Teoría Cuántica de Campos

Tarea 2 — Entregar 11:10 miércoles 14 de septiembre

1. Casimir de Poincaré

a) En clase mostramos que $\hat{P}_\mu \hat{P}^\mu$ es un operador de Casimir del grupo de Poincaré, y dijimos que también lo es $\hat{\Sigma}_\mu \hat{\Sigma}^\mu$, donde $\hat{\Sigma}_\mu$ es el vector de Pauli-Lubanski

$$\hat{\Sigma}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\hat{J}^{\nu\lambda}\hat{P}^\rho \ .$$

Usando las reglas de transformación que obtuvimos para $\hat{P}_\mu$ y $\hat{J}^{\mu\nu}$, determina la manera en que transforma $\hat{\Sigma}_\mu$ bajo Lorentz, y explica por qué este resultado implica que $\hat{\Sigma}_\mu \hat{\Sigma}^\mu$ efectivamente conmuta con los 6 generadores de Lorentz.

b) Muestra que $\hat{\Sigma}_\mu \hat{\Sigma}^\mu$ conmuta igualmente con los 4 generadores de translaciones.

2. Espín 1/2

a) Un observador inercial $\mathcal{O}$ ve un electrón que se mueve con momento $\vec{p}$ en la dirección x^2 y que tiene espín $-1/2$ en la dirección x^1. ¿Cómo describiría el estado $|\psi\rangle$ del electrón, usando la notación que desarrollamos en clase?

b) Una observadora $\mathcal{O}'$ se mueve con respecto a $\mathcal{O}$ con velocidad v en la dirección 1. Para ella, ¿en qué estado se encuentra el mismo electrón?

3. Helicidad

a) Recuerda que para la partícula sin masa tomamos como vector de referencia $p_R^\mu = (1, 0, 0, 1)$, y notamos que cualquier vector p se puede escribir en la forma $p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu p_R^\nu$, donde $\mathbf{L}(p)$ es la transformación de Lorentz

$$\mathbf{L}(p) = \exp(i\varphi\mathbf{J}^{(21)})\exp(i\theta\mathbf{J}^{(13)})\exp(i\alpha\mathbf{J}^{(30)}),$$

con (θ, φ) las coordenadas esféricas de $\vec{p}$ y $\operatorname{senh}\alpha = (p^0 - 1/p^0)/2$. Usando esto definimos

$$|p, \lambda\rangle = \hat{U}(\mathbf{L}(p))|p_R, \lambda\rangle,$$

donde $|p_R, \lambda\rangle$ es un autoestado de $\hat{J}^3$ con eigenvalor λ. Muestra explícitamente que $|p, \lambda\rangle$ es eigenestado con eigenvalor λ del operador de helicidad, $\vec{p} \cdot \hat{\vec{J}}\ /|\vec{p}|$.

b) Es posible que todavía te resulte peculiar la idea de que, mientras en el caso masivo necesitamos $2j+1$ estados internos de la partícula para implementar Poincaré, en el caso no masivo nos basta con solo 1 estado interno (si consideramos solo las transformaciones conectadas con la identidad). Para ser más concretos: en clase recordamos que las relaciones de conmutación de los generadores de rotaciones $\hat{J}^i$ implican que, empezando con el estado $|p_R, \lambda\rangle$ de una partícula masiva (donde $\lambda \equiv j_3$), al actuar con $\hat{J}^\pm \equiv \hat{J}^1 \pm i\hat{J}^2$ obtenemos *otro estado distinto*, $|p_R, \lambda'\rangle$, donde $\lambda' = \lambda \pm 1 \neq \lambda$. Esto equivale a decir que las rotaciones alrededor del eje 1 o el eje 2 necesariamente cambian el valor de λ. Para la partícula no masiva, en cambio, dedujimos en clase que el valor de la etiqueta interna λ *no cambia* bajo rotaciones ni empujones ni translaciones. ¿Cómo es esto posible? ¿Acaso el estado $|p_R, \lambda\rangle$ no cambia bajo rotaciones alrededor del eje 1 o el eje 2?

