Teoría Cuántica de Campos

Tarea 3 — Entregar 11:10 lunes 3 de octubre

1. Reescalamientos y Teorema de Noether

a) Considera un campo escalar real con densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{24}\phi^4.$$

Muestra que la acción es invariante bajo la transformación (que corresponde a un cambio de escala)

$$x^\mu \to x'^\mu = s x^\mu, \qquad \phi(x) \to \phi'(x') = s^{-D}\phi(x),$$

donde s es un número real positivo y D es un entero que tendrás que determinar.

b) Usando el teorema de Noether, escribe la corriente conservada correspondiente.

c) Comprueba que la corriente que obtuviste en verdad se conserva.

2. Operadores de Creación y Aniquilación y Cargas de Noether

a) Demuestra la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$$

(Sugerencia: considera la función $\hat{F}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A})$ y sus derivadas.)

b) Para el campo de Klein-Gordon complejo, escribe las cargas de Noether $\hat{P}^i$ asociadas a translaciones espaciales, y desarróllalas en términos de operadores de creación y aniquilación. ¿Qué forma esperas que tome el Hamiltoniano $\hat{P}^0$?

c) Usando tu resultado anterior y BCH, calcula $\exp(ib_\mu\hat{P}^\mu)\hat{\varphi}(x)\exp(-ib_\mu\hat{P}^\mu)$.

d) Para un campo arbitrario $\hat{\varphi}_l(x)$, escribe las cargas de Noether $\hat{J}^{ij}$ asociadas a rotaciones (incluyendo la parte orbital y la de espín), en términos de $\hat{\varphi}_l$ y $\hat{\pi}_l$. Muestra que satisfacen las relaciones de conmutación esperadas (en particular, podrás verificar si el signo que le pusimos en clase a la parte orbital y a la de espín es correcto o no). Observa que incluso para el campo de Klein-Gordon real no se obtiene un resultado sencillo si se intenta expresar $\hat{J}^{ij}$ en términos de $\hat{a}_{\vec{p}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ (estos operadores son diagonales respecto al momento espacial, pero no el angular).

3. Estados Coherentes y Valor de Fondo del Campo

a) Para el campo de Klein-Gordon (KG) real, calcula el valor esperado del campo en un estado con un número definido de partículas, $\langle\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N|\hat{\varphi}(x)|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle$. Es en este sentido que las partículas representan *pequeñas* fluctuaciones del campo.

b) Muestra que el estado *coherente* $|c) \equiv \exp(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} c(\vec{p})\hat{a}^\dagger_{\vec{p}})|0\rangle$ es un eigenestado del operador de aniquilación $\hat{a}_{\vec{p}}$. Exprésalo en términos de estados del tipo $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle$.

c) Determina $(c|c)$.

d) Calcula $\varphi_c(x) \equiv (c|\hat{\varphi}(x)|c)/(c|c)$. Muestra que $\varphi_c(x)$ es real y solución de KG.
e) Dada una solución arbitraria de KG, $\varphi(x)$, determina $c(\vec{p})$ tal que $\varphi_c(x) = \varphi(x)$.

4. Lagrangiano de Maxwell y Tensores de Energía-Momento
a) La acción que describe la dinámica del campo (cuadripotencial) electromagnético $A^\mu(x) \equiv (\Phi(x), \vec{A}(x))$ es

$$S[A_\mu(x)] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es la intensidad de campo. Expresa $F_{\mu\nu}$ en términos de los campos eléctrico y magnético usuales, $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Muestra que $F_{\mu\nu}$ (y por lo tanto S) es invariante bajo la *transformación de norma* $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$.
b) Obtén las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_μ. Deben coincidir con la versión relativista de dos de las las ecuaciones de Maxwell (sin fuentes). Reescríbelas en términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Escribe las dos ecuaciones restantes en notación relativista, y explica su origen.
c) En presencia de una cuadri(densidad de)corriente eléctrica arbitraria $\mathcal{J}^\mu(x) \equiv (\rho(x), \vec{\mathcal{J}}(x))$, ¿qué término debes agregar a la densidad Lagrangiana para obtener las ecuaciones de Maxwell con fuentes? ¿Qué condición debe satisfacer $\mathcal{J}^\mu$ para que la acción siga siendo invariante bajo una transformación de norma arbitraria?
d) Calcula el tensor de energía-momento *canónico* asociado al campo electromagnético, $T_{\mu\nu}$, usando el teorema de Noether. Muestra que el resultado no es ni simétrico ni invariante de norma.
e) Muestra que para cualquier tipo de campo, si definimos un tensor de energía-momento *modificado*

