Teoría Cuántica de Campos

Tarea 4 — Entregar ≤11:10 viernes 21 de octubre

1. Jugando con un Espinor
a) En un marco de referencia R, tenemos un espinor ψ con componentes (en la base de Weyl) $\psi^T = (5+2i, -3, 0, 4i)$. ¿Cuáles son los correspondientes espinores derecho e izquierdo, y cuál es el espinor conjugado de Dirac?
b) ¿Qué valor tiene este mismo espinor en otro marco R' relacionado con R por una rotación de 90° alrededor del eje x^1?
c) ¿Qué valor tiene en otro marco R'' relacionado con R por un empujón con velocidad $v = 1/2$ a lo largo de x^3?
d) ¿Qué valor tiene el espinor tras una transformación de paridad? ¿Y después de una inversión temporal?

2. Espinores de Majorana
Dado un espinor de Dirac ψ, en general no resulta útil restringirlo a ser real porque las matrices $M(\mathbf{\Lambda})$ son complejas. Es decir, como ψ y ψ^* transforman de manera distinta bajo Lorentz, la condición $\psi = \psi^*$ solo podría ser cierta en un marco de referencia específico. Pero recientemente (pp. 292-5) vimos que a partir de ψ es posible obtener un segundo espinor que está relacionado con ψ^* y sin embargo transforma bajo Lorentz de la misma manera que ψ. Me refiero a la operación de conjugación de carga (que tras cuantizar corresponde a intercambiar la partícula con la antipartícula): $\psi^C \equiv C\bar{\psi}^T \equiv i\gamma^2\psi^*$. Tiene sentido entonces imponer la restricción $\psi = \psi^C$, que aplica en todos los marcos de referencia. Los ψ que satisfacen esta condición se conocen como *espinores de Majorana.* Al cuantizar un campo de Majorana se obtendrían partículas de espín 1/2 que son sus propias antipartículas.
a) Muestra que en la base de Weyl, para un espinor de Majorana ψ es posible escribir la componente de quiralidad derecha ψ_D en términos de la de quiralidad izquierda ψ_I (o viceversa). Esto implica que los espinores de Majorana, como los de Weyl, tienen solo 2 componentes complejas (= 4 reales) independientes. Nota por cierto que un espinor de Dirac ψ *no* puede ser simultáneamente de Weyl y de Majorana (aunque esto de hecho sí resulta posible en otras dimensiones, incluyendo $1+1$ y $9+1$).
b) En clase enfatizamos que los espinores izquierdos y derechos transforman bajo representaciones *no equivalentes* del grupo de Lorentz restringido (es decir, la relación entre ambas *no* es un simple cambio de base). Verifica que, a pesar de esto, la expresión del tipo $\psi_D = f(\psi_I)$ que obtuviste en el inciso anterior es consistente: $f(\psi_I)$ en verdad transforma justamente como un espinor de Weyl *derecho.* (Para esto te conviene primero mostrar que $\sigma^2\vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma}\sigma^2$.) Con esto habrás comprobado directamente que la restricción de Majorana $\psi = \psi^C$ es compatible con Lorentz. Y aprendes además que, usando el mapeo f, puedes reescribir una teoría genérica puramente con espinores derechos (o puramente con izquierdos).
c) Dado un espinor de Majorana ψ en la base de Weyl, comprueba que es posible cambiar a una nueva base donde sus componentes se vuelven *reales.* Es decir, escribiendo $\psi_I = \binom{\psi_1}{\psi_2}$, encuentra una matriz $\mathcal{B}$ unitaria 4×4 tal que $\mathcal{B}\psi$ sea real.

d) En esta nueva base, llamada base de Majorana, la condición de Majorana se ha convertido simplemente en $\psi = \psi^*$. Para no entrar en conflicto con lo que dijimos al principio de este problema, debe ser el caso que en dicha base las matrices $M(\mathbf{\Lambda})$ son reales, es decir, los generadores $S^{\mu\nu} \equiv i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$ son imaginarios puros, lo cual requiere a su vez que las γ^μ sean o todas reales o todas imaginarias puras. Determina cuál de estas dos últimas opciones es la que resulta al transformar las γ^μ de la base de Weyl a la base de Majorana.
e) Dado un campo de Majorana clásico $\psi(x)$ escrito en la base de Weyl, desarrolla el término de masa del Lagrangiano de Dirac, $m\bar{\psi}(x)\psi(x)$, en términos del espinor de Weyl izquierdo $\psi_I(x)$. Muestra que si las componentes $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ de $\psi_I(x)$ son números ordinarios (conmutativos), entonces tu resultado se anula.

