Teoría Cuántica de Campos

Tarea 6 — No se entrega; sirve de práctica para el examen final

1. Campo de Dirac Autointeractuante
a) Considera la teoría donde agregamos al lagrangiano masivo de Dirac un término de interacción $\mathcal{L}_{\rm int} = -g(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma^5\psi)$. Escribe las reglas de Feynman en espacio de momentos para calcular amplitudes de dispersión.
b) Algunas de estas reglas serían distintas si en lugar de amplitudes deseamos calcular *funciones de correlación* (= correladores) en espacio de momentos. Identifica cuáles, y especifica cómo cambian.
c) En un proceso de dispersión que tiene como objetos entrantes a 2 antipartículas, ¿cúal es el estado final más sencillo?
d) Dibuja el (o los) diagrama(s) de Feynman correspondiente(s) y escribe el elementro de matriz invariante, al orden más bajo en el acoplamiento.

2. Dispersión de Møller
a) Calcula el elemento de matriz invariante para la dispersión no polarizada electrón-electrón (es decir $e^-e^- \to e^-e^-$), al orden más bajo, sin despreciar la masa del electrón.
b) Escribe la sección eficaz diferencial correspondiente en el marco del centro de masa.

3. Potencial de Coulomb
a) Considera el resultado que obtuvimos en clase (al final de la p. 488) para el elemento de matriz invariante en la dispersión electrón-muón. Muestra que en el límite no relativista las combinaciones de espinores que aparecen en él se simplifican (de manera aproximada) de acuerdo con $\bar{u}^{s'}_{p'}\gamma^\mu u^s_p \approx \delta^\mu_0 \bar{u}^{s'}_{p'}\gamma^0 u^s_p \approx 2m\delta^\mu_0 \xi^{s'\dagger}\xi^s = 2m\delta^\mu_0\delta^{ss'}$.
b) Usando lo anterior, muestra que en este límite el elemento de matriz del operador de dispersión $\hat{T}$ toma la forma

$$\langle p_2', s_2'; p_1', s_1'|i\hat{T}|p_1, s_1; p_2, s_2\rangle \approx (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\frac{-ie^2}{|\vec{p}_1-\vec{p}_1'|^2}2m_e\delta^{s_1s_1'}2m_\mu\delta^{s_2s_2'} \, .$$

Nota el orden en el que hemos elegido escribir las partículas en el bra.
c) En este límite no relativista, tiene sentido interpretar al muón como simplemente afectando al electrón a través de un potencial de interacción $V(\vec{r})$. Pensado así, para incorporar los posibles efectos a cualquier separación del electrón, debemos integrar sobre todos los posibles momentos del muón (en otras palabras, considerar al muón como una fuente puntual en espacio de posición), con lo cual se elimina la parte espacial de la delta de Dirac. Recordando que los factores de $2m$ provienen de nuestra normalización covariante para los estados (de modo que es natural omitirlos al hablar del caso no relativista), y comparando lo que sería el resultado para este proceso de dispersión en mecánica cuántica no relativista en la aproximación de Born,

$$\langle p_1', s_1'|i\hat{T}|p_1, s_1'\rangle = -i\tilde{V}(\vec{k})(2\pi)\delta(E_1-E_1')\delta^{s_1s_1'},$$

deduce el potencial $\tilde{V}(\vec{k})$ (donde $\vec{k} \equiv \vec{p}_1 - \vec{p}_1^{\,\prime}$), y muestra que su transformada de Fourier conduce al potencial de Coulomb *repulsivo* que esperamos entre dos objetos con carga eléctrica del mismo signo.
d) Describe cómo cambiaría el resultado anterior si en lugar de un muón dispersamos un antimuón, y comprueba que el potencial de Coulomb resultante sería *atractivo*. Esta dependencia de los signos de las cargas (que conocemos de electromagnetismo clásico) es característica de la interacción mediada por el intercambio de una partícula *vectorial*. Si por el contrario, la partícula mediadora de la interacción fuera escalar (como el Higgs) o de espín 2 (como el gravitón), un análisis similar conduce a la conclusión de que el potencial (definido en el límite no relativista) es *universalmente atractivo*.

4. Aniquilación Electrón-Positrón
a) Escribe el elemento de matriz invariante para el proceso de aniquilación electrón-positrón a 2 fotones (es decir $e^-e^+ \to \gamma\gamma$).
b) Promedia/suma de la manera habitual sobre los espines de las 4 partículas, y muestra que tu resultado coincide con el esperado por simetría de cruce a partir de nuestro cálculo en clase de la dispersión de Compton.
c) Extrae el límite no relativista (es decir, retén solo el término de orden cero en el 3-momento del electrón y el positrón).

5. Dispersión de Bhabha
a) En QED, dibuja los diagramas relevantes para el proceso $e^-e^+ \to e^-e^+$, a orden más bajo.
b) Escribe el correspondiente elemento de matriz invariante. Asegúrate de tener el signo relativo correcto entre los diagramas.
c) Calcula la sección eficaz diferencial en el centro de masa, para el caso no polarizado. Trabaja en el límite donde $E_{\rm cm} \gg m_e$, de tal manera que puedas ignorar la masa del electrón. Los pasos intermedios son complicados, pero el resultado final es sencillo.
d) Muestra que tu resultado se puede escribir en la forma

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2\right] ,$$

donde $s \equiv (p+p')^2$, $t \equiv (k-p)^2$ y $u \equiv (k'-p)$ (con p, k el cuadrimomento del electrón entrante/saliente y p', k' el cuadrimomento del positrón entrante/saliente) son las llamadas variables de Mandelstam (las cuales son claramente invariantes de Lorentz). Nota que al ignorar la masa del electrón se tiene $s+t+u=0$.