

Teoría Cuántica de Campos

Tarea 7 — Entregar viernes 10 de febrero

1. Integral Funcional en Mecánica Cuántica

La referencia estándar para integrales funcionales en mecánica cuántica no relativista es el libro de Feynman y Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (que también incluye un capítulo sobre QED).

a) Recordando que la acción S tiene unidades de momento angular, sabemos que, si no usamos unidades naturales, el integrando de la integral funcional Lagrangiana es en realidad $\exp(iS[q(t)]/\hbar)$. Por otra parte, sabemos que que la trayectoria clásica es la que *extremiza* la acción S . ¿Qué implicaciones tiene esto al considerar, en la suma sobre trayectorias prescrita por la integral funcional, la contribución al propagador proveniente de la trayectoria clásica y sus vecinas, en comparación con cualquier trayectoria no clásica y sus vecinas? Con base en esto, explica por qué la mecánica clásica es inadecuada para describir a un electrón con velocidad $v/c \sim 1/137$ (típica para el estado fundamental del átomo de hidrógeno) que recorre una distancia $d \sim 1 \text{ \AA}$ (que es el tamaño característico del átomo), pero por otro lado es adecuada si ese mismo electrón recorre una distancia mucho mayor, p.ej., $d \sim 1 \text{ cm}$.

b) Usando la integral funcional, determina el propagador $\langle x'; t' | x; t \rangle$ para una partícula libre no relativista con masa m que se mueve en una dimensión. Muestra que tu resultado coincide con el que se obtiene por cuantización canónica.

c) Repite para la misma partícula igualmente no relativista, pero ahora en un potencial $V(x) = m\omega^2 x^2/2$.

d) Para este último sistema, reescribe $\langle x'; t' | x; t \rangle = \langle x' | \exp[-i\hat{H}(t' - t)] | x \rangle$ en términos de las funciones de onda $\langle x | n \rangle$ y las autoenergías E_n de los autoestados $|n\rangle$ de \hat{H} (para ello necesitas simplemente insertar la resolución del operador identidad en términos de $|n\rangle$). Tomando el límite $t' - t \rightarrow -i\infty$, podemos aislar, en particular, la contribución del estado base $|0\rangle$. Comprueba que la energía E_0 y la función de onda $\langle x | 0 \rangle$ que se pueden leer tomando este mismo límite en tu resultado del inciso anterior son las esperadas.

2. Ordenamiento vs. Medida de la Integral Funcional

Dado un operador Hamiltoniano $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$, el camino que seguimos en clase para llegar del formalismo canónico a la integral de trayectoria parecería atribuirle un papel preferencial al Hamiltoniano en orden “estándar”, $\hat{H}_e(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$, donde en cada término, todos los \hat{q} 's aparecen a la izquierda de todos los \hat{p} 's. En este problema aprenderemos que esto en realidad está relacionado con la manera específica en que definimos la medida de integración $\mathcal{D}q \mathcal{D}p$.

a) Repite la deducción que dimos para escribir $\langle q'; t' | q; t \rangle$ en términos de una integral funcional, pero considerando al operador Hamiltoniano en orden “antiestándar,” $\hat{H}_a(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$, donde todos los \hat{q} 's están a la *derecha* de todos los \hat{p} 's. (Tendrás que pensar dónde te conviene ahora insertar las distintas resoluciones de la identidad que utilizamos.)

b) Al final de tu deducción anterior, cuando el exponente está expresado ya en notación continua, en términos de una integral $\int d\tau$ en vez de una suma \sum_n , a primera vista parecerías haber obtenido exactamente la misma fórmula que dedujimos en clase, pero con $H_a(q(\tau), p(\tau))$ reemplazando a $H_e(q(\tau), p(\tau))$. Pero esto **no** puede ser cierto, ¡porque en general $H_a(q(\tau), p(\tau)) \neq H_e(q(\tau), p(\tau))$! (Esto ocurre por la misma razón que $H_e(q(\tau), p(\tau)) \neq H(q(\tau), p(\tau))$.) Regresa un paso y examina la suma \sum_n con cuidado, para encontrar la sutil diferencia con respecto al resultado de la clase.

