiendo el intervalo  $[t, t']$  en  $N$  subintervalos de duración  $\Delta t \equiv \frac{t'-t}{N}$  (con  $N \gg 1$ ; eventualmente  $N \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta t \rightarrow 0$ ).

Denotaremos  $t_0 \equiv t$ ,  $t_N = t'$ ,  $t_n = t_{n-1} + \Delta t \quad \forall 1 \leq n \leq N-1$ .



Insertando para cada instante intermedio  $t_n$ ,  $1 \leq n \leq N-1$

$$\hat{1} = \int d\zeta_n | \zeta_n; t_n \rangle \langle \zeta_n; t_n | ,$$

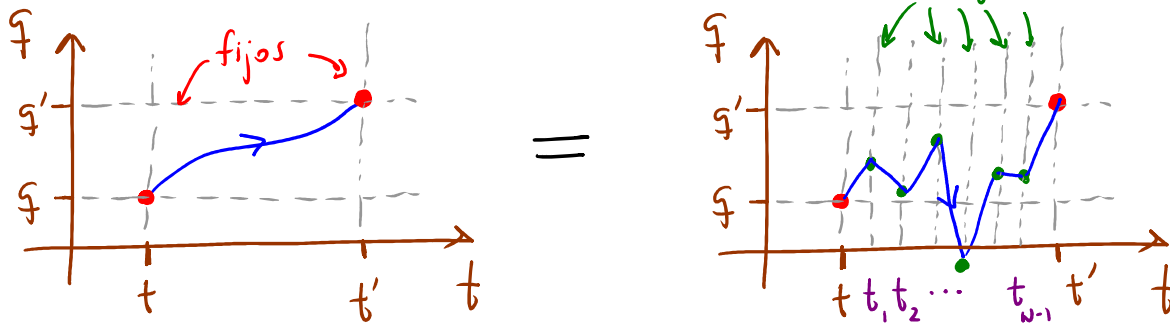
podemos reescribir al propagador como un producto de propagadores para cada subintervalo:

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \int d\zeta_1 \dots d\zeta_{N-1} \langle \zeta_N; t_N | \zeta_{N-1}; t_{N-1} \rangle \langle \zeta_{N-1}; t_{N-1} | \zeta_{N-2}; t_{N-2} \rangle \\ &\quad \dots \langle \zeta_2; t_2 | \zeta_1; t_1 \rangle \langle \zeta_1; t_1 | \zeta_0; t_0 \rangle . \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{q; t}$



gráficamente,



Ahora, el propagador en un intervalo infinitesimal es

$$\langle q_{n+1}; t_{n+1} | q_n; t_n \rangle = \langle q_{n+1}; t_n | \exp[-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)] | q_n; t_n \rangle$$

ojo  $\underbrace{\exp[-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)]}_{\hat{1} - i\hat{H}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)}$

así que para nuestro cálculo necesitamos evaluar el elemento de matriz  $\langle q_{n+1}; t_n | \hat{H} | q_n; t_n \rangle \forall n$ ,

donde

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = e^{i\hat{H}t_n} \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) e^{-i\hat{H}t_n} = \hat{H}(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)).$$

Dado un Hamiltoniano que es un polinomio en  $\hat{q}_a$  y  $\hat{p}_a$ , siempre podemos reordenar cada término en él de tal manera que todas las  $\hat{q}$ 's queden a la izquierda de todas

las  $\hat{p}$ 's,

$$\hat{H}(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) = \hat{H}_e(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n))$$

↑ "orden estándar"

(p.ej.,  $\hat{q}_a \hat{p}_b = \hat{q}_a \hat{p}_b$ ,  $\hat{p}_a \hat{q}_b \hat{p}_c = \hat{q}_b \hat{p}_a \hat{p}_c - i\delta_{ab} \hat{p}_c$ , etc.).

Insertando  $\hat{\mathbb{1}} = \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} |p_n; t_n\rangle \langle p_n; t_n|$ ,  
teremos entonces

$$\begin{aligned} & \langle q_{n+1}; t_n | \hat{H}(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) | q_n; t_n \rangle \\ &= \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} \underbrace{\langle q_{n+1}; t_n | \hat{H}_e(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) | p_n; t_n \rangle}_{H_e(q_{n+1}, p_n) \exp[+iq_{n+1} \cdot p_n]} \underbrace{\langle p_n; t_n | q_n; t_n \rangle}_{\exp[-iq_n \cdot p_n]} \\ & \quad \equiv \sum_{a=1}^L q_{n+1, a} p_{n, a} \end{aligned}$$

donde es importante notar que, en general,

$$H_e(q_{n+1}, p_n) \neq H(q_{n+1}, p_n),$$

porque en estas expresiones  $q_{n+1}, p_n$  son números.

Usando este resultado, vemos que

$$\begin{aligned}
 \langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \langle q_{n+1}, t_{n+1} | \overbrace{[\hat{1} - i\hat{H}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)]}^{\exp(-i\hat{H}\Delta t)} | q_n, t_n \rangle \\
 &= \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} \langle q_{n+1}, t_{n+1} | [\hat{1} - i\hat{H}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)] | p_n, t_n \rangle \langle p_n, t_n | q_n, t_n \rangle \\
 &= \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} \underbrace{[1 - iH_e(q_{n+1}, p_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)]}_{\exp[-iH_e(q_{n+1}, p_n)\Delta t] + \mathcal{O}(\Delta t^2)} \exp[i(q_{n+1} - q_n) \cdot p_n]
 \end{aligned}$$

Con esto podemos regresar al caso del intervalo finito  $[t, t']$  para deducir que

$$\langle \overbrace{q'; t'}^{q'; t'} | q; t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \langle q_N; t_N | q_{N-1}; t_{N-1} \rangle \dots \langle q_1; t_1 | \underbrace{q; t}_{q; t} \rangle$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}$$

$$\exp \left[ i \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (q_{n+1} - q_n) \cdot p_n - H_e(q_{n+1}, p_n) \Delta t \right\} \right].$$

43: 23/11/22

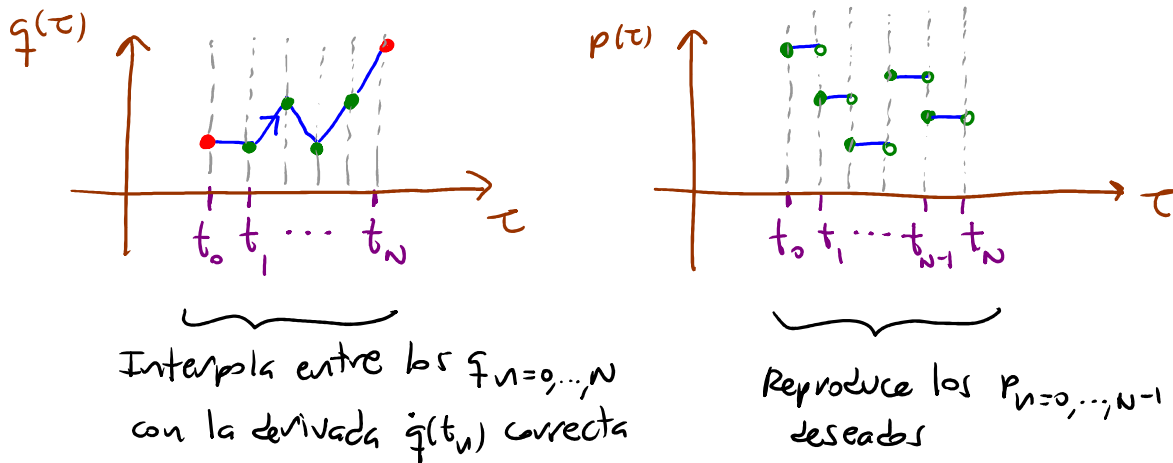
$$\underbrace{\frac{t' - t}{N}}_{\frac{t' - t}{N}} \rightarrow 0$$

Si elegimos ahora funciones  $q(\tau), p(\tau) \forall \tau \in [t, t']$   
 tales que  $q(t_n) = q_n \forall 0 \leq n \leq N$ ,  $p(t_n) = p_n \forall 0 \leq n \leq N-1$ ,  
 podemos ver que  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (= \lim_{N \rightarrow \infty})$  convierte a la suma  
 que aparece en el exponente en una integral:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\{ \frac{(q_{n+1} - q_n)}{\Delta t} \cdot p_n - H_e(q_{n+1}, p_n) \right\}$$

$$= \int_t^{t'} d\tau \left\{ \dot{q}(\tau) \cdot p(\tau) - H_e(q(\tau), p(\tau)) \right\}.$$

La elección más sencilla de las funciones  $q(\tau), p(\tau)$  sería



Definiendo la medida de integración funcional

$$\int Dq(\tau) Dp(\tau) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}$$

(que es del tipo  $\frac{d^L q_n d^L p_n}{(2\pi)^L} \forall 1 \leq n \leq N-1$ , pero NO  $n=0$ )

obtenemos entonces finalmente la deseada expresión para el propagador en términos de una integral funcional o de trayectoria,

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \dot{q}(\tau) \cdot p(\tau) - H_e(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right].$$

Por lo menos de manera intuitiva, esta expresión final dice que debemos sumar sobre "todas las funciones" del intervalo  $[t, t']$  al espacio fase  $\{q, p\}$ , con las restricciones  $q(t) = q$ ,  $q(t') = q'$ .

Esta suma está pesada por la exponencial de lo que parece ser la acción en notación Hamiltoniana,

$$S[q(\tau)] = \int d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) = \int d\tau \left[ p(\tau) \cdot \dot{q}(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right],$$

excepto que los "momentos"  $p(\tau)$  en la integral NO están relacionados con  $\dot{q}(\tau)$  a través de las ecs. de Hamilton, sino que son variables de integración independientes.

La fórmula que hemos obtenido representa la solución al problema de evolución temporal en mecánica cuántica: con esta receta para el propagador, ¡hemos logrado resolver la ecuación de Schrödinger!

La dificultad restante, claro está, radica en que la integral en cuestión NO es una integral ordinaria.

Nosotros, de hecho, solo aprenderemos a calcular 1 tipo de integral funcional de manera explícita: la integral gaussiana (análoga a  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2+bx+c)$ ).

Como veremos, esto nos bastará para construir la expansión perturbativa.

A diferencia de la integral ordinaria, para la integral de trayectoria no existen tablas extensas del estilo de Gradshteyn & Ryzhik, aunque sí hay algunos libros con ciertos casos más o menos exóticos (ver, p.ej., C. Grosche, "Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg Trace Formulae").

Por construcción, el propagador que se obtiene de nuestra integral de trayectoria coincide con el definido

por el Hamiltoniano cuántico original,  $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ .  
Si empezamos al revés, con un Hamiltoniano clásico  
 $H_c(q, p)$ , su uso en la integral de trayectoria

$$\int_{\substack{q(t')=q' \\ q(t)=q}} \mathcal{D}q(z) \mathcal{D}p(z) \exp \left[ i \int_t^{t'} dz \{ \dot{q}(z)p(z) - H_c(q(z), p(z)) \} \right]$$

define una teoría cuántica, **sin necesidad de usar operadores**.

Una pregunta potencialmente confusa es entonces:  
¿a cuál de todas las posibles cuantizaciones canónicas  
de  $H_c$  — que difieren por ordenamiento — corresponde?

Nuestra cuenta parecería seleccionar de manera única  
el Hamiltoniano en orden "estándar",  $(\hat{H}_c)_e$ . Pero,  
de hecho, esto se debe a que hemos definido la medida  
 $\mathcal{D}q(z) \mathcal{D}p(z)$  de una manera específica. Exploraremos  
este punto en la Tarea 7. Como aprenderemos ahí,  
**diferentes prescripciones de orden en el formalismo  
canónico corresponden a definiciones <sup>ligeramente</sup> diferentes de  
la medida de integración en la integral funcional.**

De cualquier manera, la cuestión del ordenamiento no es en general terriblemente importante. Primero, porque los Hamiltonianos usados más frecuentemente no tienen ambigüedades de ordenamiento. Segundo, porque distintas elecciones de orden corresponden simplemente a asignar diferentes valores a los coeficientes de los posibles términos en  $\hat{H}$ , y normalmente al formular una teoría dejamos que dichas coeficientes sean arbitrarios.

Otro punto que vale la pena resaltar es que, en la integral de trayectoria que definimos, tratamos de manera distinta a  $Dq(t)$  y  $Dp(t)$  —p.ej.,  $p(t)$  no está fijo en los extremos. (Por supuesto, la situación se invertiría si calculáramos el propagador en espacio de momentos,  $\langle p; t' | p, t \rangle$ .) Esto tiene como consecuencia que  $Dq(t)Dp(t)$  no es invariante bajo transformaciones canónicas generales en el espacio Fase, que mezclan las  $q$ 's con las  $p$ 's, sino solo bajo las llamadas "transformaciones puntuales (o de punto)",



$$q_a \rightarrow Q_a(q) \quad , \quad p_a \rightarrow P_a = \sum_b p_b \frac{\partial q_b}{\partial Q_a} \quad ,$$

que representan cambios de coordenadas en el espacio configuración.

En general, se debe tener cuidado de definir la medida  $\int Dq(\tau) Dp(\tau)$  de manera compatible con las simetrías clásicas del problema. Cuando esto no resulta posible, la teoría cuántica NO tendrá la simetría en cuestión, y se dice que tenemos una "anomalía" (teoría de Campos II).

Notemos ahora que en  $\int Dq(\tau) Dp(\tau)$  podemos dejar una de las integrales para el final, digamos aquella que corresponde al tiempo intermedio  $t_I = t_0 + I\Delta t$ .

Si tomamos  $I \propto N \rightarrow \infty$  de manera tal que  $t_I \equiv t''$  esté fijo, podemos entonces partir la integral funcional en 2:

$$\langle q' | t' | q | t \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \underbrace{d^L q_1 \dots d^L q_I}_{\text{---}} \dots \underbrace{d^L q_{N-1}}_{\text{---}} \underbrace{\frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_I}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}}_{\text{---}}$$

$$\exp \left[ i \left( \sum_{n=0}^{I-1} + \sum_{n=I}^{N-1} \right) \left\{ p_n \cdot (q_{n+1} - q_n) - H(q_{n+1}, p_n) \Delta t \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
\langle q'; t' | q; t \rangle &= \int \mathcal{D}q'' \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \mathcal{D}q_{I+1} \dots \mathcal{D}q_{N-1} \frac{\mathcal{D}p_I}{(2\pi)^L} \dots \frac{\mathcal{D}p_{N-1}}{(2\pi)^L} \\
&\equiv \int \mathcal{D}q''_I \exp \left[ i \sum_{n=I}^{N-1} \left\{ p_n (q_{n+1} - q_n) - H(q_{n+1}, p_n) \Delta t \right\} \right] \\
&\quad \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \mathcal{D}q_1 \dots \mathcal{D}q_{I-1} \frac{\mathcal{D}p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{\mathcal{D}p_{I-1}}{(2\pi)^L} \\
&\quad \exp \left[ i \sum_{n=0}^{I-1} \left\{ p_n (q_{n+1} - q_n) - H(q_{n+1}, p_n) \Delta t \right\} \right] \\
&= \int \mathcal{D}q'' \int_{q(t'')=q'}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) e^{i \int_{t''}^{t'} (p\dot{q} - H)} \int_{q(t)=q}^{q(t'')=q''} \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) e^{i \int_t^{t''} (p\dot{q} - H)}.
\end{aligned}$$

Esto es obvio en el lenguaje canónico, porque simplemente dice que

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \int \mathcal{D}q'' \langle q'; t' | q''; t'' \rangle \langle q''; t'' | q; t \rangle; \quad \checkmark$$

pero es satisfactorio ver que podemos deducir esta propiedad puramente en el nuevo lenguaje.

Usándola, podemos entender lo que sucede cuando consideramos la integral funcional con inserciones adicionales

en el integrando, como p.ej.

$$\int_{\mathcal{D}_q} \mathcal{D}_p \exp\left[i \int_t^{t'} (\rho \dot{q} - H)\right] q_a(t'') q_b(t''')$$

$\underbrace{q_a(t'') q_b(t''')}_{= q_b(t''') q_a(t'')} \leftarrow \text{conmutan, porque son simples números}$

Suponiendo sin perder generalidad que  $t' > t''' > t'' > t$ , esta expresión se puede reescribir en la forma

$$\int_{\mathcal{D}_q}^{L'''} \int_{\mathcal{D}_q}^{L''} \int_{\mathcal{D}_q} \mathcal{D}_p q_b(t''') e^{i \int_{t'''}^{t'} (\rho \dot{q} - H)} \int_{\mathcal{D}_q} \mathcal{D}_p q_a(t'') e^{i \int_{t''}^{t'''} (\rho \dot{q} - H)}$$

$\leftarrow \int_{\mathcal{D}_q} \mathcal{D}_p e^{i \int_t^{t''} (\rho \dot{q} - H)} \right.$

$$= \int_{\mathcal{D}_q}^{L'''} \int_{\mathcal{D}_q}^{L''} \underbrace{\langle q'; t' | q'''; t''' \rangle}_{\hat{q}_b(t''') | q''; t'''} \underbrace{q_b'''}_{\hat{q}_a(t'') | q''; t''} \langle q''; t'' | q'; t' \rangle$$

es decir,

$$\int_{\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}}^{\mathcal{F}(t')=\mathcal{F}'} \mathcal{D}\mathcal{F} \mathcal{D}\rho \int_a^{t''} \hat{\mathcal{F}}_a(t'') \hat{\mathcal{F}}_b(t''') e^{i \int_t^{t'} \mathcal{L}(\rho \hat{\mathcal{F}} - H)} \hat{\mathcal{F}}_a(t''') \hat{\mathcal{F}}_b(t'') | \mathcal{F}; t \rangle$$

$$= \int_a^{t'''} \int_b^{t''} \langle \mathcal{F}; t' | \hat{\mathcal{F}}_b(t'') \hat{\mathcal{F}}_a(t''') | \mathcal{F}; t'' \rangle \langle \mathcal{F}; t'' | \hat{\mathcal{F}}_a(t''') \hat{\mathcal{F}}_b(t'') | \mathcal{F}; t' \rangle \langle \mathcal{F}; t' | \mathcal{F}; t \rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}; t' | \hat{\mathcal{F}}_b(t'') \hat{\mathcal{F}}_a(t''') | \mathcal{F}; t \rangle.$$

Claramente, si hubiéramos supuesto que  $t' > t'' > t''' > t$  obtendríamos el mismo resultado pero con las etiquetas  $t'''$  y  $t''$  intercambiadas, es decir,

$$\langle \mathcal{F}; t' | \hat{\mathcal{F}}_a(t'') \hat{\mathcal{F}}_b(t''') | \mathcal{F}; t \rangle.$$

Vemos entonces que, al traducir del lenguaje de la integral funcional al lenguaje canónico, las funciones numéricas insertadas en el integrando se convierten en operadores ordenados de tal manera que el tiempo en el que están evaluados aumenta de derecha a izquierda.