c) Para hacer más directa la comparación entre el caso con y sin masa, podemos optar por describir a la partícula masiva usando autoestados de helicidad en lugar de autoestados de $\hat{J}^3$. Para ello, simplemente debemos definir $|p,\lambda\rangle = \hat{U}(\mathbf{L}(p))|p_R,\lambda\rangle$ con $\mathbf{L}(p)$ igual que en el inciso a), excepto que ahora $p_R^\mu = (m,0,0,0)$ y $\cosh\alpha = p^0/m$. (La transformación de Lorentz que usamos en clase para el caso masivo no era $\mathbf{L}(p)$ sino $\mathbf{L}(p)\exp(-i\theta\mathbf{J}^{(13)})\exp(-i\varphi\mathbf{J}^{(21)})$; las rotaciones adicionales las insertamos solo para tener una convención en la cual $\mathbf{W}(\mathbf{\Lambda},p) = \mathbf{\Lambda}$ cuando $\mathbf{\Lambda}$ es una rotación.) Por supuesto, aquí λ todavía puede tomar cualquiera de los $2j+1$ valores $j, j-1, \ldots, -j$ (a diferencia del caso no masivo, donde toma un solo valor), y los estados con distintas helicidades en general se mezclan entre sí bajo Lorentz. Comprueba que no hay tal mezcla bajo rotaciones; es decir, $\hat{U}(\mathbf{\Lambda})|p,\lambda\rangle \propto |\Lambda p,\lambda\rangle$ cuando $\mathbf{\Lambda}$ es una rotación. Explica por qué esto era de esperarse en vista de la interpretación física de la helicidad (o de tu resultado en a)). Aprendes entonces que, incluso en el caso masivo, la helicidad (a diferencia de j_3) *no cambia bajo* rotaciones. Pero ocurre que sí cambia bajo empujones, en contraste con el caso no masivo. ¿Puedes dar un argumento intuitivo/físico para explicar esta diferencia entre los 2 tipos de partículas?

4. Espín 1

a) Los generadores de Lorentz en la representación vectorial, $\mathbf{J}^{(\mu\nu)}$, son matrices cuatro por cuatro; pero en los generadores de rotaciones $\mathbf{J}^{(i)} \equiv \epsilon^{ijk}\mathbf{J}^{(jk)}/2$ claramente podemos omitir el renglón cero y la columna cero para obtener matrices tres por tres $J^{(i)}$ que todavía satisfacen las relaciones de conmutación de $so(3)$: $[J^{(i)}, J^{(j)}] = i\epsilon^{ijk}J^{(k)}$. Cuando en clase hablamos hace poco de la representación de $SO(3)$ con espín $j=1$, escribimos *otras* matrices tres por tres que satisfacen las *mismas* relaciones de conmutación:

$$J^{1[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{2[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{3[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como solo existe *una* representación de $SO(3)$ para cada valor de j, las $J^{i[1]}$s deben ser las mismas matrices que las $J^{(i)}$s, pero disfrazadas. Una manera de disfrazar (¡que no logra despistar gran cosa!) es simplemente cambiarle la etiqueta i a los generadores $J^{(i)}$, teniendo cuidado de preservar las relaciones de conmutación (un ejemplo sería permutar el 1, el 2 y el 3 de manera cíclica). Otra manera, más drástica, es cambiar de base en el espacio vectorial (tres-dimensional) donde operan estas matrices. Si el cambio es tal que un vector v cambia a $v' = Mv$, donde M es una matriz tres por tres, ¿cómo cambiarían los generadores $J^{i[1]}$?

b) Nota que M debe ser unitaria si queremos que las nuevas $J^{i[1]}$s sigan siendo hermíticas (como deben serlo para que las matrices $D^{[j]}$ sean unitarias). Determina explícitamente la M unitaria que convierte a las $J^{i[1]}$s en las $J^{(i)}$s.

c) Para fotones, hablamos en clase de estados con helicidad $+1$ y -1. Estos estados corresponden a *polarización circular*. Recuerda que el campo eléctrico en una onda electromagnética plana que se mueve en la dirección 3 es la parte real de

$$E^1 = \epsilon^1 |\vec{E}| \exp(-i\omega x^0 + i\omega x^3), \quad E^2 = \epsilon^2 |\vec{E}| \exp(-i\omega x^0 + i\omega x^3), \quad E^3 = \epsilon^3 |\vec{E}| = 0,$$

con $|\epsilon^1|^2 + |\epsilon^2|^2 = 1$. Los dos casos independientes de *polarización lineal* son $(\epsilon^1, \epsilon^2) = (1,0)$ ó $(0,1)$; polarización circular corresponde en cambio a $(\epsilon^1, \epsilon^2) = (1, \pm i)/\sqrt{2}$. Vemos entonces que las superposiciones

$$|p_R, \phi = 0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|p_R, +1\rangle + |p_R, -1\rangle \right), \quad |p_R, \phi = \pi/2\rangle \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \left(|p_R, +1\rangle - |p_R, -1\rangle \right)$$

describen fotones que se mueven en la dirección 3 y están polarizados linealmente a lo largo de la dirección 1 y 2, respectivamente. Más en general,

$$|p_R, \phi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\phi} |p_R, +1\rangle + e^{-i\phi} |p_R, -1\rangle \right)$$

representa un fotón polarizado a lo largo de una dirección que forma un ángulo ϕ con la dirección 1. ¿Cómo transforma $|p, \phi\rangle \equiv \hat{U}(\mathbf{L}(p)) |p_R, \phi\rangle$ bajo Lorentz?