Teoría Cuántica de Campos II

Tarea 9 — Entregar miércoles 1 de marzo ≤11:10

1. Grados de Libertad Fermiónicos, Números Anticonmutativos y Trazas Considera una teoría con L grados de libertad anticonmutativos, $\{\hat{\psi}_a, \hat{\chi}_b\} = i\delta_{a,b}$, $\{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} = 0 = \{\hat{\chi}_a, \hat{\chi}_b\}$. Como vimos en clase (pp. 585-86), una base natural para el espacio de Hilbert correspondiente, al cual llamaremos $\mathcal{H}$, se obtiene imitando la construcción del espacio de Fock fermiónico: definimos $|0\rangle$ tal que $\hat{\psi}_a|0\rangle = 0\ \forall\, a$, y

$$|a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \equiv (-i\hat{\chi}_{a_1})(-i\hat{\chi}_{a_2})\ldots(-i\hat{\chi}_{a_n})|0\rangle\ ,$$

restringiéndonos a $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ (puesto que otros órdenes darían el mismo estado con un posible cambio de signo). Similarmente, definimos $\langle 0|$ tal que $\langle 0|\hat{\chi}_a = 0$ $\forall\, a$ y normalizado de tal modo que $\langle 0|0\rangle = 1$. Aunque ya no lo mencionamos en clase, la base dual es evidentemente

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n| \equiv \langle 0|\hat{\psi}_{a_n}\ldots\hat{\psi}_{a_2}\hat{\psi}_{a_1}\ .$$

Nota aquí el orden en que hemos elegido acomodar los operadores del lado derecho, con la finalidad de tener

$$\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n'}|a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \delta_{n,n'}\delta_{a_1,a'_1}\delta_{a_2,a'_2}\ldots\delta_{a_n,a'_{n'}}\ .$$

Con esta base para $\mathcal{H}$, la traza de un operador $\hat{\mathcal{O}}$ está dada por supuesto por

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\mathcal{O}} \equiv \sum_{n=0}^{L}\sum_{a_1,\ldots,a_n}\langle a_1,\ldots,a_n|\hat{\mathcal{O}}|a_1,\ldots,a_n\rangle\ .$$

a) En el caso bosónico, los eigenestados $|q\rangle$ forman directamente una base para el espacio de Hilbert, y es por ello que podemos escribir

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\mathcal{O}} = \int d^L q\langle q|\hat{\mathcal{O}}|q\rangle\ .$$

Pero, como dijimos en clase, en el caso fermiónico, los eigenestados $|\psi\rangle$ que hemos definido en la p. 591 no son directamente una base de $\mathcal{H}$ (¡ni siquiera pertenecen a este espacio!), así que no resulta obvio qué relación pudiera haber entre $\mathrm{Tr}\,\hat{\mathcal{O}}$ y $\int d^L\psi\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle$. Trabajando por simplicidad de notación en el caso $L = 2$, y considerando que el operador $\hat{\mathcal{O}}$ es *bosónico*, muestra que de hecho

$$\begin{aligned}\int d\psi_2 d\psi_1\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle &= \langle 0|\hat{\mathcal{O}}|0\rangle - \langle 1|\hat{\mathcal{O}}|1\rangle - \langle 2|\hat{\mathcal{O}}|2\rangle + \langle 1,2|\hat{\mathcal{O}}|1,2\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\left[(-1)^{\hat{F}}\hat{\mathcal{O}}\right]\ ,\end{aligned}$$

donde en el segundo renglón hemos definido el *operador de número fermiónico* $\hat{F}$, que simplemente cuenta cuántas excitaciones fermiónicas tiene un estado: $\hat{F}|a_1,\ldots,a_n\rangle =$

$n|a_1,\ldots,a_n\rangle$. Es relativamente fácil ver que el resultado que acabas de deducir para $L=2$ es válido para cualquier L, salvo un signo global:

$$\int d\psi_L \ldots d\psi_1 \langle\psi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle = (-1)^L \operatorname{Tr}\left[(-1)^{\hat{F}}\hat{\mathcal{O}}\right] .$$

Nota que el signo global depende del orden en el que hemos elegido escribir las integrales del lado izquierdo.

b) Siguiendo por simplicidad con $L=2$, muestra que

$$\int d\psi_2 d\psi_1 \langle -\psi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle = \operatorname{Tr}\hat{\mathcal{O}} .$$

Este mismo resultado es válido (sin signo global extra) para todo L. Si bien lo más común es querer calcular la traza de operadores bosónicos (p.ej., el Hamiltoniano o la corriente eléctrica asociados el campo de Dirac), es interesante señalar que los resultados a) y b) se intercambian si consideramos un $\hat{\mathcal{O}}$ *fermiónico.*

c) En el caso bosónico, mostramos en clase (pp. 540-41) que la función de partición de mecánica estadística para el sistema (ya sea discreto o de campos) a temperatura inversa β,

$$Z(\beta) \equiv \operatorname{Tr} e^{-\beta\hat{H}} ,$$

se puede calcular haciendo una integral de trayectoria sobre las variables $q_a(t_E)$ (o campos $\phi(\vec{x},t_E)$) donde tomamos la dirección temporal como euclideana ($t_E \equiv it$) y periódica, $t_E \simeq t_E + T$, con periodo $T=\beta$, e incluimos en la integral solo trayectorias *periódicas*: $q_a(t_E) = +q_a(t_E+T)$ (o $\phi(\vec{x},t_E) = +\phi(\vec{x},t_E+T)$). Usando tus resultados de los incisos anteriores, muestra que en el caso fermiónico $Z(\beta)$ se obtiene del mismo tipo de integral funcional euclideana, pero ahora incluyendo solo trayectorias *antiperiódicas*, $\psi_a(t_E) = -\psi_a(t_E+T)$ (o $\psi(\vec{x},t_E) = -\psi(\vec{x},t_E+T)$), y nota qué cosa es lo que resultaría si en lugar de eso hiciéramos la integral de trayectoria con condiciones de periodicidad.

2. Integral Funcional Fermiónica

a) Argumentando en paralelo con lo que hicimos en el caso bosónico, comprueba la identidad para la integral de trayectoria fermiónica con inserciones que escribimos al final de la p. 611 y principio de la p. 612.

b) Verifica que la funcional generatriz para el campo de Dirac libre $Z_0[\bar{\eta},\eta]$ que definimos en la p. 614 en verdad se reduce a la expresión que aparece al final de la p. 615 utilizando el cambio de variables $\psi(x) \to \psi_f(x)$ indicado en esa misma página.

c) Utilizando el resultado anterior para $Z_0[\bar{\eta},\eta]$, determina las funciones de correlación

$$\langle\Omega|T\{\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\}|\Omega\rangle \qquad \text{y} \qquad \langle\Omega|T\{\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\hat{\bar{\psi}}(x_3)\hat{\bar{\psi}}(x_4)\}|\Omega\rangle$$

para el campo de Dirac libre.

d) Pasando finalmente a QED, escribe la integral funcional que define a la funcional generatriz completa $Z[\bar{\eta},\eta,J]$, y utilízala para calcular la función de 3 puntos

$$\langle\Omega|T\{\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)\hat{A}_\mu(x_3)\}|\Omega\rangle$$

al orden más bajo en la expansión perturbativa.