Es decir, más en general, tenemos

$$\int_{\substack{\eta(t')=\eta' \\ \eta(t)=\eta}} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}p \exp\left[i \int_t^{t'} 2\pi(p\dot{\eta} - H)\right] \hat{O}_A(t_A) \hat{O}_B(t_B) \dots$$

$$= \langle \eta'; t' | T\{\hat{O}_A(t_A) \hat{O}_B(t_B) \dots\} | \eta; t \rangle,$$

donde  $T$  denota el orden temporal (o "cronológico") que nos fue útil en varios lugares de nuestra discusión en cuantización canónica.

L2.5: 21/11/18    L3.5: 19/05/17

Frecuentemente  $H(\eta, p)$  es cuadrático en  $p$ , en cuyo caso la integral  $\int \mathcal{D}p(\tau)$  es gaussiana y se puede hacer fácilmente.

Recordemos que  $I(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

(porque  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\frac{a}{2}(x^2+y^2)} \stackrel{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr e^{-\frac{a}{2}r^2}$

$$\stackrel{u=r^2/2}{=} 2\pi \int_0^{\infty} du e^{-au} = \frac{2\pi}{a} )$$

Esto se puede generalizar al caso de múltiples variables,

$$I(\underline{\tilde{A}}, \underline{\tilde{B}}) \equiv \int d^D x \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^D A_{ab} x^a x^b + \sum_{a=1}^D B_a x^a \right]$$

con  $A_{ab}, B_a \in \mathbb{R}$ , y  $\underline{\tilde{A}}$  una matriz simétrica, no singular,

con eigenvalores positivos.  $\leftarrow$  para que integral converja

parte antisimétrica  
no importaría

En tal caso, es posible diagonalizar a  $\underline{\tilde{A}}$  por medio de

una matriz ortogonal  $\underline{\tilde{O}}$  ( $\underline{\tilde{O}}^T = \underline{\tilde{O}}^{-1}$ ):

$$\underline{\tilde{O}}^T \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{O}} = \underline{\tilde{\alpha}} \leftarrow \text{diagonal: } \underline{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \dots & \alpha_D \end{pmatrix}, \alpha_a > 0.$$

Haciendo un cambio de variables (una rotación)

$$\underline{\tilde{x}} \rightarrow \underline{\tilde{x}}' = \underline{\tilde{O}}^{-1} \underline{\tilde{x}}, \text{ tenemos entonces}$$

$$\sum_{a,b=1}^D A_{ab} x^a x^b = \underline{\tilde{x}}^T \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{x}} = \underline{\tilde{x}}'^T \underbrace{\underline{\tilde{O}}^T \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{O}}}_{\underline{\tilde{\alpha}}} \underline{\tilde{x}}' = \sum_{a=1}^D \alpha_a x'^a{}^2,$$

$$\sum_{a=1}^D B_a x^a = \sum_{a,b=1}^D B_a O_{ab} x'^b = \sum_{b=1}^D \underbrace{\left( \sum_{a=1}^D B_a O_{ab} \right)}_{\equiv \beta_b} x'^b$$

$$\text{y } d^D x = d^D x' |\det \underline{\tilde{O}}|, \text{ así que}$$

$$\begin{aligned}
I(\vec{A}, \vec{B}) &= \int \mathcal{D}x' \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^D \alpha_a x'^a{}^2 + \sum_{b=1}^D \beta_b x'^b \right] \\
&= \prod_{a=1}^D \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x'^a \exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha_a x'^a{}^2 + \beta_a x'^a \right] \right) \\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{2} \alpha_a \left( x'^a - \frac{\beta_a}{\alpha_a} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta_a^2}{\alpha_a}}_{\equiv x''^a} \\
&= \prod_{a=1}^D \left( \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\beta_a^2}{\alpha_a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x''^a \exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha_a x''^a{}^2 \right] \right) \\
&\quad \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_a}}}_{\beta_a = \sum_{b=1}^D B_b O_{ba}} \\
&= \left[ \prod_{a=1}^D \left( \frac{\alpha_a}{2\pi} \right) \right]^{-1/2} \exp \left[ +\frac{1}{2} \sum_{a=1}^D \frac{\beta_a^2}{\alpha_a} \right] \\
&\quad \underbrace{\det \left( \frac{1}{2\pi} \vec{A} \right)}_{\sum_{a=1}^D \frac{1}{\alpha_a} \sum_{b,c=1}^D B_b O_{ba} B_c O_{ca}} \\
&\quad = \vec{B}^T \vec{O} \vec{\alpha}^{-1} \vec{O}^T \vec{B}.
\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\alpha}} &= \underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{O}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}}^{-1} = \underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{O}} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{O}} \underline{\underline{\alpha}}^{-1} \underline{\underline{O}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}, \end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$\boxed{I(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\frac{1}{2\pi} \underline{\underline{A}})}} \exp\left[\frac{1}{2} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}\right]} \quad (\star)$$

Vale la pena notar que el exponente en esta expresión final coincide con el exponente cuadrático original,

$$Q(\vec{x}) \equiv -\frac{1}{2} \vec{x}^T \underline{\underline{A}} \vec{x} + \underline{\underline{B}}^T \vec{x} = -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^D x^a A_{ab} x^b + \sum_{a=1}^D B_a x^a$$

pero evaluado en el punto  $\vec{x} = \vec{x}$  donde la función

$Q$  es estacionaria:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} Q(x) = -\sum_{b=1}^D A_{ab} x^b + B_a = 0$$

$$\text{en } \vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \equiv \vec{x},$$



$$Q(\vec{x}) \equiv -\frac{1}{2} \vec{x}^T \underline{\underline{A}} \vec{x} + \vec{B}^T \vec{x}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \\ Q(\vec{\xi}) &= -\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}^{-1} \vec{B})^T \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{A}}^{-1} \vec{B}) + \vec{B}^T (\underline{\underline{A}}^{-1} \vec{B}) \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\vec{B}^T \underline{\underline{A}}^{-1 T} \vec{B}}_{= \underline{\underline{A}}^{-1} \text{ porque } \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T} + \vec{B}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \vec{B} = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{B}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \vec{B}}_{\text{coincide con exponente en ec. } (\star), \text{ p. 529}}. \checkmark \end{aligned}$$

(La razón es que el paso de completar el cuadrado equivale a desarrollar en Taylor alrededor de  $\vec{\xi}$ :

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= Q(\vec{\xi}) + \sum_{a=1}^D \frac{\partial Q}{\partial x^a} \bigg|_{\vec{x}=\vec{\xi}} (\vec{x}-\vec{\xi})^a \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^D (\vec{x}-\vec{\xi})^a \underbrace{\frac{\partial^2 Q}{\partial x^a \partial x^b}}_{-A_{ab}} \bigg|_{\vec{x}=\vec{\xi}} (\vec{x}-\vec{\xi})^b \\ &\quad + \text{términos con } \frac{\partial^l Q}{\partial x^1 \dots \partial x^l} \bigg|_{\vec{x}=\vec{\xi}} \quad l > 2. \end{aligned}$$

↑ queda como constante en exponente

← expresión cuadrática que conduce a determinante

Por continuación analítica, la fórmula  $(\star)$  se puede extender al caso con  $\underline{\underline{A}}, \vec{B} \in \mathbb{C}$ . P.ej. (ver tarea 7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{i}{2}ax^2 + ibx} = \sqrt{\frac{i2\pi}{a}} e^{-\frac{i}{2}\frac{b^2}{a}}$$

caso anterior, con  $a \rightarrow -ia, b \rightarrow ib$

Notar que la convergencia de esta integral a priori NO es obvia

Volvamos ahora a la integral de camino, suponiendo un Hamiltoniano cuadrático en las  $p$ 's, que es el caso más común:

$$H(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^L A_{ab}(\underline{q}) p_a p_b + \sum_{a=1}^L B_a(\underline{q}) p_a + C(\underline{q}).$$

Tenemos entonces

$$\langle \underline{q}' ; t' | \underline{q} ; t \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\underline{q}_1 \cdots \mathcal{D}\underline{q}_{N-1} \underbrace{\int_{(2\pi)^L}^L \mathcal{D}\underline{p}_0 \cdots \int_{(2\pi)^L}^L \mathcal{D}\underline{p}_{N-1}}_{\text{integrales gaussianas}}$$

$$\times \exp \left[ i \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ p_n \cdot (\underline{q}_{n+1} - \underline{q}_n) - \left[ \frac{1}{2} p_n \cdot \tilde{A} \cdot p_n + B \cdot p_n + C \right] \Delta t \right\} \right].$$

↑ evaluar en  $\underline{q}_{n+1}$

El exponente es estacionario en  $p_n$  tal que

$$\underline{q}_{n+1} - \underline{q}_n - [ \tilde{A} \cdot p_n + B ] \Delta t = 0, \text{ es decir,}$$

$$\frac{\underline{q}_{n+1} - \underline{q}_n}{\Delta t} = \tilde{A} \cdot p_n + B = \frac{\partial H(\underline{q}_{n+1}, p_n)}{\partial p_n},$$

que reconocemos como la versión discretizada de

la ecuación de Hamilton  $\dot{\underline{q}}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}.$

Resolviendo en este valor de  $p_a$ , el exponente  $p \cdot \dot{q} - H$  coincidirá con el Lagrangiano usual  $L(q, \dot{q})$  (tal que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} [p \cdot \dot{q} - H(q, p)] = \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_b + p_a - \frac{\partial H}{\partial p_b} \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a}$$

$\swarrow$  derivada a  $q$  fijo  
 $\swarrow$  Hamilton  
 $\searrow$

$$= \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_b + p_a - \dot{q}_b \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a} \quad \checkmark$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\{ \left[ \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} - B \right] \cdot p_n - \frac{1}{2} p_n \cdot A \cdot p_n + C \right\} \Big|_{p_n = \tilde{A}^{-1} \cdot \left[ \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} - B \right]}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} - B \right] \cdot \tilde{A}^{-1} \cdot \left[ \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} - B \right] + C \right\}$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t'} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left[ \dot{q}(\tau) - B(q(\tau)) \right] \cdot \tilde{A}^{-1}(q(\tau)) \cdot \left[ \dot{q}(\tau) - B(q(\tau)) \right] + C(q(\tau)) \right\}$$

$$L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \leftrightarrow H = p \cdot \dot{q} - L$$

$\uparrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$= S[q(\tau)].$$

Cuando llevamos a cabo las  $N \times L$  integrales gaussianas

$\int_{-\infty}^{\infty} dp_n$ , obtenemos entonces una integral funcional

sobre  $q(\tau)$  que tiene la forma

$$\langle \tilde{q}; t' | \tilde{q}; t \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\tilde{q}_1 \dots \mathcal{D}\tilde{q}_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} \left[ \det \left( \frac{i\Delta t}{2\pi} \tilde{A}(\tilde{q}_n) \right) \right]^{-1/2} \\ \times \exp \left[ i \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t L \left( \tilde{q}_n, \frac{\tilde{q}_{n+1} - \tilde{q}_n}{\Delta t} \right) \right].$$

Normalmente  $\tilde{A}$  es independiente de  $\tilde{q}$ , en cuyo caso el producto de las determinantes ( $\equiv$  determinante función) es simplemente una constante de normalización

$$\mathcal{N}_A \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{i\Delta t}{2\pi} \right)^{-LN/2} \left[ \det \tilde{A} \right]^{-1/2},$$

que se puede sacar de la integral para obtener finalmente la versión Lagrangiana de la integral de camino,

$$\langle \tilde{q}; t' | \tilde{q}; t \rangle = \mathcal{N}_A \int_{\tilde{q}(t)=\tilde{q}}^{\tilde{q}(t')=\tilde{q}'} \mathcal{D}\tilde{q}(z) \exp \left[ i \int_t^{t'} dz L(\tilde{q}(z), \dot{\tilde{q}}(z)) \right].$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\exp(iS(\tilde{q}(z)))}$

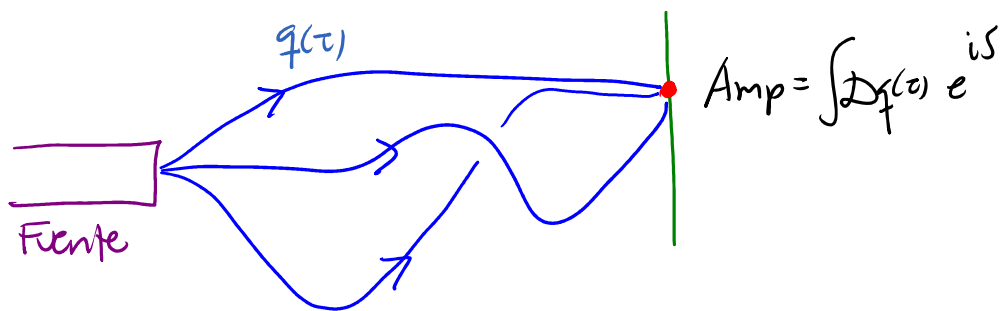
En casos donde  $\tilde{A}$  si depende de  $f(z)$ , es importante recordar incluir la determinante dentro de  $\int Df(z)$ .

Ya sea en la versión original, Hamiltoniana, o en la versión Lagrangiana que acabamos de deducir,

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \mathcal{N} \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} Dq(\tau) \exp \{ iS[q(\tau)] \},$$

es interesante resaltar el contenido físico de la integral funcional. Este formalismo nos da un método alternativo de cuantización, basado en la premisa de que el sistema físico realmente explora todas las trayectorias disponibles en el espacio configuración (o fase).

En esta narración de los hechos, un electrón (no relativista), p.ej., se traslada de una posición espacial a otra



'olfateando' todos los caminos posibles, y asignándole un peso  $e^{iS}$  a cada uno de ellos para determinar a dónde

le 'late' llegar. Esta es una descripción mucho más intuitiva que la del formalismo canónico, pero equivalente. En la tarea 7 exploraremos en particular la luz que este formalismo arroja sobre el límite clásico ( $\hbar \rightarrow 0$ ).

L44: 25/11/22

Dado que la fase  $e^{iS}$  tiene comportamiento oscilatorio, no es obvio que la integral de trayectorias Lagrangianas converja (como de hecho no lo era tampoco en la versión Hamiltoniana).

Podemos obtener una integral mejor definida si sustituimos  $t = -it_E$ , tomando  $t_E \in \mathbb{R}$  (en vez de  $t \in \mathbb{R}$ ).

Definiendo tiempo euclideo

$$iS[\gamma(\tau)] = i \int_t^{t'} L(\gamma(\tau), \frac{\partial}{\partial \tau} \gamma(\tau))$$

$$= + \int_{t_E}^{t'_E} \int_{\tau_E} L(\gamma(\tau_E), i \frac{\partial}{\partial \tau_E} \gamma(\tau_E))$$

$$\equiv - \int_{t_E}^{t'_E} \int_{\tau_E} L_E(\gamma(\tau_E), \partial_{\tau_E} \gamma(\tau_E))$$

$$\equiv S_E[\gamma(\tau_E)]$$

tenemos entonces

$$\langle \zeta'; t'_E | \zeta; t_E \rangle = \mathcal{N} \int_{\zeta(t_E)=\zeta}^{\zeta(t'_E)=\zeta'} \mathcal{D}\zeta(\tau_E) \exp[-S_E(\zeta(\tau_E))].$$

El punto importante es que, como los sistemas físicos estables tienen un Hamiltoniano acotado por debajo, la acción euclídeana  $S_E$  está también acotada por debajo, de tal manera que  $\exp[-S_E]$  no puede ser divergente.