3. El Campo de Dirac y Causalidad
a) Calcula el anticonmutador de $\hat{\psi}_a(x)$ con $\hat{\bar{\psi}}_b(x')$ para x y x' arbitrarios.
b) Muestra que es igual a cero para intervalos tipo espacio, $(x - x')^2 < 0$.
c) Las observables locales más sencillas que se pueden construir con el campo de Dirac son de la forma $\hat{\mathcal{O}}(x) \equiv \hat{\bar{\psi}}_a(x) O_{ab}(x) \hat{\psi}_b(x)$, con $O(x)$ una matriz cuyos elementos son funciones ordinarias y/o operadores diferenciales. Como ejemplos concretos puedes pensar en la densidad Hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}(x)$ o la (densidad de cuadri-)corriente $\hat{J}^\mu(x)$. Muestra que estas observables satisfacen la condición de causalidad ($[\hat{\mathcal{O}}(x), \hat{\mathcal{O}}(x')] = 0$ cuando x' está fuera del cono de luz de x).

4. Identidades de Fierz
En clase vimos que a partir de productos antisimétricos de matrices gama podemos formar 16 matrices independientes $\mathbf{1}, \gamma^\mu, S^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma^5, \gamma^5$. Cualquier matriz 4×4 se puede escribir entonces como una combinación lineal de estas matrices (con coeficientes complejos), a las que llamaremos en conjunto Γ^A, con $A = 1, \ldots, 16$. Es fácil comprobar (en la base de Weyl, por ejemplo) que son ortogonales en el sentido de que $\mathrm{Tr}(\Gamma^A \Gamma^B) \propto \delta^{AB}$ (en particular, $\mathrm{Tr}(\Gamma^A) = 0 \quad \forall \quad \Gamma^A \neq \mathbf{1}$).
a) Conviene escoger la normalización de estas matrices de manera tal que

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^A \Gamma^B) = 4\delta^{AB},$$

lo cual determina $\Gamma^A = \{\mathbf{1}, \gamma^0, i\vec{\gamma}, \ldots\}$. Escribe las 11 matrices restantes.
b) Considera el producto $(\Gamma^A)_{ab}(\Gamma^B)_{cd}$. Para valores dados de c y b, tenemos una matriz 4×4 con componentes especificadas por los subíndices ad, que por completez de las Γ's se deben poder expresar como una cierta combinación lineal de $(\Gamma^C)_{ad}$, con $C = 1, \ldots, 16$. Lo mismo aplica si pensamos en los índices a y d como fijos— podemos entonces desarrollar en términos de $(\Gamma^D)_{cb}$. Juntando estos dos enunciados, tenemos que

$$(\Gamma^A)_{ab}(\Gamma^B)_{cd} = \sum_{C,D=1}^{16} \mathcal{C}^{AB}{}_{CD} (\Gamma^C)_{ad} (\Gamma^D)_{cb} \ .$$

Usando la condición de ortonormalidad de **a)**, muestra que el número $\mathcal{C}^{AB}{}_{CD}$ se puede obtener a partir de la traza del producto de las 4 Γ's que aparecen en la fórmula

(especificando el orden en que aparecen en la traza, así como el coeficiente numérico).
c) Si multiplicamos la fórmula anterior por $(\bar{u}_1)_a(u_2)_b(\bar{u}_3)_c(u_4)_d$, donde $u_1,\ldots,u_4$ son espinores de Dirac, y sumamos sobre a,b,c,d, obtenemos un conjunto de reglas para reordenar los espinores que aparecen en el producto de dos tensores arbitrarios de Dirac: $(\bar{u}_1\Gamma^A u_2)(\bar{u}_3\Gamma^B u_4)$ se puede expresar como una suma específica sobre productos del tipo $(\bar{u}_1\Gamma^C u_4)(\bar{u}_3\Gamma^D u_2)$. Estas reglas se conocen como identidades de Fierz y resultan útiles para simplificar algunos cálculos de, p.ej., secciones eficaces. Determina explícitamente las identidades de Fierz que se refieren a los productos $(\bar{u}_1 u_2)(\bar{u}_3 u_4)$ y $(\bar{u}_1\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma_\mu u_4)$.