$$\bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^\lambda t_{\lambda\mu\nu} \ ,$$

con $t_{\lambda\mu\nu}$ cualquier tensor antisimétrico en los primeros dos índices, entonces $\bar{T}_{\mu\nu}$ se conserva y da lugar a las mismas cuatro cargas conservadas que $T_{\mu\nu}$. Podemos entonces usar esta libertad para obtener un tensor de energía-momento *simétrico* ('tensor de Belinfante'), que es entonces el que figuraría como fuente del campo gravitacional en las ecuaciones de Einstein. (Claro que, al acoplar el campo a la gravedad, la manera más eficiente de obtener el tensor de energía-momento simétrico es simplemente definirlo como la derivada funcional de la acción del campo con respecto a la métrica.)
f) Determina la forma que debe tener $t_{\lambda\mu\nu}$ en el caso electromagnético para obtener un $\bar{T}_{\mu\nu}$ simétrico. Muestra que el tensor modificado obtenido es además invariante de norma, y que da lugar a las fórmulas usuales para las densidades de energía y de momento espacial asociadas a los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

5. Efecto Casimir
a) Considera un campo de Klein-Gordon real en presencia de un par de placas infinitas paralelas al plano x^1-x^2 y separadas por una distancia L, que hacen que el campo tienda a cero al acercarse a ellas, es decir, que satisfaga las condiciones de borde $\varphi(x^\alpha, x^3 = 0) = 0 = \varphi(x^\alpha, x^3 = L)$ para todo x^α $(\alpha = 0, 1, 2)$. En la región entre

las placas el campo tiene acceso entonces a menos modos de oscilación que en el caso usual (que corresponde a $L \to \infty$). Desarrolla el operador de campo cuántico correspondiente a esta región en operadores de creación y aniquilación, y escribe las relaciones de conmutación de estos operadores.
b) Escribe el Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación, e identifica la energía de punto cero $E_{\text{vac}}(L)$ que resulta al pasar todos los operadores de creación a la izquierda de los de aniquilación. Nos interesa compararla con la energía que habría en la misma región en el vacío usual (es decir, sin las placas),

$$E_{\text{vac}}(\infty) \equiv V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\vec{p}}.$$

En clase V se refería al volumen de todo el espacio ($V = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$), pero para la comparación nos interesa usar $V = LA$, donde A el área de cada una de las placas.
c) Considera por simplicidad el caso con $m = 0$, y muestra que tu expresión para la diferencia de energías (la llamada 'energía de Casimir') se puede escribir en la forma

$$E_C(L) \equiv E_{\text{vac}}(L) - E_{\text{vac}}(\infty) = \frac{A\pi^2}{8L^3} \int_0^\infty du \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u+n^2} - \int_0^\infty dn \sqrt{u+n^2} \right].$$

Cada energía por separado claramente diverge, debido al comportamiento en la región $u \to \infty$ y/o $n \to \infty$. Para obtener un resultado finito, necesitamos de alguna manera desechar al menos temporalmente los modos de más altas energías para poder hacer la resta (nota por cierto que placas reales están hechas de átomos con un cierto espaciamiento promedio l, por lo que de hecho esperaríamos que no fueran capaces de afectar a modos con longitudes de onda más pequeñas que l).
d) Por supuesto el resultado final (si es que en verdad es físico) no debe depender de la manera detallada en que hagamos finita la respuesta (procedimiento conocido como 'regularizar'). Una manera es reemplazar $\sqrt{u+n^2} \to \sqrt{u+n^2} f(\pi\sqrt{u+n^2}/L)$, con $f(\omega)$ esencialmente alguna versión suave de la función escalón $\theta(1/l - \omega)$: supondremos que cuando $\omega \to \infty$ tenemos $f(\omega) \to 0$ lo suficientemente rápido como para que la suma y la integral converjan, y por otro lado $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = \ldots = 0$. Intercambiando la integral sobre u con la suma/integral sobre n, y empleando la fórmula de Euler-MacLaurin