P.ej., para la partícula no relativista en un potencial externo,

$$L = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right)^2 - V(\zeta) \implies L_E = \underbrace{\frac{1}{2} m \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_E} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{V(\zeta)}_{\geq V_{\min}}.$$

En la práctica, normalmente hacemos nuestros cálculos en la versión euclídeana de la integral funcional, y al final definimos la integral lorentziana como la

## Continuación analítica correspondiente.

Esta maniobra,  $t \rightarrow -it_E$ , se puede llevar a cabo igualmente en el formalismo canónico:

$$\langle \zeta'; t' | \zeta; t \rangle = \langle \zeta' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \zeta \rangle = \langle \zeta' | e^{-\hat{H}(t'_E - t_E)} | \zeta \rangle.$$

Podemos notar aquí que, si tomamos  $T \equiv t'_E - t_E \rightarrow \infty$ , el operador de evolución  $\exp[-\hat{H}T]$  se convierte en un operador de proyección sobre  $|\Omega\rangle$ , el estado base de la teoría (el estado con más baja energía):

$$e^{-\hat{H}T} |\Psi\rangle = \sum_{\epsilon} e^{-\hat{H}T} |\epsilon\rangle \langle \epsilon | \Psi \rangle = \sum_{\epsilon} e^{-E_{\epsilon}T} |\epsilon\rangle \langle \epsilon | \Psi \rangle$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow \infty} e^{-E_{\Omega}T} |\Omega\rangle \langle \Omega | \Psi \rangle$$

← Esto es lo mismo que  
obtuvimos en la p. 388  
tras  $t \rightarrow t(1-i\epsilon)$

Podemos usar esta propiedad para calcular valores esperados en el estado fundamental,



$$\langle \zeta'; T | T \{ \hat{O}_A(t_A) \hat{O}_B(t_B) \dots \} | \zeta; -T \rangle$$

$$\underbrace{\langle \zeta' | e^{-\hat{H}T}}_{\langle \zeta' | \Omega} \underbrace{e^{-\hat{H}T} | \zeta \rangle}_{\langle \Omega | \zeta \rangle}$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \langle \zeta' | \Omega \rangle e^{-E_\Omega T} \langle \Omega | T \{ \hat{O}_A(t_A) \dots \} | \Omega \rangle e^{-E_\Omega T} \langle \Omega | \zeta \rangle$$

de donde

$$\langle \Omega | T \{ \hat{O}_A(t_A) \dots \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{2E_\Omega T}}{\langle \zeta' | \Omega \rangle \langle \Omega | \zeta \rangle} \mathcal{N} \int_{\zeta(-T)=\zeta}^{\zeta(T)=\zeta'} \mathcal{D}\zeta \hat{O}_A(t_A) \dots e^{-S_E}$$

o lo que es lo mismo,

$$\langle \Omega | T \{ \hat{O}_A(t_A) \dots \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{\zeta(-T)=\zeta}^{\zeta(T)=\zeta'} \mathcal{D}\zeta(\tau) \hat{O}_A(t_A) \dots \exp[-S_E[\zeta(\tau); -T, T]]}{\int_{\zeta(-T)=\zeta}^{\zeta(T)=\zeta'} \mathcal{D}\zeta(\tau) \exp[-S_E[\zeta(\tau); -T, T]]}$$

Podemos notar así que las constantes de normalización se cancelan, y las condiciones inicial/final se vuelven

virtualmente irrelevantes, siempre y cuando impliquen un traslapo  $\neq 0$  con el estado base  $|\Omega\rangle$ .

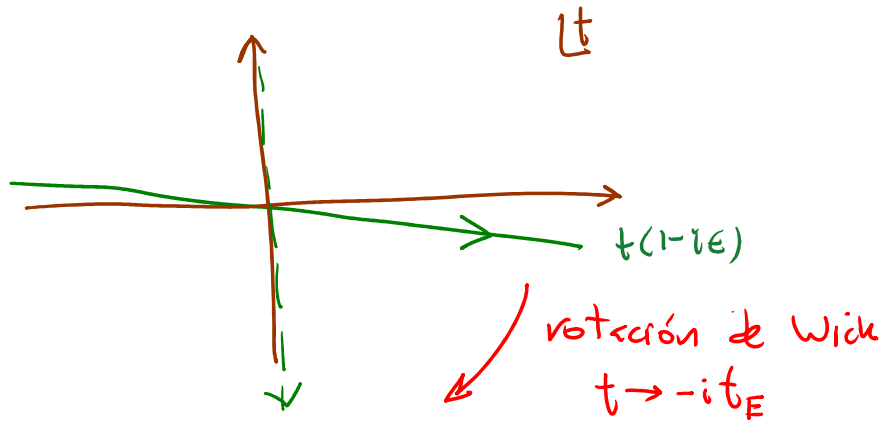
Al generalizar a campos, la fórmula anterior nos dará la receta para calcular funciones de correlación.

Es posible extender este resultado al caso con tiempo lorentziano, si agregamos  $-i\epsilon$  al intervalo temporal para preservar la propiedad de proyección sobre el vacío: dado que  $\lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} e^{-i\hat{H}T} |\psi\rangle \propto |\Omega\rangle$ , tenemos

$$\langle \Omega | T \{ \hat{O}_A(t_A) \dots \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\zeta(z) \hat{O}_A(t_A) \dots \exp[iS(-T, T)]}{\int \mathcal{D}\zeta(z) \exp[iS(-T, T)]}$$

La aparición de  $-i\epsilon$  aquí nos debe resultar familiar, puesto que figuró igualmente en nuestra deducción de la fórmula para funciones de correlación en cuantización canónica, al pasar al cuadro de interacción (pp. 388-393). Este término nos recuerda en qué dirección debemos hacer la continuación analítica, o "rotación de Wick", para

pasar del caso Lorentziano al euclideo (o viceversa):



Como explicamos en las pp. 422-423,  
la adición de  $-i\epsilon$  al tiempo corresponde exactamente  
a agregar  $+i\epsilon$  al propagador de Feynman en espacio  
de momentos, como estamos acostumbrados.

Ya que estamos en el tema, vale la pena hacer  
una observación tangencial: si en la versión euclidea  
nos restringimos a calcular la amplitud en  $f' = \bar{f}$ , e  
integramos sobre  $f$ , tendremos

$$\int d\bar{f} \langle \bar{f} | e^{-\hat{H}T} | f \rangle = \mathcal{N} \int_{f(0)=\bar{f}(T)} \mathcal{D}f(z) \exp[-S_E[f(z); 0, T]],$$

y el lado izquierdo es precisamente la función de partición  
de mecánica estadística cuántica,

$$Z(\beta) \equiv \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}}] = \int \mathcal{D}\zeta \langle \zeta | e^{-\beta \hat{H}} | \zeta \rangle,$$

con temperatura inversa  $\beta = T$ .   
 intervalo temporal (no temperatura)

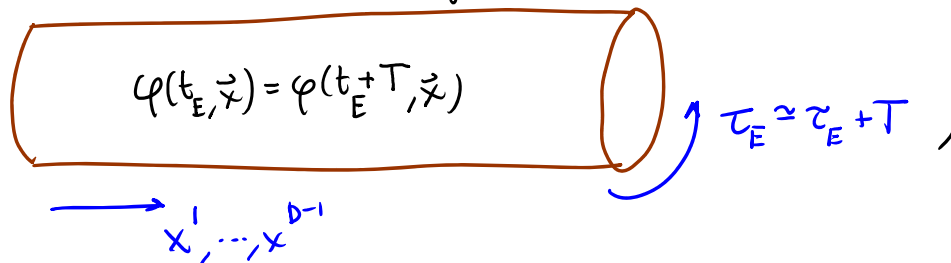
Aprendemos así que una integral funcional sobre el tiempo euclideo forma un círculo en periodo  $T$  y con condiciones de frontera periódicas, equivale a la función de partición de un sistema en  $D-1$  dimensiones espaciales, con temperatura  $1/T$ :

$$Z(\beta) = \mathcal{N} \int_{\zeta(0) = \zeta(\beta)} \mathcal{D}\zeta(\tau) \exp[-S_E[\zeta(\tau); 0, \beta]]$$

relación que resulta útil en varios contextos.

Adelantándonos al caso de campos, donde  $\zeta(t) \rightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$ , estaríamos hablando de la integral funcional sobre un cilindro,

$$\varphi(t_E, \vec{x}) = \varphi(t_E + T, \vec{x})$$



Podemos notar que el límite  $T \rightarrow \infty$  corresponde al límite

límite de temperatura cero, donde  $\text{Tr}(e^{-\beta H} \dots) \rightarrow \langle \Omega | \dots | \Omega \rangle$ . ✓

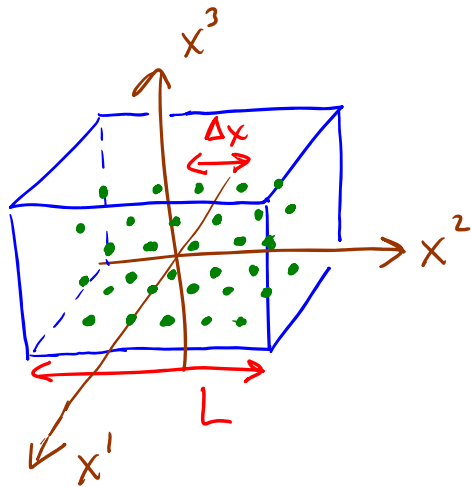
Todo lo que hemos dicho se puede generalizar de manera muy directa al caso de un sistema de campos  $\varphi(\vec{x}, t)$ . Estrictamente hablando, para ello primero tenemos que discretizar el espacio, de manera análoga a como discretizamos ya al tiempo, y acotar nuestro sistema poniéndolo en una caja de volumen grande pero finito  $V$ , para obtener nuevamente un sistema con un número finito de grados de libertad.

Podemos, p.ej., escoger una red cúbica con espaciamiento  $\Delta x$  y lado de longitud  $L$ .

Si definimos  $\vec{x}_{\vec{n}} \equiv \vec{n} \Delta x$ , con  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ , entonces nuestros

variables dinámicas serán el conjunto discreto

$$\varphi_{\vec{n}}(t) \equiv \varphi(t, \vec{x}_{\vec{n}}). \quad (\leftrightarrow q_a(t))$$



siguiendo los mismos pasos que antes [ver, p.ej., Greiner, p.368, Ej. 12.1], podemos entonces formular el propagador en términos de una integral de trayectorias hamiltonianas,

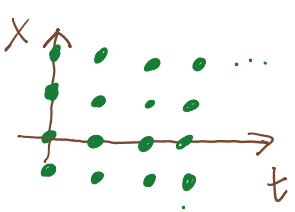
$$\langle \varphi(\vec{x}'); t' | \varphi(\vec{x}); t \rangle = \int_{\varphi(t, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \forall \vec{x}}^{\varphi(t', \vec{x}) = \varphi(\vec{x}') \forall \vec{x}} \mathcal{D}\varphi(t, \vec{x}) \mathcal{D}\pi(t, \vec{x}) \exp \left[ i \int_t^{t'} dt \int d^3x \{ \pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\varphi, \vec{\nabla}\varphi, \pi) \} \right]$$

donde  $|\varphi(\vec{x}); t\rangle$  denota un eigenestado del operador de campo en el cuadro de Heisenberg,  $\hat{\varphi}(t, \vec{x}) |\varphi(\vec{x}); t\rangle = \varphi(\vec{x}) |\varphi(\vec{x}); t\rangle$ ,

$\pi(t, \vec{x})$  es una variable de integración funcional independiente de  $\varphi(t, \vec{x})$ , y la medida se define a través de, p.ej.

$$\mathcal{D}\varphi(t, \vec{x}) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_{\vec{n}} \mathcal{D}\varphi(t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \prod_{\vec{n}, m} d\varphi(t_m, \vec{x}_n)$$

cf.  $\prod_a \mathcal{D}f_a(t) = \prod_a \left( \prod_m d f_{a,m} \right)$



Por supuesto,  $\mathcal{H}$  es la densidad hamiltoniana y


$$\partial_i \varphi(t, \vec{x}) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(\vec{x} + \Delta x \vec{u}_i) - \varphi(\vec{x})}{\Delta x} \right]$$

↖ vector unitario en dirección  $x_i$

L43.5: 23/11/18

Si  $\mathcal{H}(\varphi, \vec{\nabla}\varphi, \Pi)$  es cuadrático en  $\Pi$  y el coeficiente de  $\Pi^2$  es independiente de  $\varphi$  y  $\vec{\nabla}\varphi$ , tenemos también la versión lagrangiana

$$\langle \varphi(\vec{x}), t | \varphi(\vec{x}), t \rangle = \mathcal{N} \int_{\substack{\varphi(t, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \forall \vec{x} \\ \dot{\varphi}(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(\vec{x}) \forall \vec{x}}} \mathcal{D}\varphi(\vec{x}, t) \exp \left[ i \int dt d^3x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi) \right].$$

  
 $S[\varphi]$

Podemos notar que, de hecho, la integral funcional para mecánica cuántica se puede considerar un caso particular de la de campos, interpretando a  $\varphi(t)$  como un "campo" en 0+1 dimensiones. De 1+1 dimensiones en adelante, además del límite  $\Delta t \rightarrow 0$  que teníamos antes, necesitamos el límite adicional  $\Delta x \rightarrow 0$ . Como veremos más adelante, este último da lugar a divergencias "ultravioleta" que de alguna manera deberán controlarse ('regularizand') y eliminarse ('renormalizand'). Además, el límite  $V \rightarrow \infty$  puede dar lugar a divergencias "infrarrojas".

Con base en lo que aprendimos en el caso no relativista, sabemos que las funciones de correlación de  $N$  puntos, vacío de la teoría interactuante

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

cuadro de Heisenberg  $\xrightarrow{\quad}$   $\xleftarrow{\quad}$   $x_i^\mu \equiv (t_i, \vec{x}_i)$

se pueden calcular en el formalismo de la integral funcional usando la fórmula de la p. 539,

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}.$$

Esta fórmula debe dar, entonces, los mismos resultados que obtuvimos por cuantización canónica, donde usamos (p. 393)

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_N) \exp \left[ -i \int_{-T}^T d^4x \hat{\mathcal{L}}_{int}^I \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp \left[ -i \int_{-T}^T d^4x \hat{\mathcal{L}}_{int}^I \right] \} | 0 \rangle}$$

Como punto de partida para deducir la expansión perturbativa.



Consideremos primero un campo escalar real y libre,

$$\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\omega \varphi) \equiv \frac{1}{2} \partial_\omega \varphi \partial^\omega \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2.$$

Para  $N=2$  esperamos obtener el propagador libre,

$$G_2^{(0)}(x, x') = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') \exp[i\int \mathcal{L}_0 \varphi]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int \mathcal{L}_0 \varphi]}$$

← Integral gaussiana  
con 2 inserciones

← Integral gaussiana

$$\stackrel{?}{=} \int \frac{\mathcal{D}^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \underbrace{\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{\equiv \tilde{K}_F(p)}$$

≡  $K_F(x-x')$

Recordemos la definición de la derivada funcional de una funcional  $F[f(x)]$  (p.161),

$$\frac{\delta F}{\delta f(x')} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x-x')] - F[f(x)]}{\epsilon}$$

# de argumentos no fijos

que implica que

$$\frac{\delta F(x)}{\delta F(x')} = \delta^{(n)}(x-x') \quad (\text{análogo a } \frac{\partial f_i}{\partial f_k} = \delta_{ik}),$$

$$\frac{\delta}{\delta F(x')} \int d^4x f(x) g(x) = g(x') \quad (\text{análogo a } \frac{\partial}{\partial f_k} \sum_i f_i g_i = g_k),$$

Podemos notar que

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \left[ i \int d^4y \mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi) + \int d^4y \varphi(y) J(y) \right] = \varphi(x),$$

"fuente externa" del campo  $\varphi$   
intuitivamente, vértice de 1 patra

J(y)

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \left[ e^{i \int d^4y \mathcal{L}_0 + \int d^4y \varphi J} \right] = \varphi(x) e^{i \int d^4y \mathcal{L}_0 + \int d^4y \varphi J},$$

así que el numerador de  $G_2^{(0)}(x, x')$  se puede reexpresar como

$$\int \Delta\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left[ \int \Delta\varphi e^{i \int d^4y \mathcal{L}_0 + \int d^4y \varphi J} \right]_{J=0}.$$

Esta observación nos resulta útil porque la integral funcional restante es gaussiana: el exponente

$$\int d^4y \left\{ \frac{i}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + J\varphi \right\} \stackrel{\text{partes}}{=} \int d^4y \left\{ \frac{i}{2} \varphi [-\partial^2 - m^2] \varphi + J\varphi \right\}$$

es cuadrático en  $\varphi$ .

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \Delta_y}$$

(El truco anterior es completamente análogo a

$$\int \prod_n \vec{\varphi}_n \varphi_n \varphi_n' e^{-\sum_{m,m'=1}^N \varphi_m A_{mm'} \varphi_{m'}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_n} \frac{\partial}{\partial J_n'} \left[ \int \prod_n \vec{\varphi}_n e^{-\sum_{m,m'} \varphi_m A_{mm'} \varphi_{m'} + \sum_m \varphi_m J_m} \right]_{\vec{J}=0},$$

que es consecuencia de  $\frac{\partial J_m}{\partial J_n} = \delta_{m,n}$ .

Sabemos que al hacer la integral gaussianas, acabaremos obteniendo el exponente en el valor de  $\varphi(x)$  que lo extremiza, o en otras palabras, en la solución a la ecuación de Euler-Lagrange que proviene de la acción modificada

$$\int d^4x (\mathcal{L}_0 - i\varphi J) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Delta_x \varphi - i\varphi J \right\},$$

$\uparrow$   $\uparrow \mathcal{L}_0 = -\partial^2 - m^2$

que es  $\Delta_x \varphi - iJ = 0$ , es decir,

$$(\partial^2 + m^2) \varphi(x) = -iJ(x),$$

la ec. de Klein-Gordon con una fente  $-iJ(x)$ .

Nota: en la mayoría de los libros de texto, la fuente se define con un factor de  $i$  adicional a nuestras convenciones aquí,  $J_{\text{allá}} \equiv -i J_{\text{aquí}}$ . Eso simplifica la ec. de mov.,  $(\partial^2 + m^2)\varphi = J_{\text{allá}}$ , pero lo obliga a uno a escribir

$$\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{i\int d^4y \mathcal{L}_0} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left[ \int \mathcal{D}\varphi e^{i\int d^4y \{ \mathcal{L}_0 + \varphi J_{\text{allá}} \}} \right]_{J_{\text{allá}}=0}$$

L

La solución a  $\Delta_x \varphi(x) = +i J(x)$  se puede expresar en la forma

$$\varphi_{\text{sol}}(x) = \int d^4x' \Delta^{-1}(x, x') J(x'),$$

donde  $\Delta^{-1}(x, x')$  es la función de Green (es decir, el inverso) del operador diferencial  $\Delta_x$ , tal que

$$\Delta_x \Delta^{-1}(x, x') = i \delta^{(4)}(x-x').$$

notar factor de  $i$

(Más adelante encontraremos a  $\Delta^{-1}$  explícitamente.)

Es importante tener claro que la variable de integración  $\varphi(x)$  dentro de la integral funcional  $\int \mathcal{D}\varphi$  NO está obligada a satisfacer la ec. de mov.: la suma es sobre todas las funciones  $\varphi(x)$ .