5. Representaciones del Grupo de Lorentz

a) Hemos visto que cada campo relativista $\varphi_l(x)$ transforma bajo una representación específica del grupo de Lorentz: $\varphi'_{l'}(x') = \sum_{l=1}^N M_{l'l}\varphi_l(x)$ con $M(\mathbf{\Lambda}) \equiv \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu})$, donde los 6 generadores $J^{\mu\nu}$ son matrices $N\times N$ que satisfacen las relaciones de conmutación de Lorentz. Muestra que si a partir de los generadores de rotaciones $J^i \equiv \epsilon^{ijk}J^{jk}/2$ y los de empujones $K^i \equiv J^{0i}$ formamos las dos combinaciones independientes

$$\vec{J}_I \equiv \frac{1}{2}\left(\vec{J}+i\vec{K}\right) \qquad \text{y} \qquad \vec{J}_D \equiv \frac{1}{2}\left(\vec{J}-i\vec{K}\right) \ ,$$

entonces $\vec{J}_I$ y $\vec{J}_D$ conmutan entre sí y sus componentes satisfacen por separado las relaciones de conmutación de $SU(2)$. [Solo para evitar confusiones: dado que $\vec{J}_I$ y $\vec{J}_D$ *no* son combinaciones lineales de $\vec{J}$ y $\vec{K}$ con coeficientes *reales*, tu resultado *no* quiere decir que el álgebra de Lie de $SO^+(3,1)$ coincide con la de $SU(2)\times SU(2)$ (lo cual *sí* hubiera resultado ser el caso si estuviéramos estudiando a $SO(4)$ en lugar de $SO(3,1)$).]

Lo anterior implica que para construir cualquier representación de Lorentz, ¡basta con saber como representar $SU(2)$! Esto último lo sabemos hacer bien: por cada valor posible del espín, $j=0,1/2,1,\ldots$, hay una representación de $SU(2)$ de dimensión $2j+1$. En clase recordamos/escribimos hace algún tiempo los generadores $\vec{J}^{[j]}$ correspondientes (haciendo énfasis en los casos que más nos interesan, $j=1/2,1$).

Así que para representar al grupo de Lorentz, necesitamos simplemente elegir los dos espines j_I y j_D que especifican a qué representación de $SU(2)$ pertenecerán las matrices $\vec{J}_I$ y $\vec{J}_D$— o en otras palabras, los autovalores $j_I(j_I+1)$ y $j_D(j_D+1)$ de los operadores de Casimir $\vec{J}_I^2$ y $\vec{J}_D^2$. Pero tenemos que ser un poco más precisos, porque si usamos simplemente las representaciones *irreducibles* que conocemos, $\vec{J}_I$ y $\vec{J}_D$ serían en general matrices de dimensiones distintas ($2j_I+1$ y $2j_D+1$, respectivamente), y así no podríamos sumarlas directamente para obtener los generadores $\vec{J}$ y $\vec{K}$ que buscamos.

Lo que debemos hacer entonces es tomar representaciones *reducibles* donde las $\vec{J}_I$ son matrices que contienen a los bloques irreducibles $\vec{J}^{[j_I]}$ (ver pp. 86-89) repetidos $2j_D+1$ veces, y a la inversa, las $\vec{J}_D$ son matrices que contienen a los bloques irreducibles $\vec{J}^{[j_D]}$ repetidos $2j_I+1$ veces. En otras palabras, escribimos sus componentes como $(\vec{J}_I)_{l'l} = \vec{J}^{[j_I]}_{l'_I l_I}\delta_{l'_D l_D}$ y $(\vec{J}_D)_{l'l} = \delta_{l'_I l_I}\vec{J}^{[j_D]}_{l'_D l_D}$, donde hemos definido el índice doble