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty dn\, F(n) = -\frac{1}{2} B_0 F(0) - \frac{1}{2!} B_2 F'(0) - \frac{1}{4!} B_4 F'''(0) + \ldots ,$$

donde los B_n son los números de Bernoulli ($B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30, \ldots$), muestra que $E_C(L)$ se reduce a dos términos, uno que depende de $f(\omega)$ pero es independiente de L, y otro que depende de L pero es independiente de nuestra elección de $f(\omega)$.
e) Determina finalmente la *fuerza* por unidad de área que actúa sobre las placas (verifica que tenga la dimensión correcta), especificando si es atractiva o repulsiva y notando que es completamente independiente de la elección de $f(\omega)$. ¡Esta 'fuerza de Casimir' incluso se ha medido experimentalmente!

6. Campo vs. Función de Onda
Vimos en clase que una partícula cuántica relativista no es otra cosa que la onda más pequeña posible sobre un campo cuántico relativista. Esta conexión entre partícula y onda naturalmente nos hace recordar la "dualidad onda-partícula" de la cuántica no relativista. Si bien las 2 ideas están relacionadas, no son idénticas. En particular, *no* es el caso que el campo sea la función de onda de la partícula, ni que la teoría de campos se obtenga al cuantizar la función de onda usual (idea que está detrás del desafortunado nombre de "segunda cuantización", y se mantiene viva todavía en algunos libros).
a) Considera la función de onda ψ (en espacio de posición) de N partículas cuánticas idénticas (relativistas o no, da igual) que viven en 3 dimensiones. ¿Cuántos argumentos tiene? ¿A nivel cuántico, para cada elección dada de esos argumentos, qué tipo de objeto matemático es ψ? Si hablamos por simplicidad de un estado donde solo hay una partícula con momento definido, para cada posición posible $\vec{x}$, ¿tiene ψ un valor definido?
b) Considera al campo φ asociado a este mismo tipo de partículas. ¿Cuántos argumentos tiene? ¿A nivel cuántico, para cada elección dada de esos argumentos, qué tipo de objeto matemático es φ? Si hablamos por simplicidad de un estado donde solo hay una partícula con momento definido, para cada posición posible $\vec{x}$, ¿tiene φ un valor definido?
c) ¿Cuál esperas que sea la función de onda ψ (en espacio de posición) asociada a una partícula con momento definido $\vec{p}$? Tal partícula está descrita por el ket $|\vec{p}\,\rangle$, que sabemos cómo describir en nuestro lenguaje de campos. Y dijimos además que (al menos en el caso libre), podemos definir un estado donde la partícula tiene posición definida a través de $|\vec{x}\rangle = \hat{\varphi}^\dagger(t=0,\vec{x})|0\rangle$. Calcula $\langle\vec{x}|\vec{p}\,\rangle$.
d) Describe la manera en que el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ contiene a las funciones de onda de partículas con momento espacial definido. (Como quizás imagines ya, sería posible desarrollar de manera similar al mismo operador $\hat{\varphi}(x)$ en términos de cualquier otro conjunto completo de funciones de onda.)
e) Al hablar de un campo cuántico, existe otra noción natural de función de onda: aquella asociada al propio campo. Así como un estado genérico $|\psi\rangle$ de una partícula puede describirse dando sus traslapes con todos los estados posibles donde la partícula tiene una posición completamente definida, $\langle\vec{x}|\psi\rangle$ (o similarmente, con estados de momento $\vec{p}$ definido), un estado genérico $|\Psi\rangle$ de un campo cuántico puede describirse dando sus traslapes con todos los estados posibles donde el campo φ tiene un valor completamente definido en cada punto del espacio (o similarmente, con estados donde el momento Π tiene un valor completamente definido). Escribe la forma genérica del objeto resultante, que se conoce como la *funcional* de onda del campo (no necesitas hacer ningún cálculo).