Pero podemos verificar explícitamente que al desarrollar el exponente alrededor de  $\varphi_{sol}(x)$ , efectivamente completamos el cuadrado, como necesitamos para hacer la integral gaussiana: si escribimos

$$\varphi(x) = \underbrace{\int \mathcal{D}x' \Delta^{-1}(x, x') J(x')}_{\varphi_{sol}(x)} + \underbrace{\varphi_f(x)}_{\text{fluctuación (arbitraria)}},$$

entonces

$$\Delta_x \varphi(x) = \Delta_x \varphi_f(x) + \underbrace{\int \mathcal{D}x' \Delta_x \Delta^{-1}(x, x') J(x')}_{i\delta^{(4)}(x-x')}$$

$$= \Delta_x \varphi_f(x) + iJ(x),$$

de modo que el término cuadrático en el exponente es

$$\frac{i}{2} \int \mathcal{D}x \varphi \Delta_x \varphi = \frac{i}{2} \int \mathcal{D}x \left[ \left( \varphi_f + \int \mathcal{D}x' \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right) \left( \Delta_x \varphi_f + iJ(x) \right) \right]$$

$$= \frac{i}{2} \int d^4x \left[ \varphi_f \Delta_x \varphi_f + i \int d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right. \\ \left. + \varphi_f i J + \int d^4x' \Delta^{-1}(x, x') J(x') \Delta_x \varphi_f(x) \right]$$

partes

$\bar{\varphi} i J$

$$= \int d^4x \left[ \frac{i}{2} \varphi_f \Delta_x \varphi_f - \frac{1}{2} \int d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') - \varphi_f J \right].$$

Y por otro lado, el término lineal en el exponente es

$$\int d^4x \varphi J = \int d^4x \left[ \varphi_f J + \int d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right],$$

de modo que el exponente completo es

$$\int d^4x \left[ \frac{i}{2} \varphi \Delta_x \varphi + \varphi J \right] = \int d^4x \left[ \frac{i}{2} \varphi_f \Delta_x \varphi_f - \frac{1}{2} \int d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') - \varphi_f J \right. \\ \left. + \varphi_f J + \int d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right]$$

$$= \int d^4x \left[ \frac{i}{2} \varphi_f \Delta_x \varphi_f + \frac{1}{2} \int d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right]$$

puramente cuadrático en  $\varphi_f$ , que tomaremos como nuestra nueva variable de integración ✓

constante (independiente de  $\varphi_f$ )

Ahora, dado que  $\int \mathcal{D}\varphi(x) \equiv \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\varphi(x)$  (en versión discretizada),  
y en cada punto  $x$

$$\varphi(x) \text{ difiere de } \varphi_f(x) \equiv \varphi(x) - \int \mathcal{D}x' \Delta^{-1}(x, x') J(x')$$

por una constante, tenemos

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) = \int \mathcal{D}\varphi_f(x),$$

y concluimos entonces que

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi e^{\int \mathcal{D}x \left[ \frac{i}{2} \varphi \Delta_x \varphi + \varphi J \right]} \\ &= e^{\frac{1}{2} \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x')} \underbrace{\int \mathcal{D}\varphi_f e^{\int \mathcal{D}x \frac{i}{2} \varphi_f \Delta_x \varphi_f}}_{\propto (\text{Det } \Delta_x)^{-1/2}} \\ &\equiv e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} \underbrace{\qquad}_{\text{determinante funcional}} \\ &\qquad\qquad\qquad (\text{producto de eigenvalores}) \end{aligned}$$

Recordemos ahora que, para el numerador de  $G_2^{(0)}(x, x')$ ,  
lo que necesitamos es diferenciar este resultado con  
respecto a  $J$ . Toda la dependencia de  $J$  está ya  
afuera de la integral funcional, y dado que

$$e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} = 1 + \underbrace{\left( \frac{1}{2} \int \delta^4 x \delta^4 x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x') \right)}_{\equiv \frac{1}{2} \int \delta^4 x \delta^4 x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x')} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J \right)^2 + \dots,$$

tenemos

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left[ e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} \right]_{J=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left[ \cancel{1} + \frac{1}{2} \int \delta^4 y \delta^4 y' J(y) \Delta^{-1}(y, y') J(y') + \dots \right]_{J=0}$$

0 después de  
actuar en  $J=0$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[ \frac{1}{2} \int \delta^4 y \delta^4 y' \left\{ \underbrace{\frac{\delta J(y)}{\delta J(x')}}_{\delta^{(4)}(y-x')} \Delta^{-1}(y, y') J(y') + J(y) \Delta^{-1}(y, y') \underbrace{\frac{\delta J(y')}{\delta J(x')}}_{\delta^{(4)}(y'-x')} \right\} \right]$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[ \frac{1}{2} \int \delta^4 y' \Delta^{-1}(x', y') J(y') + \frac{1}{2} \int \delta^4 y J(y) \Delta^{-1}(y, x') \right]$$

$$= \frac{1}{2} \Delta^{-1}(x', x) + \frac{1}{2} \Delta^{-1}(x, x')$$

$$= \Delta^{-1}(x, x')$$

porque, como veremos en breve,  
 $\Delta^{-1}$  es simétrica en sus 2 argumentos.



Concluimos entonces finalmente que

$$\begin{aligned}
 G_2^{(0)}(x, x') &= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') \exp[i\int \mathcal{L}_0(\varphi)]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int \mathcal{L}_0(\varphi)]} \\
 &= \frac{\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left\{ \int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int \mathcal{L}_0(\varphi) + \int \varphi J] \right\}_{J=0}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int \mathcal{L}_0(\varphi)]} \\
 &= \frac{\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left\{ e^{\frac{i}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} \int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp[i\int \mathcal{L}_0(\bar{\varphi})] \right\}_{J=0}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int \mathcal{L}_0(\varphi)]} \\
 &= \frac{\Delta^{-1}(x, x') \int \mathcal{D}\bar{\varphi} \exp[i\int \mathcal{L}_0(\bar{\varphi})]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int \mathcal{L}_0(\varphi)]} \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Dets se} \\ \text{cancelan} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{G_2^{(0)}(x, x') = \Delta^{-1}(x, x')}.$$

Esto explica el patrón general que habíamos encontrado antes, en las pp. 283-285 : *el propagador libre*

siempre está dado por la función de Green del operador diferencial que figura en  $L_0$ .

Y efectivamente, en este caso podemos ver fácilmente que

$$K_F(x-x') \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

es la función de Green para  $\Delta_x = -\partial^2 - m^2$ :

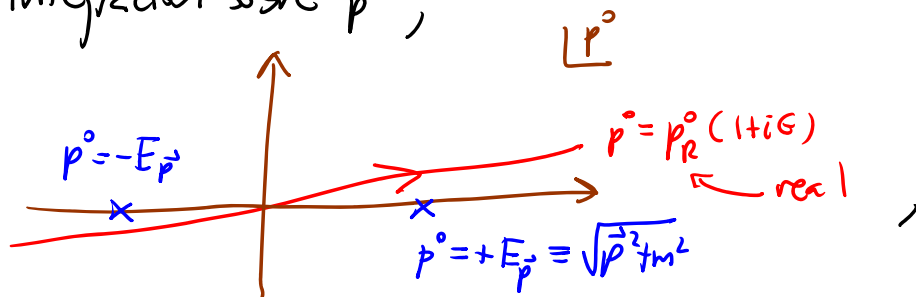
$$\begin{aligned} \Delta_x K_F(x-x') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cancel{(p^2 - m^2)} e^{-ip \cdot (x-x')} \frac{i}{\cancel{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \\ &= i \delta^{(4)}(x-x'), \end{aligned}$$

es decir,

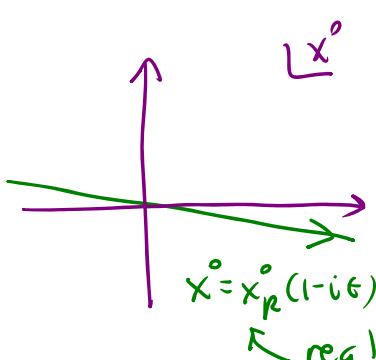
$$\Delta^{-1}(x, x') = K_F(x-x') \quad \leftarrow \text{tal como prometimos, } \Delta^{-1}(x, x') = \Delta^{-1}(x', x)$$

y reproducimos por tanto el resultado esperado para  $G_2^{(0)}$ . ✓

Recordamos de las pp. 20-23 que el  $i\epsilon$  especifica el contorno de integración sobre  $p^0$ ,



que implementa el orden temporal  $T$  — justo el orden producido por la integral funcional — y por otro lado, como vimos en las pp. 422-423, es justo lo necesario para que tengamos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_x \underbrace{\Delta^{-1}(x, x') \dots}_{i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-x')}}{p^2 - m^2}} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip^0(x^0 - x'^0) - i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = i \delta^{(4)}(x - x')$$


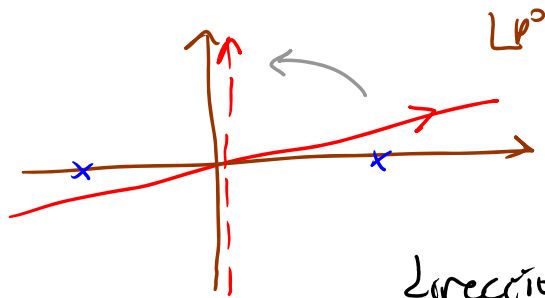
gracias a que  $ip^0(x^0 - x'^0) = i(1+i\epsilon)p_R^0(x_R^0 - x'^0)(1-i\epsilon)$

$$= i(1+\epsilon^2)p_R^0(x_R^0 - x'^0)$$

es imaginario puro.

↙ p. 540

Podemos notar de aquí, por cierto, que la **rotación de Wick** corresponde en espacio de momentos a  $p^0 = +ip_E^0$  ( $\leftrightarrow x^0 = -ix_E^0$ )



Es decir, la continuación analítica se hace justamente en la dirección necesaria para eludir los polos.

En la misma teoría libre, podemos inmediatamente deducir la función de  $N$  puntos

$$G_N^{(0)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \exp[i\int d^4x \mathcal{L}_0]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int d^4x \mathcal{L}_0]}$$

$$= \frac{1}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0}} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} \left[ \int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0 + \int d^4x \varphi J} \right]_{J=0}$$

$$= \frac{1}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0}} \underbrace{e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J}}_{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0}}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J\right)^2 + \dots \right]_{J=0}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } N \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ \frac{1}{(N/2)!} \frac{1}{2^{N/2}} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} (J \cdot \Delta^{-1} \cdot J)^{N/2} & \text{si } N \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Al diferenciar, obtenemos una suma de productos de  $N/2$   $\Delta^{-1}$ 's, evaluados en todos los distintos pares que se

pueden formar con los argumentos  $x_1, \dots, x_N$ :

$$\left. \begin{aligned} &\Delta^{-1}(x_1, x_2) \Delta^{-1}(x_3, x_4) \dots \Delta^{-1}(x_{N-1}, x_N), \\ &\Delta^{-1}(x_1, x_3) \Delta^{-1}(x_2, x_4) \dots \Delta^{-1}(x_{N-1}, x_N), \text{ etc.} \end{aligned} \right\} N! \text{ términos}$$

Cada tipo distinto de término aparece un total de

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{N}{2}\right)! & \times & 2^{N/2} \text{ veces} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{permutaciones de } N/2 & & \text{permutaciones dentro} \\ \text{parejas formadas con} & & \text{de los } N/2 \text{ parejas} \\ x_1, \dots, x_N & & \end{array}$$

# total de permutaciones de  $x_1, \dots, x_N$  que mantienen intacta nuestra elección de  $N/2$  parejas,

así que los factores numéricos se cancelan.

Recordando que  $\Delta^{-1} = K_F = G_2^{(0)}$ , obtenemos entonces

$$G_N^{(0)}(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ K_F(x_1, x_2) K_F(x_3, x_4) \dots K_F(x_{N-1}, x_N) + \text{permutaciones} & \text{si } N \in 2\mathbb{Z} \end{cases},$$

justo como obtuvimos en cuantización canónica  
(en la p. 401) usando el teorema de Wick. ✓

LI: 22/05/17 —

De manera similar, podemos proceder con la generalización  
al caso de una teoría con interacciones, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\mu \varphi, \varphi) &= \mathcal{L}_0(\partial_\mu \varphi, \varphi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad (\text{pej., } \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4). \end{aligned}$$

La función de  $N$  puntos es entonces (p. 545)

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \exp\{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}})\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}})]}$$

Lím implícito  
 $T \rightarrow (1-i\epsilon)\infty$

$$= \frac{1}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} \left[ \int \mathcal{D}\varphi \exp\{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}) + \int d^4x \varphi J\} \right]_{J=0}$$

datos inicial/final  $\varphi(\vec{x})$  NO importan en el límite  $T \rightarrow (1-i\epsilon)\infty$

$$\underbrace{\frac{1}{Z[0]}}_{\text{función } J(x) \text{ arbitraria}} \equiv Z[J] \quad \begin{array}{l} \text{funcional generatriz} \\ \text{o función de partición} \end{array}$$

$$\propto \langle \Omega | T \left\{ \exp[-i(\hat{H} + i \int d^4x \hat{\varphi} J) 2T] \right\} | \Omega \rangle$$

vacío en presencia de la fuente  $J$

Así que, si logramos calcular  $Z[J]$ , podremos determinar fácilmente  $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N$ .

Podemos notar ahora que

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi) + \int \varphi J \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{int}(\varphi(y)) \right\} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_0(\varphi) + \int \varphi J \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{int} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right\} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_0 + \int \varphi J \right\}$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ i \int \mathcal{L}_{int} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right]^n$$

$$\left( \text{pej. } \frac{\lambda}{4!} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4 \right)$$

$$= \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_{int} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right\} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_0 + \int \varphi J \right\}$$

funcional generatriz en teoría libre

$$\equiv Z_0[J]$$

$$= e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta \cdot J} Z_0[0]$$

$$\propto (\text{Det } \Delta_x)^{-1/2}$$

↘ p. 552

Resumiendo, tenemos

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right\}^n e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} J} Z_0[0],$$

expresión que claramente está escrita ya en la forma de una serie perturbativa. Como veremos en la Tarea 7

el próximo semestre, el paso de intercambiar

la integral funcional con la suma es en realidad

truculento, pero a pesar de ello la expansión

perturbativa sí resulta útil para acoplamiento débil.

Para ser concretos, concentrémonos en el ejemplo de la teoría  $\varphi^4$ , es decir, con una autointeracción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \text{ en cuyo caso tenemos}$$

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4 \right\}^n e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} J} Z_0[0].$$

Claramente, por cada factor de  $\lambda$ , tendremos un factor de  $\left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4$  que acabará evaluando a 4 de las  $\Delta^{-1}$ 's en



el mismo punto  $y$  (sobre cuya posición integramos).

Podemos representar a  $Z[J]$  gráficamente.

Definimos primero al propagador libre

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x \qquad x' \end{array} \equiv \Delta^{-1}(x, x') = K_F(x-x')$$

y denotamos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \equiv J(x),$$

adaptando la convención de que

$$\bullet \text{---} \bullet \equiv J \cdot \Delta^{-1} \cdot J \equiv \int d^4x d^4x' J(x) \Delta^{-1}(x, x') J(x').$$

Esto nos permite representar

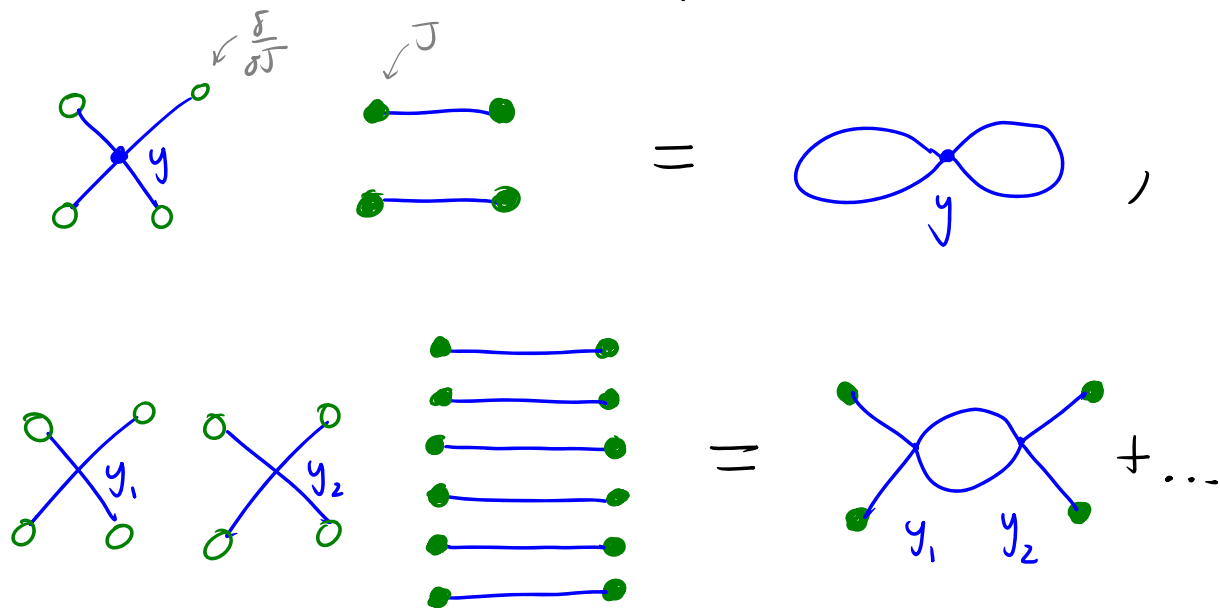
$$e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \left. \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \right\} k$$

Definimos además

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \text{---} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \equiv \int d^4y \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4,$$

Ojo: no incluye propagadores!

objeto que actúa sobre  $\exp(\frac{1}{2} J \cdot D^{-1} \cdot J)$  eliminando 4 J's a la vez y añadiendo los propagadores correspondientes en un vértice de 4 patas. P.ej.,

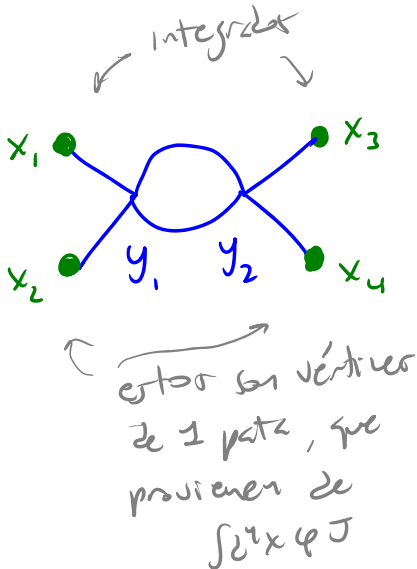


Vemos entonces que, a orden  $\lambda^n$ , la funcional generatriz  $Z[J]$  es una suma  $\sum_{k \geq 2n}$  que incluye todos los diagramas (no necesariamente conexos) con  $n$  vértices de 4 patas y  $2k - 4n$  puntos externos asociados a J's.

