Teoría Cuántica de Campos II

Tarea 8 — Entregar lunes 20 de febrero ≤11:10

1. Expansión Perturbativa

Se puede entender mejor la expansión perturbativa para campos interactuantes analizando el ejemplo de un campo en $0+0$ dimensiones. En este caso el 'campo' ϕ es una función definida sobre un solo punto, es decir, es simplemente un número. La 'acción' $S(\phi)$ es entonces una función (y no una funcional) de ϕ, y la 'integral de trayectoria' es una integral ordinaria. Para ser concretos, consideremos la integral

$$I(m,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\,\exp\left[-\frac{m^2\phi^2}{2}-\frac{\lambda\phi^4}{4!}\right]\ .$$

Nota que, si $m^2>0$, esta integral obviamente es *finita* para todo $\lambda\geq 0$. Dado que no sabemos calcularla de manera exacta, intentaremos aproximarla con una serie perturbativa.

a) Desarrolla la parte cuártica de la exponencial en $I(m,\lambda)$ en una serie de Taylor. Tenemos entonces la integral de una serie, $\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\,\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\phi)$. Como dijimos en clase, la serie de hecho converge para cualquier valor de λ y ϕ. Pero para la expansión perturbativa, nos interesa intercambiar la integral con la serie, lo cual solo será válido si la convergencia es uniforme. El 'criterio de Cauchy' afirma que este será el caso si y solo si para cualquier $\epsilon>0$, existe un entero n_ϵ tal que $N,M>n_\epsilon$ implica que $|\sum_{n=N}^{M} f_n(\phi)|<\epsilon$ *para todo* $\phi\in(-\infty,\infty)$. En particular, tomando $M=N$, debe suceder que el *máximo* de $|f_N(\phi)|$ decrece cuando N aumenta. Muestra que este no es el caso, ¡incluso si λ es pequeña!

b) A pesar de lo anterior, intercambiemos la integral con la serie para ver qué sucede. Llamémosle $I^{(n)}(m,\lambda)$ al enésimo término en esta expansión (con todo y el factor λ^n correspondiente). Reescribe $I^{(n)}(m,\lambda)$ imitando el procedimiento que vimos en la clase (pp. 547-48, 559-61), reemplazando las inserciones de ϕ dentro de la integral por derivadas fuera de la integral respecto a un parámetro auxiliar, J.

c) Realiza la integral que aparece en la expresión que obtuviste en **b)**, completando el cuadrado en la exponencial para reducirla a una integral gaussiana.

d) Diferencía tu resultado de **c)** con respecto a J según te indica la receta que obtuviste en **b)**, para encontrar una expresión explícita para $I^{(n)}(m,\lambda)$ (incluyendo los coeficientes numéricos). Has determinado entonces la serie completa para $I(m,\lambda)$ en potencias del parámetro de perturbación λ.

e) Si quisieras expresar la receta de **b)** de manera pictórica, al estilo de las reglas de Feynman, ¿cuál sería el valor del 'propagador'? ¿Qué tipo de 'vértices' tendrías, y que factor asociarías a cada uno de ellos? Explica por qué en este caso los distintos diagramas que contribuyen a $I^{(n)}(m,\lambda)$ (es decir, que son de orden λ^n,) tienen todos exactamente el mismo valor.

f) En vista de esta última propiedad, la suma sobre los diagramas de orden λ^n es proporcional al número de diagramas. Utiliza el resultado explícito que obtuviste en el inciso **d)** para mostrar que, para n grande, el coeficiente numérico de $I^{(n)}(m,\lambda)$

crece como $n!$ (me refiero a la dependencia *dominante*). El número de diagramas en una teoría de campos genérica crece de esta misma manera.
g) El resultado anterior implica que, sin importar cuán pequeño sea λ, eventualmente los términos sucesivos de la expansión perturbativa para $I(m,\lambda)$ empiezan a ser cada vez más y más grandes, así que la serie diverge. En vista de la definición original de $I(m,\lambda)$ como una integral a todas luces convergente, este no es el resultado correcto (y de hecho, desde la perspectiva del resultado exacto, λ grande es *mejor*, en el sentido de que hace la integral converja todavía más rápido). Gracias a **a)** conocemos el origen de esta discrepancia. Usando Mathematica o Maple, comprueba numéricamente que a pesar de ser divergente, la serie perturbativa hasta un cierto orden n da una buena aproximación del resultado exacto, siempre y cuando tengamos $\lambda \ll 1$. (Para esta parte numérica, convendrá desde un principio 'eliminar m', reescalando la variable de integración en $I(m,\lambda)$ para que el integrando dependa solo de $\lambda' \equiv \lambda/m^2$, que se puede entonces variar a mano en los cálculos numéricos. Dicho más fácil: podemos poner $m = 1$.)
Como vimos en las pp. 425-426 del curso, el hecho de que el número de diagramas crezca como $n!$ implica que la máxima precisión que uno en principio pudiera obtener a partir de la serie perturbativa se obtiene truncando la serie en $n \sim 1/\lambda$, y es por tanto de orden $(1/\lambda)!\lambda^{1/\lambda} \sim \exp(-1/\lambda)$. Esto nos da una estimación del tamaño de los efectos llamados **no perturbativos**: aquellos que son parte de la física pero **no** son capturados por la expansión perturbativa. Es por *esta* razón entonces que necesitamos $\lambda \ll 1$, y no para poder desarrollar en Taylor el exponencial *dentro* de la integral funcional (como parecen decir casi todos los libros). En QED esta precisión sería enorme, del orden $\exp(-1/\alpha) \sim \exp(-137) \sim 10^{-60}$. Por supuesto, en el mundo real, mucho antes de llegar ahí encontramos correcciones causadas por otros efectos físicos no incluidos en QED, como la existencia de la interacción débil, etc.