c) Lo que aprendiste en el inciso anterior esencialmente se traduce en que, al usar \hat{H}_a en lugar de \hat{H}_e , debemos elegir de manera distinta la familia de funciones $q(\tau)$ sobre las que estamos integrando, porque, en la versión discretizada, el valor requerido para $q(t_n)$ (dentro del n -ésimo intervalo $[t_n, t_{n+1}]$) cambió. Más en general, para nuestro orden favorito $\hat{H}_f(\hat{q}, \hat{p}) = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$, conviene definir una función $h_f(q_{n+1}, q_n, p_n)$ a través de

$$\langle q_{n+1}; t_n | \hat{H}_f(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) | q_n, t_n \rangle \equiv \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} h_f(q_{n+1}, q_n, p_n) \exp[ip_n \cdot (q_{n+1} - q_n)] .$$

En este caso, ¿cómo queda escrita la integral funcional en versión discretizada?

d) Combinando tu fórmula del inciso anterior con el resultado de la clase, ¿qué forma tiene $h_e(q_{n+1}, q_n, p_n)$? Y, con base en lo que aprendiste en **b)**, ¿cuál es la forma de $h_a(q_{n+1}, q_n, p_n)$?

e) En el caso general, h_f se puede determinar expresando la receta para el orden f en la forma

$$\hat{H}_f(\hat{q}, \hat{p}) = \int \frac{dudv}{(2\pi)^2} \exp(i\hat{q}u + i\hat{p}v) F_f(u, v) \int dp'' dq'' \exp(-iq''u - ip''v) H(q'', p'') ,$$

donde $F_f(u, v)$ se conoce como la *función de ordenamiento*, y la receta aplicaría en realidad para cualquier función de \hat{q} y \hat{p} , no solo para \hat{H} . Se puede mostrar en particular que el orden estándar se obtiene con $F_e(u, v) = \exp(-iuv/2)$, y el orden antiestándar, con $F_a(u, v) = \exp(+iuv/2)$. Otro ejemplo es el “orden de Weyl,” definido a través de $F_W(u, v) = 1$. Muestra que esto se traduce en

$$\left(e^{i\alpha\hat{q}} e^{i\beta\hat{p}} \right)_W \equiv e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{q}} e^{i\beta\hat{p}} e^{i\frac{\alpha}{2}\hat{q}} = e^{i(\alpha\hat{q} + \beta\hat{p})}$$

(donde en la segunda igualdad hemos usado BCH). Usando esto junto con la identidad

$$H(q, p) = \int \frac{d^L Q}{(2\pi)^L} e^{-ip \cdot Q} \left\langle q - \frac{Q}{2} \left| \hat{H}_W(\hat{q}, \hat{p}) \right| q + \frac{Q}{2} \right\rangle ,$$

(que se deduce a partir de las definiciones anteriores), se puede probar que $h_W(q_{n+1}, q_n, p_n) = H((q_n + q_{n+1})/2, p_n)$ — pero no necesitas hacerlo si no te parece divertido...

3. Integral Funcional para Campos

a) Considera una teoría con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \phi c^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2$$

donde ϕ es un campo escalar real, y m y c^μ son números reales. Escribe una fórmula para $\langle \phi'(x); t' | \phi(x), t \rangle$ en términos de una integral funcional hamiltoniana. Asegúrate de definir en detalle qué significa cada parte de tu respuesta.

b) Deduce a partir de lo anterior la versión lagrangiana de la integral funcional para esta teoría.

c) Lleva a cabo los cálculos necesarios (trabajando directamente con la integral funcional lagrangiana, sin recurrir a diagramas de Feynman) para determinar el correlador $\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \} | \Omega \rangle$.

d) Tomando $c^\mu = 0$ y agregando $\mathcal{L}_{\text{int}} = -2g\phi^6$, escribe la funcional generatriz (o función de partición) de la teoría, $Z[J]$, en términos de la funcional generatriz que corresponde al caso libre, $Z_0[J]$, y escribe también la fórmula con la cual se obtiene $\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4) \} | \Omega \rangle$ a partir de $Z[J]$.