Físicamente,  $Z[J]$  representa a la amplitud de propagación de  $|\Omega\rangle$  a  $|\Omega\rangle$  en presencia de la fuente externa  $J(x)$ , que por finiquitar en un término en

vértice de 1 pata  $\text{---}\bullet = \int dx J(x)$

el lagrangiano que es lineal en el campo  $\varphi$ , es capaz de crear o aniquilar a las partículas (libres) asociadas a la vez, con amplitud  $J(x)$ , de tal modo que, p.ej.,



amplitud de que, empezando con  $|0\rangle$ , la fuente crea partículas en  $x_1, x_2$ , que se propagan a  $y_1$ , interactúan, se propagan a  $y_2$ , interactúan, y se propagan a  $x_3, x_4$ , donde finalmente son aniquilados por la fuente.

Vale la pena notar por cierto que la funcional generatriz en tiempo euclideo,

$$Z_E(J_E) \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ - \int d^4x_E \{ \mathcal{L}_E - J_E \varphi \} \right]$$

$$d^4x_E \equiv dt_E d^3x \equiv i d^4x \quad \leftarrow \quad J_E \equiv -iJ$$

es formalmente idéntica a la función de partición

$$Z_E(J_E) = \int \mathcal{D}\varphi \exp[-\beta H_E] = \int \mathcal{D}\varphi \exp[-\beta \int d^4x_E \mathcal{H}_E]$$

no confundir con enunciado en pp. 540-41

en mecánica estadística clásica, para un sistema continuo que vive en un espacio con 4 dimensiones espaciales, con densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}_E \equiv \mathcal{L}_E - \mathcal{V}_E \varphi$  (donde  $\mathcal{V}_E$  se interpreta como un campo externo) y temperatura inversa  $\beta = 1/k_B$ .

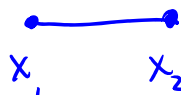
Conociendo ya la forma que toma la expansión perturbativa para  $Z[J]$ , recordemos que para determinar la función de correlación de  $N$  puntos debemos diferenciar con respecto a  $N$   $J$ 's más ( $\equiv \begin{matrix} \circ & \circ & \dots & \circ \\ x_1 & x_2 & & x_N \end{matrix}$ ), y después poner  $J=0$ , de manera que solo sobrevivirán los diagramas en  $Z[J]$  que tengan exactamente  $N$  puntos externos (es decir, con  $k = \frac{N}{2} + 2n$  propagadores - ver p. 563).

Consideremos, p.ej., el caso  $N=2$ . El numero en la fórmula para el propagador interactuante  $G_2(x_1, x_2)$  es

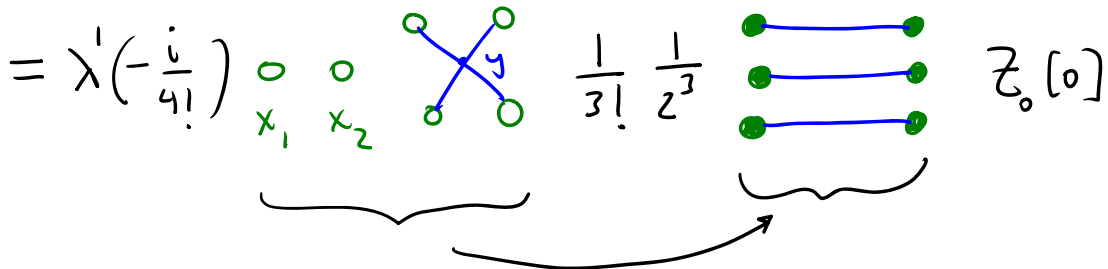
$$N_2(x_1, x_2) \equiv \int \Delta \varphi \varphi(x_1) \varphi(x_2) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4y \frac{\delta^4}{\delta J(y)^4} \right)^n e^{\frac{1}{2} J \cdot \tilde{D}^{-1} \cdot J} \Big|_{J=0} Z_0[0].$$

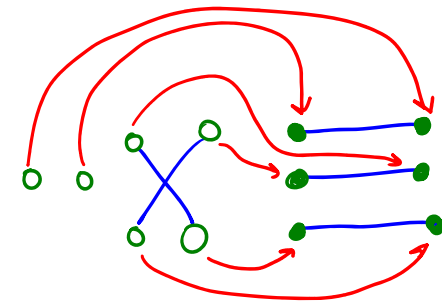
Los términos que aparecen aquí a distintos órdenes en la serie de potencias en  $\lambda$  son

$$n=0 : \lambda^0 \Delta^{-1}(x_1, x_2) Z_0[0] = \text{---} Z_0[0] ;$$


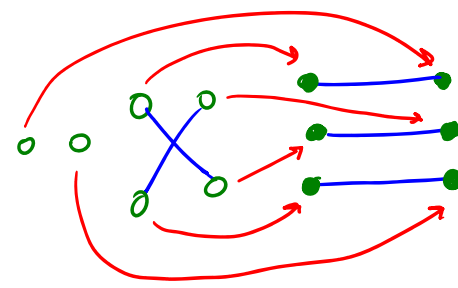
$$n=1 : \lambda^1 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{1}{4!} \left( -i \int d^4y \frac{\delta^4}{\delta J(y)^4} \right) e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} \Big|_{J=0} Z_0[0]$$

$$= \lambda^1 \left( -\frac{i}{4!} \right) \underbrace{\begin{matrix} \circ & \circ \\ x_1 & x_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \circ & \circ \\ & y \\ \circ & \circ \end{matrix}}_{\text{diagram}} \quad \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} \underbrace{\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix}}_{\text{diagram}} Z_0[0]$$


Las 6 derivadas pueden actuar en  $6! = 720$  órdenes

$$= \frac{-i\lambda}{4! 3! 2^3} \left\{ \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 4!}_{144} \right.$$


$$144 + 576 = 720 \quad \checkmark$$

$$+ \underbrace{3 \cdot 2^3 \cdot 4!}_{576} \left. \right\} Z_0[0]$$


es decir,

$$N_2^{(1)}(x_1-x_2) = -i\lambda \int d^4y \left\{ \frac{1}{8} K_F(x_1-x_2) K_F(y-y)^2 + \frac{1}{2} K_F(x_1-y) K_F(y-y) K_F(y-x_2) \right\} Z_0[0]$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1: } x_1 \text{ --- } x_2 \\ \text{Diagram 2: } \text{loop at } y \\ \text{Diagram 3: } x_1 \text{ --- } y \text{ --- } x_2 \text{ with loop at } y \end{array} \right\} Z_0[0],$$

que coincide exactamente con lo que obtuvimos en las pp. 404-5; ✓

$$n=2: \quad \lambda^2 \frac{1}{2!4!^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left( -i \int d^4y \frac{\delta^4}{\delta J(y)} \right)^2 e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} \Big|_{J=0} Z_0[0]$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{2!4!^2} \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ x_1 \quad x_2 \\ \circ \quad \circ \\ y_1 \quad y_2 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \frac{1}{5!2^5} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} Z_0[0]$$

$10! = 3,628,800$  términos

de 7 tipos distintos

es decir,

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} \\ + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} \\ + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{---} y_1 \quad y_2 \end{array} \end{array} \right\} Z_0[0];$$

$\uparrow$   
 $(\text{Det})^{-1/2}$

etc.

L44.75: 23/01/19 (+40 min)

Claramente recuperamos los mismos diagramas que obtuvimos antes (pp. 402-409) por cuantización canónica, y al dividir entre el denominador  $D_2$ , tendremos nuevamente la cancelación de las 'burbujas de vacío' (pp. 410-412) y del factor de  $Z_0[0]$ .

Podemos notar también que los factores numéricos a orden  $\lambda^n$ ,  $\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4!}\right)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{2^{2n+1}}$ , son justamente de  $\exp(iS_{int})$  de  $\exp\left(\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J\right)$

los mismos que encontramos por cuantización canónica, excepto por  $\frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{2^{2n+1}}$  que acompaña a  $(\text{---})^{2n+1}$ .

Pero este factor se cancela por completo al tomar las  $4n+2$  derivadas  $\frac{\delta}{\delta J}$ , porque se obtiene el mismo resultado reordenando los  $2n+1$  factores de  $J \cdot \Delta^{-1} J$  en las  $(2n+1)!$  maneras posibles, y eligiendo en cada uno de esos factores a cualquiera de las 2  $J$ 's para diferenciarla primero.

Deducimos entonces exactamente las mismas reglas de Feynman que ya conocíamos (p. 416, 418), incluyendo la fórmula para el factor de simetría (p. 405).

El método de cuantización por integral de trayectorias nos permite llegar mucho más rápidamente a estas reglas, porque no necesitamos lidiar con operadores y el teorema de Wick — simplemente estamos encontrando un método aproximado para hacer una integral. Enfatizaremos este punto en la Tarea 7 del próximo semestre.



Entendemos ahora el formalismo de la integral funcional para un campo escalar  $\varphi(x)$ . Por generalidad, y para describir al mundo real, nos interesan además los casos de un campo vectorial  $A_\mu(x)$  y espinorial  $\psi(x)$ .

Consideremos primero la integral funcional para un campo vectorial sin masa (pej., el campo electromagnético):

$$\int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{iS[A]}$$

$$= \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}A_3 \exp\left[i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right\}\right]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{partes}}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \right\}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \Delta_x^{\mu\nu}}$$

Podemos notar que para  $\Theta(x)$  arbitraria,

$$\Delta_x^{\mu\nu} \partial_\nu \Theta(x) = (\partial^\mu \partial^2 - \partial^\mu \partial^2) \Theta(x) = 0,$$

↕ p. 338

lo cual muestra que  $\Delta_x^{\mu\nu}$  No es invertible, es decir,

No existe  $\Delta_{\nu\lambda}^{-1}$  tal que  $\Delta_{\nu\lambda}^{-1} \Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x, x') = i \delta_{\lambda}^{\mu} \delta_{\nu}^{\alpha} \delta(x-x')$ .

No podemos entonces completar de acuerdo en  $S[A] + \int A_{\mu} J^{\mu}$ ,  
y peor aún,  $\int D A_{\mu} e^{iS}$  diverge por falta de supresión para  $A_{\mu} = \partial_{\mu} \theta$ .

Este problema, como vemos (y vimos también en la p. 338),  
se origina por la invariancia de norma de la teoría:  
los campos  $A_{\mu}(x)$  y

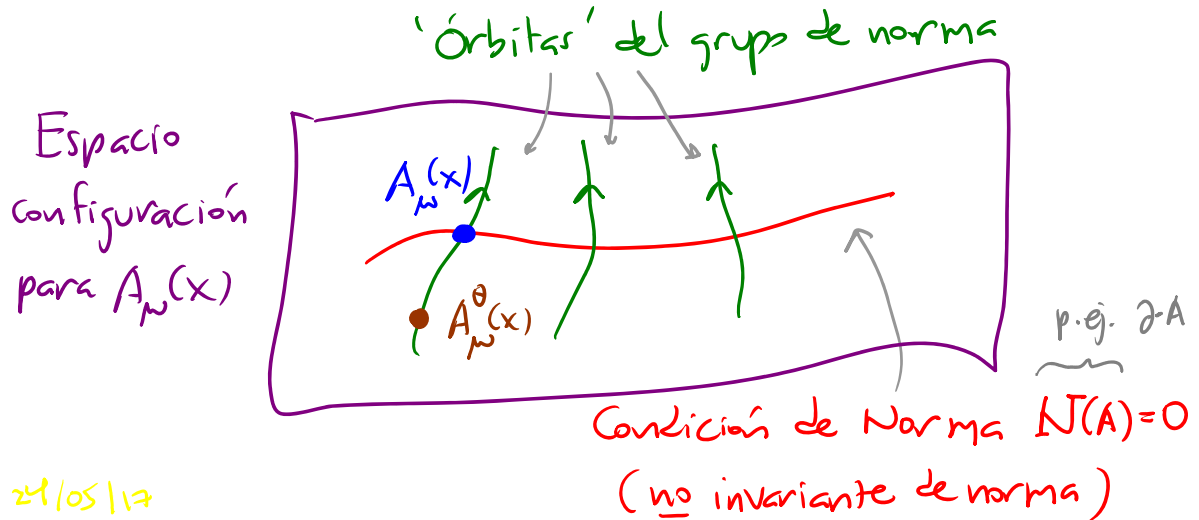
$$A_{\mu}^{\theta}(x) \equiv A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \theta(x)$$

son físicamente equivalentes.

Lo que estamos haciendo mal es que en  $\int D A_{\mu}$ ,  
las variables de integración No corresponden todas  
directamente a grados de libertad físicos: en cada punto  
 $x$  hay 4 variables  $A_{\mu}$ , para describir a apenas 2  
grados de libertad. La suma sobre todos los  $A_{\mu}$ 's sin  
restricciones incluye a cada configuración física un  
número infinito de veces (es decir,  $A_{\mu}^{\theta}(x) \forall \theta(x)$ ),  
y por tanto inevitablemente diverge.

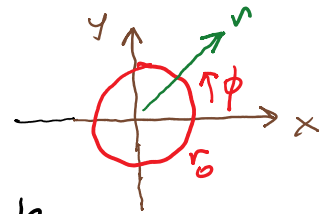
Para resolver este problema, necesitamos imponer

condiciones de norma, de tal manera que contemos cada configuración física solamente una vez:



L42: 21/05/17

La pregunta clave es cuál es la medida de integración adecuada. Esto es análogo p.ej. al cambio de variables  $\int dx dy = \int d\phi r dr \xrightarrow{r=r_0} \int r_0 d\phi$ .



En nuestro caso, para obtener la medida de integración sobre  $N(A)$ , utilizaremos un truco de Faddeev y Popov: insertaremos en la integral funcional

$$1 = \int \mathcal{D}\theta(x) \delta^{(\infty)} [N(A^\theta)] \det \left( \frac{\delta N(A^\theta)}{\delta \theta(x)} \right) = \int \mathcal{D}N(A^\theta(x)) \delta^{(\infty)} [N(A^\theta)]$$

p.ej.  $2A^\theta$

(que es el análogo infinito-dimensional de

$$1 = \int \underbrace{\mathcal{D}\theta_1 \dots \mathcal{D}\theta_n}_{\mathcal{D}\vec{\theta}} \delta^{(n)} (N(\vec{\theta})) \det \left( \frac{\partial N_i}{\partial \theta_m} \right)$$

$\delta^{(\omega)}[N(A^\theta)]$  es una delta de Dirac funcional, que impone la condición  $N(A^\theta(x)) = 0$  en cada punto  $x$  (se le puede pensar entonces como  $\prod_x \delta(N(A^\theta(x)))$ , en versión discretizada).

Pej., si queremos preservar la invariancia de Lorentz de manera manifiesta, podemos fijar la norma de Lorentz (ó Lorenz)

$N(A) = \partial_\mu A^\mu = 0$ . De hecho, más adelante usaremos la condición un poco más general  $N_\omega(A) \equiv \partial_\mu A^\mu - \omega = 0$ , con  $\omega(x)$  una función arbitraria. Tendremos entonces

$$N_\omega(A^\theta) = \partial_\mu (A^\theta)^\mu - \omega = \partial_\mu A^\mu(x) - \partial^2 \theta(x) - \omega(x)$$

$\uparrow A^\mu - \partial^\mu \theta$

y por tanto

$$\frac{\delta N_\omega(A^\theta)}{\delta \theta(y)} = -\partial^2 \delta^{(4)}(x-y),$$

que según podemos notar, es independiente tanto de  $A_\mu$  como de  $\theta$ . Su determinante funcional es el producto de sus eigenvalores. En el caso de una teoría de normas no abelianas,

la regla de transformación  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^\theta(x)$  es más

complicada (p. 330) y la derivada funcional

$\frac{\delta N(A^\theta(x))}{\delta \theta(x)}$  No resulta ser ya independiente de  $A_\mu(x)$ , pero sí lo es de  $\theta(x)$ .