$l \equiv (l_I, l_D)$, con $l_I = j_I, \ldots, -j_I$ y $l_D = j_D, \ldots, -j_D$. La representación de Lorentz (j_I, j_D) tiene entonces dimensión $N = (2j_I + 1)(2j_D + 1)$. Los generadores de rotaciones son $\vec{J} = \vec{J}_I + \vec{J}_D$, así que la representación (j_I, j_D) es en general reducible con respecto al subgrupo de rotaciones, e incluye los espines totales $|j_I - j_D|, \ldots, j_I + j_D$ que se pueden obtener al combinar espín j_I con j_D.

b) Comprueba que la matriz $M(\mathbf{\Lambda})$ que corresponde a una transformación de Lorentz con parámetros de rotación $\vec{\theta}$ y de rapidez $\vec{\alpha}$ (es decir, $\mathbf{\Lambda} = \exp[i\theta^i \mathbf{J}^{(i)} + i\alpha^i \mathbf{K}^{(i)}]$) se descompone en un producto de la forma $M_{l'l} = M^I_{l'_I l_I} M^D_{l'_D l_D}$, donde $M^I(\vec{\theta}, \vec{\alpha})$ y $M^D(\vec{\theta}, \vec{\alpha})$ son matrices que debes ser capaz de escribir de manera explícita en términos de $J^{[j_I]}$ y $J^{[j_D]}$, respectivamente.

c) Los vectores φ sobre los cuales actúan las matrices M tienen componentes $\varphi_l = \varphi_{(l_I, l_D)}$, por lo que se les puede pensar naturalmente como matrices $(2j_I+1) \times (2j_D+1)$. Muestra que en notación matricial, transforman de acuerdo con $\varphi \to M^I \varphi (M^D)^T$.

d) Comprueba que las matrices $M(\mathbf{\Lambda})$ en las representaciones $(1/2, 0)$ y $(0, 1/2)$ son precisamente aquellas bajo las cuales transforman los espinores de Weyl (con 2 componentes) ψ_I y ψ_D, respectivamente.

Podemos obtener cualquier otra representación a partir de productos directos y/o sumas directas de estas dos representaciones básicas. (La suma directa de 2 representaciones con dimensión N y M tiene dimensión $N + M$; el producto directo tiene dimensión NM.) En particular, la representación de Dirac, que incorpora la paridad, es la suma directa $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ (sabemos que la paridad transforma $\vec{J} \to \vec{J}$, $\vec{K} \to -\vec{K}$ y por tanto intercambia $\vec{J}_I \leftrightarrow \vec{J}_D$).

e) De acuerdo con lo que hemos dicho, la representación $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$ tiene dimensión 4 y bajo rotaciones incluye espín 0 y 1, así que debe corresponder a la representación vectorial del grupo de Lorentz. En este caso los vectores $\varphi_l = \varphi_{(l_I, l_D)}$ son matrices 2×2. Para ver la conexión con cuadrivectores, conviene hacer un cambio de base que convierta a φ en un nuevo vector (o matriz 2×2) $X \equiv \varphi \sigma^2$ (cuyas componentes son $X_{(l_I, l_D)} = \varphi_{(l_I, l'_D)} \sigma^2_{l'_D l_D}$, con la suma sobre l'_D implícita). Muestra que X transforma de acuerdo con $X \to M^I X (M^I)^\dagger$ (para esto te convendrá primero demostrar que $\vec{\sigma}^T \sigma^2 = -\sigma^2 \vec{\sigma}$). M^I aquí es una matriz de $SL(2, \mathbf{C})$, y en la Tarea 1 mostraste justamente que si identificamos

$$X = x^\mu \bar{\sigma}_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

entonces x^μ transforma como un cuadrivector. (A diferencia de lo que hicimos allá, aquí no nos estamos restringiendo a X hermíticas, así que las componentes de x^μ serán en general complejas.)

f) Usando las reglas usuales de adición de momento angular, identifica las representaciones irreducibles de Lorentz (j_I, j_D) que se obtienen al tomar el producto directo de un cuadrivector y un espinor de Dirac, $(1/2, 1/2) \otimes [(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)]$, lo que correspondería a un campo $\psi^\mu_a(x)$ que tiene de entrada 16 componentes. Semejante campo, con restricciones que se encargan de retener solo la porción correspondiente a espín 3/2, se conoce como campo de Rarita-Schwinger (supongo que por rarito…)