Para el caso general, conviene definir la determinante de Faddeev-Popov

$$\Delta_{FP}[A_\mu] \equiv \det \left( \frac{\delta N(A^\theta)}{\delta \theta(x)} \right) \Bigg|_{N(A^\theta) = 0} \leftarrow \text{evaluada en condición de norma, No depende de } \theta(x)$$

$$= \left\{ \int D\theta(x) \delta^{(\infty)}[N(A^\theta)] \right\}^{-1},$$

objeto que es manifiestamente invariante de norma:

$$\Delta_{FP}[A_\mu^{\theta'}] = \left\{ \int D\theta(x) \delta^{(\infty)}[N(A^{\theta'+\theta})] \right\}^{-1} \quad \begin{aligned} A_\mu^{\theta'} &= A_\mu - \partial_\mu \theta' \\ A_\mu^{\theta'+\theta} &= A_\mu - \partial_\mu \theta' - \partial_\mu \theta \end{aligned}$$

$$\stackrel{\theta'' = \theta' + \theta}{=} \left\{ \int D\theta''(x) \delta^{(\infty)}[N(A^{\theta''})] \right\}^{-1} = \Delta_{FP}[A_\mu].$$

Insertando entonces  $\theta''(x) = \theta(x) + \theta'(x) \Rightarrow D\theta'' = D\theta$

$$1 = \int D\theta(x) \delta^{(\infty)}[N(A^\theta)] \det \left( \frac{\delta N(A^\theta)}{\delta \theta(x)} \right)$$

$$= \Delta_{FP}[A_\mu] \int D\theta(x) \delta^{(\infty)}[N(A^\theta)] ,$$

tenemos

$$\int \mathcal{D}A_{\mu}(x) e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A_{\mu} e^{iS[A]} \overbrace{\Delta_{FP}[A]}^1 \int \mathcal{D}\theta \delta^{(\omega)}[N(A^{\circ})]$$

$$= \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A_{\mu} \delta^{(\omega)}[N(A^{\circ})] \Delta_{FP}[A] e^{iS[A]} .$$

Ahora cambiamos la variable de integración,

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}^{\circ}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\theta(x) .$$

En cada  $x$  (y para cada elección específica de  $\theta(x)$ ) esto corresponde simplemente a añadir una constante,

$$\text{así que } \mathcal{D}A_{\mu}(x) = \mathcal{D}A_{\mu}^{\circ}(x) .$$

Además, sabemos que, por invariancia de norma,

$$S[A] = S[A^{\circ}] . \text{ Y hemos visto también que } \Delta_{FP}[A] = \Delta_{FP}[A^{\circ}] ,$$

de modo que

$$\int \mathcal{D}A_{\mu}(x) e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\theta(x) \int \mathcal{D}A_{\mu}^{\circ}(x) \delta^{(\omega)}[N(A^{\circ})] \Delta_{FP}[A^{\circ}] e^{iS[A^{\circ}]} .$$

Llegados a este punto, podemos ahora renombrar a la variable de integración  $A_{\mu}^{\circ}(x) \rightarrow A_{\mu}(x)$ , para obtener

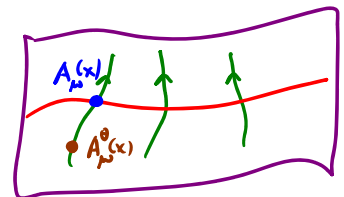
$$\int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\theta(x) \int \mathcal{D}A_\mu(x) \delta^{(\infty)}[N(A)] \Delta_{FP}[A] e^{iS[A]}.$$

(Este último paso no es una transformación de norma, sino un simple cambio de nombre análogo a  $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)$ .)

Nada depende ya del parámetro de norma  $\theta(x)$ , así que la integración  $\int \mathcal{D}\theta(x)$  simplemente da el volumen del grupo de norma, que es justamente el infinito debido a la redundancia, que queremos eliminar.

Omitiendo este factor, vemos que para fijar la norma  $N(A)=0$ , debemos trabajar no con  $\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]}$  sino con

$$\int \mathcal{D}A_\mu(x) \delta^{(\infty)}[N(A)] \Delta_{FP}[A] e^{iS[A]}.$$



La delta de Dirac en esta expresión cumple la función de restringir la integral sobre  $A_\mu$  de tal manera que

*cada configuración física se incluye solamente una vez*

(es decir, la integral corre solo sobre las curvas rojas del

diagrama en la p. 576), y la determinante de Faddeev-Popov,

$\Delta_{FP}[A]$ , nos da la medida apropiada para esta integral restringida.

Podríamos ahora aplicar nuestra fórmula general al caso de la norma de Lorentz,  $N(A) = \partial_\mu A^\mu$ , pero en ese caso resulta difícil eliminar a  $\delta^{(\infty)}[N(A)]$ .

En lugar de ello, usaremos la norma de Lorentz modificada

$$N_\omega[A] \equiv \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x) :$$

$$\int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\theta(x) \int \mathcal{D}A_\mu(x) \delta^{(\infty)}[\partial_\mu A^\mu - \omega] \Delta_{FP}[A] e^{iS[A]} .$$

Esta fórmula es válida para cualquier función  $\omega(x)$ , así que podemos incluso integrar sobre  $\omega(x)$  en ambas partes. Para obtener un resultado finito, conviene hacer esto con un peso gaussiano, con ancho  $\xi$  arbitrario:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\omega \exp\left\{-i\int d^4x \frac{\omega(x)^2}{2\xi}\right\} \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]} \\ &= \int \mathcal{D}\omega \exp\left\{-i\int d^4x \frac{\omega(x)^2}{2\xi}\right\} \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A_\mu \delta^{(\infty)}[\partial_\mu A^\mu - \omega] \Delta_{FP}[A] e^{iS[A]} \\ &= \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A] e^{iS[A] - i\int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2} . \end{aligned}$$



La integral gaussiana del lado izquierdo es simplemente una constante (que depende del parámetro  $\xi$ ), y en el caso abeliano, también lo es  $\Delta_{FP}$ , así que definiendo

$$N_{\xi} \equiv \Delta_{FP} \left( \int D\omega(x) \exp\left\{-i \int d^4x \frac{\omega(x)^2}{2\xi}\right\} \right)^{-1},$$

y

$$\text{Vol}(U(1)) \equiv \int D\alpha(x) \text{ volumen del grupo } U(1) \text{ local,}$$

$$\sim e^{i\alpha} \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

en conjunto hemos obtenido

$$\int \frac{DA_{\mu}(x)}{\text{Vol}(U(1))} e^{iS[A]} = N_{\xi} \int DA(x) \exp\left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 \right\}\right].$$

Es decir, el efecto neto de eliminar la redundancia es

agregar a la densidad Lagrangiana el termino

"fijador de norma"  $-\frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2$ , que en cuantización

canónica usando la norma de Lorentz habíamos añadido

a mano (ver p. 356, donde usamos  $J \equiv 1/\xi$ ).

En el caso no abeliano (ver pp. 329-333),  $\Delta_{\text{FP}}[A]$  No puede sacarse de la integral  $\int DA_\mu$ , pero es posible representarlo como una integral funcional sobre campos auxiliares fermiónicos  $c(x), b(x)$  conocidos como "fantasmas de Faddeev-Popov", que figuran entonces en un término adicional en la acción. Entenderemos mejor este punto más adelante, cuando estudiemos la integral de trayectorias sobre campos fermiónicos.

El mismo argumento implica que podemos calcular funciones de correlación usando

$$\int \frac{DA_\mu}{\text{Vol}(U(1))} \mathcal{O}_1(A(x_1)) \cdots \mathcal{O}_N(A(x_N)) e^{iS[A]}$$

$$= \mathcal{N}_3 \int DA_\mu \mathcal{O}_1(A(x_1)) \cdots \mathcal{O}_N(A(x_N)) \exp\left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{23} (\partial \cdot A)^2 \right\}\right]$$

siempre y cuando los operadores  $\mathcal{O}_n(A)$  sean invariantes de norma, como p.ej.  $F_{\mu\nu}(x)$  (porque en un paso intermedio del argumento necesitaremos usar  $\mathcal{O}_n(A) = \mathcal{O}_n(A^0)$ ).

Tenemos entonces finalmente una fórmula para funciones de correlación de operadores invariantes de norma,

$$\langle \Omega | T \{ \hat{O}_1(\hat{A}(x_1)) \dots \hat{O}_N(\hat{A}(x_N)) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int DA_\mu \hat{O}_1(A(x_1)) \dots \hat{O}_N(A(x_N)) e^{iS_3}}{\int DA_\mu e^{iS_3}}$$

donde  $S_3 \equiv \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2\zeta} (\partial \cdot A)^2 \right\}$ .

Toda la información física de la teoría se puede extraer a partir de estas funciones de correlación. En particular, usando LSZ y una elección apropiada de  $\hat{O}_n$ 's tales que  $\langle \hat{p}_n | \hat{O}_n(x) | \Omega \rangle \equiv \sqrt{Z_{O_n}} \neq 0$ , podemos determinar cualquier amplitud de dispersión (ver p. 444, donde enfatizamos que los campos básicos  $\hat{\phi}_x$  no son especiales en este sentido).

A pesar de esto, frecuentemente es conveniente poder calcular funciones de correlación de operadores no invariantes de norma (como el propio  $A_\mu(x)$ ). En ese caso, podemos justificar el uso de la misma fórmula que tenemos arriba repitiendo primero el argumento de

Faddeev-Popov para  $Z[J]$ , donde el término fuente  $\int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x)$  será invariante de norma si  $\partial_\mu J^\mu = 0$  (p. 311). Claro que de todos modos, No son invariantes

$$\langle A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{\mu_n}(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}$$

↖ ↗  
J arbitrarios

El resultado neto de aplicar el procedimiento de Faddeev-Popov al campo de norma  $U(1)$  ha sido entonces simplemente agregar el término fijador de normas, que, por no ser invariante de norma, hace que la integral no sea ya divergente.

Como vimos al hacer la cuantización canónica en la norma de Lorentz (pp. 355-370), en presencia de este término la ec. de mov.,

$$\partial^2 A^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu (\partial \cdot A) = \underbrace{\left[ \eta^{\mu\lambda} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\lambda \right]}_{\equiv (\Delta_x^\xi)^{\mu\lambda}} A_\lambda(x) = 0,$$

sí es invertible.

La función de Green correspondiente,  $\Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x')$ , satisface

$$(\Delta_x^\xi)^{\mu\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x') = i \delta_\nu^\mu \delta^{(4)}(x - x'),$$

que en espacio de momentos se traduce en

$$\left[ -p^2 \eta^{\mu\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\lambda \right] \tilde{\Delta}_{\lambda\nu}^{-1}(p) = i \delta_\nu^\mu.$$

La solución es

$$\tilde{\Delta}_{\lambda\nu}^{-1}(p) = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[ \eta_{\lambda\nu} - (1-\xi) \frac{p_\lambda p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right],$$

y por tanto

$$\Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \left( \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \right) \left[ \eta_{\lambda\nu} - (1-\xi) \frac{p_\lambda p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right].$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\equiv \tilde{M}_{F\lambda\nu}(p)}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\equiv M_{F\lambda\nu}(x-x')}$$

Propagador de Feynman para campo de Maxwell

Por construcción, los resultados para cantidades físicas (p.ej., amplitudes de dispersión) serán independientes del valor que elijamos para el parámetro fijador de norma  $\xi$ .

Antes habíamos trabajado en la "norma de Feynman",  $\xi=1$ .  
Otra elección común es la "norma de Landau",  $\xi=0$  ( $\gamma=\infty$ ).  
Otros valores pueden ayudar a simplificar ciertos cálculos  
(p.ej., la "norma de Yennie",  $\xi=3$ ).

De nuevo, el resumen de lo aprendido es  $\downarrow$  } constante arbitraria

$$\int \frac{DA_{\mu}(x)}{\text{Vol}(U(1))} e^{iS[A]} = \mathcal{N} \int DA(x) \exp\left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 \right\}\right].$$

constante de normalización  $\uparrow$  incluye a  $\Delta_{FP}$ , que en el caso abeliano es una constante

término fijador de norma

Consideremos ahora el caso de un campo fermiónico  $\psi(x)$ , donde los operadores satisfacen relaciones de anticonmutación.

En notación apropiada para un número finito de grados de libertad, en lugar de  $[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\delta_{ab}$ ,  $[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 = [\hat{p}_a, \hat{p}_b]$  tendremos entonces

$$\{\hat{\Psi}_a, \hat{\chi}_b\} = i\delta_{ab}, \quad \{\hat{\Psi}_a, \hat{\Psi}_b\} = 0 = \{\hat{\chi}_a, \hat{\chi}_b\} \quad a, b = 1, \dots, L$$

donde  $\hat{\chi}_a$  denota el momento canónicamente conjugado a  $\hat{\Psi}_a$

—p.ej.,  $\hat{\chi}_a = i\hat{\Psi}_a^\dagger$  para el campo de Dirac

(salvo que en el caso de campos, evidentemente  $a \rightarrow (a, \vec{x})$  y  $\delta_{ab} \rightarrow \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ ).

Podemos notar que  $\hat{\Psi}_a$  y  $-i\hat{\chi}_b$  satisfacen las relaciones de

anticommutación apropiadas para un par de operadores de creación y aniquilación fermiónicos,  $\{\hat{a}_a, \hat{a}_b^\dagger\} = \delta_{ab}$ ,  
 $\{\hat{a}_a, \hat{a}_b\} = 0 = \{\hat{a}_a^\dagger, \hat{a}_b^\dagger\}$ .

debido que  $\hat{\psi}_a \hat{\psi}_a = 0$ , existe un estado  $|0\rangle$  tal que  
 $\hat{\psi}_a |0\rangle = 0 \quad \forall a$  (análogo a  $\hat{a}_a |0\rangle = 0$ ),  
sin suma

a partir del cual podemos construir una base para el "espacio de Fock" correspondiente,

$$|a_1, a_2, \dots, a_n\rangle \equiv (-i\hat{\chi}_{a_1})(-i\hat{\chi}_{a_2}) \dots (-i\hat{\chi}_{a_n}) |0\rangle$$

equivale a  $|0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots\rangle$  con los 1 en el lugar  $a_1, a_2, \dots$

con  $n=0, \dots, L$ ,  $a_j \neq a_k \quad \forall 1 \leq j, k \leq n \quad j \neq k$   
ppp. de exclusión

(base análoga a  $\hat{a}_1^\dagger \dots \hat{a}_n^\dagger |0\rangle$ ). Aprendemos entonces

que el espacio de Hilbert de nuestro sistema fermiónico es  $2^L$ -dimensional, muy diferente al caso bosónico  $\{|q\rangle\}$ .  
↑ dim = ∞

En el caso bosónico, para obtener la integral funcional utilizamos bases  $\{|q\rangle\}$  y  $\{|p\rangle\}$  de eigenestados de  $\hat{f}_a$  y  $\hat{p}_a$ , respectivamente, así que necesitamos las



bases análogas aquí, (c.f.  $\hat{q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle$ ,  $\hat{p}_a |p\rangle = p_a |p\rangle$ )  
 $\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \psi_a |\psi\rangle$ ,  $\hat{\chi}_a |\chi\rangle = \chi_a |\chi\rangle$ .

Pero notando que  $0 = \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} |\psi\rangle = (\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a) |\psi\rangle$ ,

aprendemos que los eigenvalores  $\psi_a$  (y, de manera similar, los  $\chi_a$ ) No pueden ser números ordinarios, puesto que anticommutan. Lo que hacemos entonces

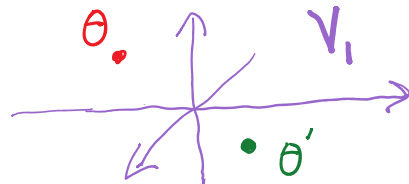
es inventar nuevos números. Consideramos a los  $\psi_a$ 's y

$\chi_a$ 's como elementos de un espacio vectorial  $V_1$

(real o complejo) de dimensión  $D \geq 2L$ . ↑ para que podamos sumarlos o reescribirlos

Así que  $V_1 \cong \mathbb{R}^D$  ó  $\mathbb{C}^D$ .

(Eventualmente necesitaremos



$D \geq 2LN \rightarrow \infty$  para la integral funcional, donde  $N \equiv \frac{t'-t}{\Delta t}$  es

igual que antes el número de subintervalos en la discretización de  $\int \mathcal{D}\psi(t) \mathcal{D}\chi(t)$ ).

Y definimos formalmente un producto

bilineal y asociativo, conocido como 'producto exterior', tal que

$$\theta \theta' = -\theta' \theta \quad \forall \theta, \theta' \in V_1 \quad (\Rightarrow \theta^2 = 0 \quad \forall \theta \in V_1).$$

L#1: 28/01/19 (-90 min por repaso I)

Podemos notar que los resultados de este producto

$$(\theta_1 \theta_2)(\theta_3 \theta_4) = (\theta_3 \theta_4)(\theta_1 \theta_2) \quad \text{por asociatividad del producto}$$

conmutan entre sí, y forman parte de un nuevo espacio vectorial,  $V_2$ , que tiene dimensión  $\binom{D}{2}$ :

si  $e_j$  con  $j=1, \dots, D$  es una base para  $V_1$ , entonces  $e_j e_k$  con  $1 \leq j < k \leq D$  es una base para  $V_2$ .

De manera similar, los productos triples  $\theta \theta' \theta''$  anticomutan y pertenecen a un espacio vectorial  $V_3$  de dimensión  $\binom{D}{3}$ , los productos cuádruples a  $V_4$  de dimensión  $\binom{D}{4}$ , ... , y los productos  $D$ -tuples a  $V_D$  de dimensión  $\binom{D}{D} = 1$ .

Para obtener un espacio vectorial cerrado bajo este producto y un elemento identidad, consideramos también a  $V_0 \equiv \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  de dimensión  $\binom{D}{0} = 1$ , y formamos la suma directa

$$A_D \equiv V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_D,$$

que tiene dimensión

$$\binom{D}{0} + \binom{D}{1} + \binom{D}{2} + \dots + \binom{D}{D} = 2^D$$

y se conoce como álgebra de Grassman (o álgebra exterior).

Para entender esta estructura de forma más concreta, tomemos como ejemplo el caso  $D=3$ , donde  $V_0, V_1, V_2, V_3$  tienen respectivamente dimensión  $1, 3, 3, 1$ .

Si  $e_1, e_2, e_3$  constituyen una base para  $V_1$ , entonces  $(L=1)$   $e_{12} \equiv e_1 e_2$ ,  $e_{13} \equiv e_1 e_3$ ,  $e_{23} \equiv e_2 e_3$  son una base para  $V_2$ , y  $e_{123} \equiv e_1 e_2 e_3$  es una base para  $V_3$ .

Cualquier elemento  $\theta \in V_1$  se puede descomponer en términos de esta base,  $\theta = \sum_j \alpha_j e_j$  con  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , y puede por tanto representarse simplemente

$$\text{como } \theta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, podemos escribir  $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in V_2$  y  $(\gamma_1) \in V_3$ .

Los elementos de p.ej., la suma directa  $V_2 \oplus V_3$  son por definición del tipo  $\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \beta_3 e_{23} + \gamma_1 e_{123}$ , es decir, para sumar elementos de  $V_2$  y  $V_3$  promovemos

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

y al sumar obtenemos entonces

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} .$$

Aplicando esta misma idea a la suma total, vemos que el álgebra de Grassmann en cuestión,

$$A_3 \equiv V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

es un espacio vectorial 8-dimensional ( $2^3=8$ ) constituido por elementos

$$z + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \beta_3 e_{23} + \gamma_1 e_{123} ,$$

que (con esta elección de base) pueden representarse

en la forma

$$\begin{pmatrix} z \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

← este es un punto  
en  $\mathbb{R}^8$  ó  $\mathbb{C}^8$


y que tienen un producto entre sí, definido a partir

$$e_j e_k = -e_k e_j .$$

(El ejemplo más conocido de un álgebra de Grassmann es el conjunto de formas diferenciales sobre una variedad  $D$ -dimensional,  $\omega_{(p)} \equiv \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$  con  $p=0,1,\dots,D$ , donde  $\wedge$  denota al "producto cunã" o "producto exterior" y  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$  es un tensor de rango  $(0,p)$  totalmente antisimétrico.)

Llamamos a los elementos básicos  $\theta \in V_1$ ,

Variables de Grassmann o números anticomutativos

— y hay que tener claro que son tan 'números' como los números complejos  $\mathbb{C} \equiv \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$  

(cf.  $A_1 \equiv \{x+ey \mid x,y \in \mathbb{R}, e^2 = 0\}$ ).

Más en general, los elementos de  $V_{2n}$  y  $V_{2n+1}$  se conocen como variables de Grassmann 'par' e 'impar', respectivamente.

Adaptaremos además la convención natural

$$\{\theta, \hat{\psi}_a\} = 0 = \{\theta, \hat{\chi}_a\} \quad \forall a.$$

Usando estos ingredientes, podemos definir entonces

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-i \sum_{a=1}^L \hat{\chi}_a \psi_a\right) |0\rangle \quad \leftarrow \{\hat{\chi}_a, \psi_b\} = 0$$

(análogo al estado coherente  $\exp(c \hat{a}^\dagger) |0\rangle$ ), es decir,  
eigenestado de  $\hat{a}$

$$|\psi\rangle = \prod_{a=1}^L \exp(-i \hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

$$= \prod_{a=1}^L (1 - i \hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

la serie del exponencial se trunca porque  $\psi_a \psi_a = 0$  (y  $\hat{\chi}_a \hat{\chi}_a = 0$ )  
sin suma

$$= (1 - \psi_1 (-i \hat{\chi}_1)) (1 - \psi_2 (-i \hat{\chi}_2)) \dots (1 - \psi_L (-i \hat{\chi}_L)) |0\rangle$$

$$= |0\rangle - \underbrace{\psi_1 (-i \hat{\chi}_1)}_{\text{análogo a } \hat{a}^\dagger} |0\rangle - \psi_2 (-i \hat{\chi}_2) |0\rangle - \dots - \psi_L (-i \hat{\chi}_L) |0\rangle$$

$$- \psi_1 \psi_2 (-i \hat{\chi}_1) (-i \hat{\chi}_2) |0\rangle - \dots - \psi_{L-1} \psi_L (-i \hat{\chi}_{L-1}) (-i \hat{\chi}_L) |0\rangle$$

+ productos triples + cuádruples - quíntuplos - ...

$$+ (-1)^{\lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor} \psi_1 \psi_2 \dots \psi_L (-i \hat{\chi}_1) (-i \hat{\chi}_2) \dots (-i \hat{\chi}_L) |0\rangle,$$

que expresado en términos de nuestra base original (p. 585) es

$$|\psi\rangle = |0\rangle - \sum_{a=1}^L \psi_a |a\rangle - \sum_{a_1 < a_2} \psi_{a_1} \psi_{a_2} |a_1, a_2\rangle + \dots \pm \psi_1 \dots \psi_L |1, \dots, L\rangle.$$

Podemos notar aquí que  $|\psi\rangle$  de hecho NO forma parte del mismo espacio de Hilbert, sino de un espacio extendido

en lugar de solo  $\mathbb{V}_0 = \mathbb{C}$

donde permitimos coeficientes en el álgebra de Grassmann.

Esta diferencia es necesaria para nuestros propósitos.

L43: 26/5/17

Podemos verificar que  $|\psi\rangle$  es un eigenestado de los operadores  $\hat{\Psi}_a$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_b |\psi\rangle &= \hat{\Psi}_b (1 - i\hat{\chi}_b \psi_b) \prod_{a \neq b} (1 - i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \\ &= \left( \hat{\Psi}_b - i\hat{\Psi}_b \hat{\chi}_b \psi_b \right) \prod_{a \neq b} (1 - i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \\ \text{análogo} & \quad \underbrace{\{\hat{\Psi}_b, -i\hat{\chi}_b\}}_{\hat{a} \hat{a}_b} = \delta_{bb} = 1 \quad \text{p. 584} \end{aligned}$$

$$= \psi_b \prod_{a \neq b} (1 - i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

$$= \psi_b (1 - i\hat{\chi}_b \psi_b) \prod_{a \neq b} (1 - i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

$$= \psi_b \prod_a (1 - i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

$$= \psi_b |\psi\rangle. \quad \checkmark$$

Si definimos además al bra  $\langle 0|$  a través de

$\langle 0 | \hat{\chi}_a = 0 \quad \forall a$  (análogo a  $\langle 0 | \hat{a}_a^\dagger = 0$ ),

normalizado de tal manera que  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ ,

podemos construir análogamente  $\leftarrow +i \sum_a \hat{\chi}_a \psi_a$

$$\langle \psi | \equiv \langle 0 | \left( \prod_{a=1}^L \hat{\psi}_a \right) \exp\left(-i \sum_a \psi_a \hat{\chi}_a\right)$$

$$= \langle 0 | \prod_a \left[ \hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right],$$

que tiene la propiedad

$$\langle \psi | \hat{\psi}_b = \langle 0 | \left( \prod_{a \neq b} \left[ \hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right] \right) \overset{\pm 1}{s_b} \underbrace{\hat{\psi}_b (1 - i \psi_b \hat{\chi}_b) \hat{\psi}_b}_{\hat{\psi}_b (\hat{\psi}_b - i \psi_b \hat{\chi}_b \hat{\psi}_b)}$$

$$= \langle 0 | \left( \prod_{a \neq b} \left[ \hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right] \right) s_b \underbrace{\hat{\psi}_b (1 - i \psi_b \hat{\chi}_b) \psi_b}_{\{\hat{\chi}_b, \hat{\psi}_b\} = i}$$

$$= \langle 0 | \prod_a \left[ \hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right] \psi_b$$

$$= \langle \psi | \psi_b .$$



La relación análoga a  $\langle q' | q \rangle = \delta^{(L)}(q'_a - q_a)$  es entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi' | \psi \rangle &= \langle 0 | \left( \prod_{a=1}^L \hat{\Psi}_a \right) \exp \left[ i \sum_a \hat{\chi}_a (\psi'_a - \psi_a) \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_a \left[ \hat{\Psi}_a + i \hat{\Psi}_a \hat{\chi}_a (\psi'_a - \psi_a) \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_a \left[ 0 + i \underbrace{\{ \hat{\Psi}_a, \hat{\chi}_a \}}_i (\psi'_a - \psi_a) \right] | 0 \rangle \\ &= \prod_{a=1}^L (\psi_a - \psi'_a), \end{aligned}$$

así que este producto de algún modo es análogo a la delta de Dirac. Más adelante veremos por qué.

De manera similar, podemos definir autoestados de  $\hat{\chi}_a$ :

$$|\chi\rangle \equiv \exp \left( -i \sum_a \hat{\Psi}_a \chi_a \right) \prod_{a=L}^1 (-i \hat{\chi}_a) | 0 \rangle,$$

$$\langle \chi | \equiv \langle 0 | \exp \left( -i \sum_a \chi_a \hat{\Psi}_a \right),$$

que satisfacen

$$\hat{\chi}_b |\chi\rangle = \chi_b |\chi\rangle, \quad \langle \chi | \hat{\chi}_b = \langle \chi | \chi_b,$$

$$\langle \chi' | \chi \rangle = i^L \prod_{a=L}^1 (\chi_a - \chi'_a), \quad \sim \text{delta de Dirac}$$

$$\langle \chi | \psi \rangle = \exp\left(-i \sum_a \chi_a \psi_a\right), \quad \text{OJO: } \neq 1 - i \sum_a \chi_a \psi_a$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \exp\left(+i \sum_a \chi_a \psi_a\right).$$

porque  $(\sum_a \chi_a \psi_a)^2 \neq 0$

Podemos notar que estas 2 últimas expresiones son análogas al traslapo  $\langle q | p \rangle = \exp(i \sum_a q_a p_a)$ .

Como último ingrediente para formular la integral de trayectoria para un campo fermiónico, nos falta definir una noción de integración, análoga a la integral bosónica  $\int_{-\infty}^{\infty} dq f(q)$ .

Es decir, necesitamos un mapeo  $A_b \rightarrow A_b$  que posea las mismas propiedades básicas que la integral usual: linealidad, invariancia bajo el corrimiento de la variable de integración ( $q \rightarrow q + c$ ), y el hecho de que la integral de

una derivada total es igual a cero (lo cual nos da la posibilidad de integrar por partes).

En el caso fermiónico, debido a que  $\theta$  es 'nilpotente' ( $\theta^2 = 0$ ), la función más general de UNA variable de Grassmann es

$$f(\theta) = A + \theta B.$$

En esta expresión,  $A$  y  $B$  podrían ser números ordinarios o anticomutativos, por lo que debemos recordar que  $\theta B = \pm B\theta$  si  $B$  es <sup>par</sup> ~~impar~~.

La noción natural de 'derivada' es

$$\frac{d}{d\theta} 1 = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = B.$$

↖ objeto impar (mapa  $V_1 \rightarrow V_0$ )

Esta es evidentemente una copia de las reglas usuales para diferenciar con respecto a variables conmutativas, pero es importante notar que aquí No hemos interpretado a  $\frac{d}{d\theta}$  como una operación asociada a un cambio infinitesimal en la

variable  $\Theta$ . Ni podríamos hacerlo, puesto que el producto en  $A$  no es invertible, de modo que no podemos definir el concepto de dividir entre un número anticommutativo.

Por la condición de nilpotencia  $\frac{d^2}{d\Theta^2} = 0$ , no existe un inverso de esta derivada, lo que hubiera sido el análogo de la integral indefinida.

Pero lo que nosotros necesitamos es un análogo fermiónico de la integral definida  $\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta)$ , que implemente todas las propiedades mencionadas. Estos requisitos en realidad no nos dejan con mucha opción. Dado que  $\int d\Theta$  será un objeto anticommutativo, tenemos

$$\int d\Theta : V_0 \rightarrow V_1, \quad \int d\Theta : V_1 \rightarrow V_0.$$

Por linealidad, nos basta con saber cómo "integrar" a 1 y a  $\Theta$ . Pero  $1 = \frac{d}{d\Theta} \Theta$  es una

"derivada total", así que debe integrar a cero.

Haciendo una elección de la normalización de  $\int d\theta \theta$ ,  
tenemos entonces la integral de Berezin

$$\boxed{\int d\theta 1 = 0, \int d\theta \theta = 1} \Rightarrow \int d\theta f(\theta) = \overbrace{f(A+\theta B)}^{A+\theta B}$$

Es decir, nuestra noción de integral no tiene nada que ver con una suma, sino que coincide con la derivada,  $\int d\theta \equiv \frac{d}{d\theta}$  !

Podemos notar que con esta definición se logra también tener un resultado que no cambia ante el corrimiento de la variable de integración:

$$\int d\theta_1 (\theta_1 + \theta_2) = 1 = \int d\theta' \theta' \quad \text{con } \theta' \equiv \theta_1 + \theta_2$$

$\uparrow$  independiente de  $\theta_1$

Para funciones de más de una variable anticomutativa, la forma más general es

$$f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_0 + \sum_{j=1}^N \theta_j f_j + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{jk} + \dots + \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N f_{12 \dots N}$$

$\uparrow$  totalmente antisimétricos

(la cual se puede pensar como una "serie de Taylor", que termina debido a la nilpotencia de las  $\theta_j$ ).

En este caso, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{j_1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{j_2}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_{j_{n-1}}} \frac{\partial}{\partial \theta_{j_n}} \theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_2} \theta_{j_1} = 1 ,$$

y para otros órdenes debemos tomar en cuenta que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0 \quad \forall i, j \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = 0 \quad \forall i \neq j .$$

Sabiendo que la integral fermiónica es lo mismo que la derivada, deducimos entonces que

$$\int d\theta_{j_1} \dots d\theta_{j_n} \theta_{j_n} \dots \theta_{j_1} = 1 ,$$

$$\{d\theta_j, d\theta_i\} = 0 \quad \forall i, j ,$$

$$\{d\theta_j, \theta_i\} = 0 \quad \forall j \neq i ,$$

de donde podemos inferir el resultado para la integral múltiple más general posible ,

$$\begin{aligned}
 & \int d\theta_{j_1} \cdots d\theta_{j_n} f(\theta_1, \dots, \theta_N) \\
 &= \int d\theta_{j_1} \cdots d\theta_{j_n} \left[ f_0 + \sum_j \theta_j f_j + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{jk} + \dots \right] \\
 &= f_{j_n j_{n-1} \dots j_1} + \sum_j \theta_j f_{j_n j_{n-1} \dots j_1 j} \\
 &\quad + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{j_n j_{n-1} \dots j_1 j k} + \dots
 \end{aligned}$$

$\swarrow$  coeficiente de  $\theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_1}$   
 $\swarrow$  coeficiente de  $\theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_1} \theta_j$   
 $\swarrow$  coeficiente de  $\theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_1} \theta_j \theta_k$

En particular,

$$\int d\theta_n \cdots d\theta_2 d\theta_1 f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_{12 \dots N}$$

así que la integral de Berezin puede ser vista simplemente como una herramienta para extraer el coeficiente del término más alto en la "serie de Taylor" de  $f$ .

[II:20/01/19]

Notar que

porque  $\frac{d}{d\theta'} \theta' = 1$  con  $\theta' = \lambda \theta$

$$\int_{\lambda \in \mathbb{V}_0} d(\lambda \theta) \equiv \frac{d}{d(\lambda \theta)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\theta} = \frac{1}{\lambda} \int d\theta$$

y, más en general, la regla para el cambio de

variables en una integral fermiónica es

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n = \int d\theta'_1 \dots d\theta'_n J \quad ,$$

donde el "Jacobiano"  $J$  es el inverso de lo que estamos acostumbrados,

$$J \equiv \det \left( \frac{\partial \theta'_j}{\partial \theta_k} \right) .$$

Ahora que ya entendamos lo que significa integrar sobre una o más variables anticomutativas, podemos verificar también que, como prometimos en la p. 594,

$\theta - \theta'$  efectivamente juega un papel completamente análogo a la delta de Dirac usual,  $\delta(x - x')$ :

$$\begin{aligned} \int d\theta (\theta - \theta') f(\theta) &= \int d\theta (\theta - \theta') (A + \theta B) \\ &= \int d\theta (\theta A - \theta' A + \theta - \theta' \theta B) \\ &= A + \theta' B \\ &= f(\theta') . \quad \checkmark \end{aligned}$$



Nota que  $\int d\theta e^{-\frac{1}{2}a\theta^2} = \int d\theta = 0$

Para uso futuro, podemos calcular la integral "gaussiana"

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 a \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2 (1 - \theta_1 a \theta_2)$$

$\xrightarrow{\text{sin } \frac{1}{2}}$

$$= a,$$

donde hemos supuesto que  $a$  es un número conmutativo.

De manera similar, dadas  $2n$  variables de Grassmann  $\theta_j$  y cualquier matriz  $\underline{A}$   $2n \times 2n$  que sea antisimétrica y conmutativa, es fácil ver que

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_{2n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \theta_i A_{ij} \theta_j\right)$$

$\leftarrow \text{con } \frac{1}{2}, \text{ por contribución de } A_{ij} \text{ y } A_{ji} = -A_{ij}$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{P: (2n \cdots 1) \rightarrow (j_1 \cdots j_{2n})} (-1)^P \underbrace{A_{j_1 j_2} A_{j_3 j_4} \cdots A_{j_{2n-1} j_{2n}}}_{n \text{ factores}}$$

$\leftarrow \text{números de transposiciones}$   
 $\leftarrow \text{permutaciones}$

$$\equiv (-1)^n \text{Pf}(\underline{A}),$$

donde en el último renglón hemos definido la 'Pfaffiana' de la matriz  $\underline{A}$ . P.ej., para  $n=1$ ,

$$\text{Pf } \tilde{A} = \text{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (-1)^{\circ} A_{21}^{\circ} + (-1)^{\circ} A_{12}^{\circ} \right] = -a ,$$

que efectivamente coincide con lo que obtuvimos arriba.

Es relativamente fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \left( \text{Pf}(\tilde{A}) \right)^2 &= \sum_{P: (1 \dots 2n) \rightarrow (j_1 \dots j_{2n})} (-1)^P A_{1j_1} A_{2j_2} \dots A_{2nj_{2n}} \\ &= \det \tilde{A} \end{aligned}$$

2n factores

[ver, p.ej., Nakahara, "Geometry, Topology and Physics", pp. 394-395]. (En particular, para nuestro ejemplo con  $n=1$ ,

$$\left( \text{Pf}(\tilde{A}) \right)^2 = (-a)^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} . \quad \checkmark$$

Así que el resultado de la integral fermiónica gaussiana involucra a  $\sqrt{\det \tilde{A}}$ , igual que en el caso bosónico, pero en el numerador en lugar del denominador (y con la elección de signo

especificada por la Pfaffiana).

Con un cambio de base, cualquier matriz antisimétrica  $2n \times 2n$  se puede descomponer en la forma

$$\underset{\sim}{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\underset{\sim}{A}^T \\ \underset{\sim}{A} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underset{\sim}{A} = (\det \underset{\sim}{A})^2,$$

donde  $\underset{\sim}{A}$  es entonces  $n \times n$ . Si denotamos

$$\theta_l = \theta_l, \quad \bar{\theta}_l \equiv \theta_{n+l} \quad \forall l=1, \dots, n$$

(donde, vale la pena enfatizar, No estamos pidiendo que la barra se refiera al conjugado complejo), entonces en el exponente de la integral gaussiana aparece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\theta^T \quad \bar{\theta}^T) \begin{pmatrix} 0 & -\underset{\sim}{A}^T \\ \underset{\sim}{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (-\theta^T \underset{\sim}{A}^T \bar{\theta} + \bar{\theta}^T \underset{\sim}{A} \theta) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l,k} \underbrace{(-\theta_l A_{kl} \bar{\theta}_k + \bar{\theta}_k A_{kl} \theta_l)}_{+\bar{\theta}_k A_{kl} \theta_l} \end{aligned}$$

$$= \bar{\theta}^T \underset{\sim}{A} \theta,$$

y nuestra fórmula dice por tanto que

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_n d\bar{\theta}_1 \cdots d\bar{\theta}_n \exp(-\bar{\theta}^T \underset{\sim}{A} \theta) \\ = (-1)^n \text{Pf}(\underset{\sim}{A}) \\ = \pm \sqrt{\det \underset{\sim}{A}} \\ = \pm (-1)^n \det \underset{\sim}{A}.$$

Podemos también deducir este resultado directamente, ya que como vimos antes la integral da, salvo un signo,

$$\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{p: (1 \cdots n) \rightarrow (j_1 \cdots j_n) \\ p': (1 \cdots n) \rightarrow (k_1 \cdots k_n)}} (-1)^{p+p'} A_{j_1 k_1} \cdots A_{j_n k_n},$$

expresión que coincide con  $\det \underset{\sim}{A}$  (nuevamente, salvo un posible signo).

Vemos que este resultado muestra que cualquier determinante se puede siempre reexpresar como una

integral sobre variables fermiónicas. Como dijimos antes (p.579), esto es justo lo que necesitamos para tener en cuenta la determinante de Faddeev-Popov  $\Delta_{FP}(A)$  en una teoría de normas no abelianas. Para ello se necesitarán 2 campos fermiónicos auxiliares  $c(x)$ ,  $b(x)$ , conocidos como 'fantasmas' de Faddeev-Popov.

Para uso futuro, conviene también notar desde ahora que podemos igualmente hacer integrales "gaussianas" en inserciones utilizando el mismo truco que conocemos del caso bosónico. Por simplicidad, tomaremos como ejemplo el caso más sencillo,  $n=1$ .

Supongamos entonces que queremos calcular

$$I = \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 \underbrace{\exp(-\theta_1 a \theta_2)}_{1 - \theta_1 a \theta_2} = -1.$$

(Notar que hicieron falta no 1 sino 2 inserciones para tener un resultado no nulo.)

Podemos comprobar en primer lugar que, contrario

a lo que podríamos suponer, igual que en el caso  
 conmutativo sigue siendo cierto que

$$\underbrace{\theta_1 \theta_2}_{\theta_1 \theta_2 (1-0)} e^{-\theta_1 \wedge \theta_2} = \frac{d}{d\eta_1} \frac{d}{d\eta_2} \left[ \underbrace{e^{-\theta_1 \wedge \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2}}_{1 - \theta_1 \wedge \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2 + \frac{1}{2} 2 \eta_1 \theta_1 \eta_2 \theta_2} \right]_{\eta_1 = \eta_2 = 0}$$

↑ 'fuentes' anticomutativas

$$0 + 0 + 0 + 0 + \theta_1 \theta_2 \quad \checkmark$$

donde la instrucción final  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  resultó innecesaria.

Usando esto, podemos escribir

$$I = \frac{d}{d\eta_1} \frac{d}{d\eta_2} \left[ \int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 \wedge \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2} \right],$$

donde ahora nos gustaría "completar el cuadrado",  
 es decir, lograr que la dependencia de las fuentes  
 $\eta_1, \eta_2$  figure solo en términos independientes de  
 $\theta_1, \theta_2$ , que podrán sacarse entonces de la  
 integral.

Sabiendo que

$$[ ] = \int d\theta_1 d\theta_2 \left( 1 - \theta_1 a \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2 + \eta_1 \theta_1 \eta_2 \theta_2 \right) e^{-\theta_1 a \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2}$$

$$= + a + \eta_1 \eta_2$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{a} \eta_1 \eta_2 \right) \underbrace{\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 a \theta_2}}_a$$

$$= \exp\left(\eta_1 \frac{1}{a} \eta_2\right) \int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 a \theta_2}$$

veremos que la factorización deseada es

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 a \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2 e^{\eta_1 \frac{1}{a} \eta_2} e^{-\theta_1 a \theta_2}$$

↑ sale de la integral

Podemos verificar además que, igual que en el caso bosónico, el factor que sobra después de este paso donde "completamos el cuadrado" coincide con el exponente original  $E(\theta_1, \theta_2)$  evaluado en el punto  $(\theta_1^{\text{ext}}, \theta_2^{\text{ext}})$  donde se "extremiza":

$$\frac{d}{d\theta_1} E(\theta_1, \theta_2) = -a\theta_2 - \eta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2^{\text{ext}} = -\frac{1}{a} \eta_1,$$

$$\frac{d}{d\theta_2} E(\theta_1, \theta_2) = +a\theta_1 - \eta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1^{\text{ext}} = +\frac{1}{a} \eta_2,$$

de modo que

$$E(\theta_1^{\text{ext}}, \theta_2^{\text{ext}}) = \overbrace{-\theta_1^{\text{ext}} \eta_2^{\text{ext}} + \eta_1 \theta_1^{\text{ext}} + \eta_2 \theta_2^{\text{ext}}}$$

$$= -\left(+\frac{\eta_2}{a}\right) a \left(-\frac{\eta_1}{a}\right) + \eta_1 \left(+\frac{\eta_2}{a}\right) + \eta_2 \left(-\frac{\eta_1}{a}\right)$$

$$= \cancel{-\eta_1 \frac{1}{a} \eta_2} + \cancel{\frac{1}{a} \eta_1 \eta_2} + \frac{1}{a} \eta_1 \eta_2, \quad \checkmark$$

justo como en el caso bosónico. Lo mismo se puede mostrar en presencia de más variables ( $n > 1$ ).

Volviendo por fin a la discusión de los eigenestados de  $\hat{\Psi}_a$ , notamos que usando esta nueva definición de integral podemos escribir una relación de completitud análoga a  $\hat{\mathbb{1}} = \int \prod_{a=1}^L d q_a |q\rangle \langle q|$ :

$$\hat{\mathbb{1}} = \int \left( \prod_{a=L}^1 d\psi_a \right) |\psi\rangle \langle \psi|$$

Podemos verificar esta relación tomando el elemento de matriz más general

$$\underbrace{\langle \psi'' | \hat{\mathbb{1}} | \psi' \rangle}_{\prod_{a=1}^L (\psi'_a - \psi''_a) \quad \text{p. 594}} \stackrel{?}{=} \int \left( \prod_{a=L}^1 d\psi_a \right) \underbrace{\langle \psi'' | \psi \rangle}_{\prod_{b=1}^L (\psi_b - \psi''_b)} \underbrace{\langle \psi | \psi' \rangle}_{\prod_{c=1}^L (\psi'_c - \psi_c)}$$



y recordando que  $\psi_b - \psi_b''$  juega un papel análogo a  $\delta(x_b - x_b'')$ , en el sentido de que

$$\int d\psi_b (\psi_b - \psi_b'') f(\psi_b) = f(\psi_b'') \quad \text{p. 601} \quad ,$$

de modo que la expresión del lado derecho se reduce a

$$\prod_{c=1}^L (\psi_c' - \psi_c'') \quad \checkmark$$

De manera similar, es fácil mostrar que

$$\hat{\mathbb{1}} = (-i)^L \int \left( \prod_{a=1}^L d\chi_a \right) |\chi\rangle \langle \chi| \quad .$$

Juntando todos nuestros ingredientes, podemos finalmente proceder justo igual que en el caso bosónico (pp. 513-18) para obtener la integral de trayectoria fermiónica,  $\leftarrow$  Schrödinger

$$\langle \psi'; t' | \psi; t \rangle = \langle \psi' | \exp[-i\hat{H}(\hat{\psi}, \hat{\chi})(t'-t)] | \psi \rangle$$

Heisenberg  $\nearrow$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\psi_1 \dots d\psi_{N-1} \frac{d\chi_0}{i\epsilon} \dots \frac{d\chi_{N-1}}{i\epsilon}$$

$\uparrow$  No es un estado físico

$$\cdot \exp \left[ i \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n (\psi_{n+1} - \psi_n) - H_a(\psi_n, \chi_n) \Delta t \right]$$

$\uparrow$  Orden antiestándar: todas las  $\chi$ 's a la izquierda de las  $\psi$ 's

(donde hemos tomado el orden antiestándar de  $\hat{H}$  solo como ejemplo concreto), expresión que naturalmente abreviamos como

$$\langle \Psi'; t' | \Psi; t \rangle = \int_{\Psi(t)=\Psi}^{\Psi(t')=\Psi'} \mathcal{D}\Psi(\tau) \mathcal{D}\chi(\tau) \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \{ \chi(\tau) \dot{\Psi}(\tau) - H(\Psi(\tau), \chi(\tau)) \} \right].$$

Esta, de entrada, sería la versión hamiltoniana de la integral funcional. Pero, en el caso fermiónico, el Lagrangiano típicamente es de primer orden en  $\dot{\Psi}_a$  (como sucede con  $\mathcal{L}_{Dirac}$ ) y los momentos  $\chi_a$  son por lo tanto variables adicionales, independientes de  $\dot{\Psi}_a$  (como vimos la p.262, la definición del momento canónico es una constricción), de manera que  $\chi \dot{\Psi} - H(\Psi, \chi)$  coincide directamente con el Lagrangiano.

Podemos mostrar también que, p.ej.,

$$\int_{\Psi(t)=\Psi}^{\Psi(t')=\Psi'} \mathcal{D}\Psi(\tau) \mathcal{D}\chi(\tau) \Psi_a(t'') \Psi_b(t''') \exp \left[ i \int_t^{t'} d\tau \{ \chi \dot{\Psi} - H \} \right]$$

$$= \langle \Psi; t' | T \{ \hat{\psi}_a(t'') \hat{\psi}_b(t''') \} | \Psi; t \rangle,$$

dando el orden temporal para operadores fermiónicos se define justo como vimos en la p. 281,

$$T \{ \hat{\psi}_a(t'') \hat{\psi}_b(t''') \} = \begin{cases} + \hat{\psi}_a(t'') \hat{\psi}_b(t''') & \text{si } t'' > t''' \\ - \hat{\psi}_b(t''') \hat{\psi}_a(t'') & \text{si } t''' > t'' \end{cases}.$$

La generalización a campos es directa (necesitamos nuevamente discretizar el espacio además del tiempo), y podemos deducir una fórmula para funciones de correlación idéntica al caso bosónico:

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_n(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_n(x_n) e^{iS}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi e^{iS}}$$

↑ proyecta sobre  $|\Omega\rangle$

Consideremos en particular el caso del campo de Dirac,  $\psi(x)$ , que como sabemos tiene 4 componentes complejas

$\psi_a(x)$  ( $a=1,2,3,4$ ) que se mezclan entre sí bajo Lorentz según la representación espinorial. Cuando lo consideramos como variable de integración en una integral de trayectoria,  $\psi_a(x)$  en cada  $x$  y para cada valor de  $a$  es un número anticommutativo complejo independiente, y tenemos, p.ej.,

$$\mathcal{D}\psi(x) \equiv \prod_{a, \vec{x}} \mathcal{D}\psi_a(t, \vec{x}) \equiv \prod_{a, \vec{x}, t} d\psi_a(t, \vec{x}) .$$

Dado que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi &= i \bar{\psi} \overset{\equiv \not{\partial}}{\gamma^\mu} \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \bar{\psi} \underbrace{(i \not{\partial} - m)}_{\equiv \Delta_\psi} \psi \end{aligned}$$

tenemos  $\chi(x) \equiv \prod_\psi \psi(x) = i \psi^\dagger(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma^0$ , variable que es independiente de  $\psi(x)$ , porque el campo es complejo. (Por otra parte,  $\bar{\chi} \equiv \prod_{\bar{\psi}} = 0$ .)

Resulta conveniente considerar la integral funcional

no sobre  $\psi^\dagger(x)$ , sino sobre  $\bar{\Psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0$ .

Recordando que  $\gamma^0$  es una matriz unitaria, tenemos

$\mathcal{D}\psi^\dagger(x) = \mathcal{D}\bar{\Psi}(x)$ , y podemos por tanto escribir

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \dots \hat{\mathcal{O}}_N(x_N) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_N(x_N) e^{iS_D}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_D}}$$

Igual que en el caso bosónico, nos conviene definir la

funcional generatriz

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] \equiv \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int d^4x \bar{\Psi} \Delta_x \psi + \int d^4x \left( \bar{\eta}(x) \psi(x) - \bar{\Psi}(x) \eta(x) \right) \right]$$

donde  $\bar{\eta}(x), \eta(x)$  son fuentes anticommutativas y espinoriales complejas, con  $\bar{\eta}(x) \equiv \eta^\dagger(x) \gamma^0$  (variable que es independiente de  $\eta(x)$ , precisamente por ser compleja). Justo como en el caso bosónico, nuestra fuente  $\bar{\eta}(x)$  incluye un factor de  $i$  adicional con respecto a la convención usual de los libros de texto.

Hemos tomado además en cuenta que

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x')} \int d^4x \left\{ -\bar{\Psi}(x) \eta(x) \right\} = +\bar{\Psi}(x')$$

LCI3: 06/02/19

Procediendo igual que en el caso bosónico (p.550), para evaluar esta funcional generatriz libre conviene cambiar la variable de integración  $\psi(x) \rightarrow \psi_f(x)$ , donde

$$\psi(x) \equiv \underbrace{-\int d^4x' \Delta^{-1}(x, x') \eta(x')}_{\psi(x) \text{ extremiza } S} + \psi_f(x) \quad \leftarrow \text{fluctuación}$$

$$\left( \Rightarrow \bar{\psi}(x) \equiv +\int d^4x' \bar{\eta}(x') \Delta^{-1}(x', x) + \bar{\psi}_f(x) \right),$$

con  $\Delta^{-1}(x, x')$  la función de Green tal que

$$\Delta_x \Delta^{-1}(x, x') = i \delta^{(4)}(x-x'), \quad \Rightarrow \Delta_x \psi_{sol} = -i \eta$$

es decir, el propagador de Feynman (p.282)

$$D_F(x-x') \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-x')} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad p_\mu \gamma^\mu$$

$$\equiv \tilde{D}_F(p)$$

Podemos entonces deducir (Tarea 8) que

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left\{ \underbrace{-\int d^4y d^4y' \bar{\eta}(y) \Delta^{-1}(y, y') \eta(y')}_{\equiv \bar{\eta} \cdot \Delta^{-1} \cdot \eta} \right\} \underbrace{\int d\bar{\psi}_f d\psi_f e^{i \int d^4x \bar{\psi}_f \Delta_x \psi_f}}_{\equiv Z_0[0,0] \leftarrow \det \Delta_x}$$

determinante funcional en el numerador

es decir,  $Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp\{-\bar{\eta} \cdot \Delta^{-1} \cdot \eta\} Z_0[0, 0]$ .

A partir de este resultado podemos calcular por ejemplo la función de 2 puntos en la teoría libre,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\{\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x')\} | 0 \rangle &= \frac{1}{Z_0[0, 0]} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x')} Z_0[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\ &= \frac{1}{Z_0[0, 0]} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \left[ -\int d^4y d^4y' \bar{\eta}(y) \Delta^{-1}(y, y') \eta(y') \right] Z_0[0, 0] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\ &= \Delta^{-1}(x, x') \\ &= D_F(x-x') \quad \checkmark \end{aligned}$$

Vale la pena recordar que, como hemos enfatizado ya en varias ocasiones,  $D_F(x-x') = \langle 0 | T\{\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x')\} | 0 \rangle \neq D_F(x'-x)$ .

Físicamente, el primero describe la propagación de un fermión de  $x'$  a  $x$  (o un antifermión de  $x$  a  $x'$ ), mientras que el segundo describe la propagación de un fermión de  $x$  a  $x'$  (o un antifermión de  $x'$  a  $x$ ).

Como antes, representaremos a  $D_F(x-x')$  como un

línea con una flecha en la dirección de propagación del fermión (ver p. 473).



Para la función de  $N$  puntos en la teoría libre, reproducimos por supuesto lo predicho por el teorema de Wick fermiónico: una suma sobre productos de las  $N/2$  contracciones posibles, tomando en cuenta los signos debidos a la anticonmutación (p. 473).

Juntando nuestros resultados para los campos fermiónico y vectorial, podemos finalmente cuantizar por integral funcional a QED,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\uparrow \gamma^\mu \not{D}_\mu \equiv \gamma^\mu (\partial_\mu + i q A_\mu)$$

(con  $q = -e$  para el electrón, muón o tauón)

$$= \underbrace{\mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}}_{\equiv \mathcal{L}_{\text{libre}}} - \underbrace{q A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi}_{\equiv \mathcal{L}_{\text{int}}},$$



agregando el término fijador de norma  $-\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2$   
y usando variables de Grassmann para  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ .  
Obtenemos así las reglas de Feynman que ya conocemos  
para los 2 propagadores libres y el vértice de 3 patas:  
ver pp. 473, 476 y 477, o pp. 479-480 para un  
resumen de las reglas de Feynman en QED apropiadas  
para calcular no funciones de corrección sino  
amplitudes de dispersión.

LUJ: 29/05/17 (+15 min)