Teoría Cuántica de Campos II

Tarea 16 — Entregar miércoles 24 de mayo <11:10 am

1. Funcional Generatriz de Correladores Conexos

a) Considera una teoría arbitraria $S[\phi]$ con un campo escalar real. Sabemos que la función de partición

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[iS[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)\right]$$

es la funcional generatriz para funciones de correlación arbitrarias

$$G_N(1,\ldots,N) \equiv G_N(x_1,\ldots,x_N) \equiv \langle\Omega|T\left\{\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_N)\right\}|\Omega\rangle \ ,$$

en el sentido de que

$$G_N(1,\ldots,N) = \frac{1}{Z[0]} \left.\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(1)\cdots\delta J(N)}\right|_{J=0} \ .$$

Muestra que esto es equivalente a decir que

$$Z[J] = Z[0] \mathop{}_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, \frac{1}{n!} G_n(1,\ldots,n) J(1)\cdots J(n)$$

b) Sabemos que, perturbativamente, $Z[0]$ es una suma sobre todos los posibles diagramas sin puntos externos, que llamamos 'burbujas de vacío', y que según vimos el curso anterior, se exponencían. Este mismo exponente aparece en $Z[J]$, así que, en el cálculo de $G_N(1,\ldots,N)$ a partir de la funcional generatriz, se cancela al dividir entre $Z[0]$. Por esta razón, la expansión perturbativa para $G_N(1,\ldots,N)$ solo incluye diagramas *sin* burbujas de vacío, a los que el curso anterior llamamos diagramas *conexos* (o conectados). Esto no implica, sin embargo, que todos los puntos externos en los diagramas tengan que estar conectados entre sí, y al calcular funciones de correlación frecuentemente encontramos diagramas que están formados por dos o más subdiagramas disjuntos.

Evidentemente, si conocemos los diagramas que sí tienen todos sus puntos externos conectados entre sí, que el curso anterior llamamos *totalmente conexos*, entendemos el caso arbitrario, que en el peor de los casos incluye sumas sobre productos de tales diagramas. Conviene por tanto definir una noción de correlador que solo incluya a los diagramas totalmente conexos, que de ahora en adelante llamaremos *conexos*, a secas. Denotaremos a estas funciones de correlación como $G_N^c(1,\ldots,N)$. Su definición requiere de un procedimiento iterativo para excluir los diagramas disconexos:

$$\begin{aligned}
G_1^c(1) &\equiv G_1(1) \ , \\
G_2^c(1,2) &\equiv G_2(1,2) - G_1^c(1)G_1^c(2) = G_2(1,2) - G_1(1)G_1(2) \ , \\
G_3^c(1,2,3) &\equiv G_3(1,2,3) - G_1^c(1)G_2^c(2,3) - G_1^c(2)G_2^c(1,3) - G_1^c(3)G_2^c(1,2) \\
&\qquad\qquad -G_1^c(1)G_1^c(2)G_1^c(3) \ , \\
&= G_3(1,2,3) - G_1(1)G_2(2,3) - G_1(2)G_2(1,3) - G_1(3)G_2(1,2) \\
&\qquad\qquad +2G_1(1)G_1(2)G_1(3) \ ,
\end{aligned}$$

etc.

Nota que aunque normalmente tenemos $G_1(1) = 0$ (pues esto es el valor esperado del campo en el vacío), hemos dejado las definiciones en su forma más general, de modo que el patrón de sustracciones sea claro. Nota también que esta definición de G_N^c no se refiere a diagramas de Feynman y por tanto es válida igualmente a nivel no perturbativo.

Escribe la definición de $G_4^c(1,2,3,4)$. Tomando el ejemplo de la expansión perturbativa *desnuda* (por simplicidad) para la teoría ϕ^4 hasta (es decir, incluyendo) orden λ_0^2, muestra que esta definición en verdad elimina todos los diagramas disconexos.

c) Definamos ahora (regresando a la teoría arbitraria $S[\phi]$)

$$Z[J] \equiv \exp\left(W[J]\right) \ .$$

A partir de las definiciones, muestra que

$$G_N^c(1,\ldots,N) = \left.\frac{\delta^N W[J]}{\delta J(1)\cdots\delta J(N)}\right|_{J=0}$$

explícitamente para los casos $N = 1,2,3$. Esta relación es cierta para cualquier N, por lo que $W[J]$ se conoce como la *funcional generatriz de correladores conexos*. (Esta es la notación más común, pero algunos autores (como Greiner) invierten los nombres Z y W.)

d) Usando la conexión conocida con el formalismo canónico, muestra que, físicamente, esta funcional generatriz es simplemente $W[J] = -iE[J]T$, donde $E[J]$ denota la energía del vacío $|\Omega\rangle$ en presencia de la fuente externa $J(x)$, y $T \to \infty$ es el intervalo temporal.

2. Acción Efectiva IP1

a) De la definición en el problema anterior tenemos que

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle\Omega|\hat{\phi}(x)|\Omega\rangle_J \ ,$$

donde el subíndice denota que estamos considerando la teoría modificada por la presencia de la fuente externa $J(x)$. Esta expresión es una función clásica del punto x, pero al mismo tiempo es una funcional de la fuente J, así que podemos denotarla

$$\phi_{\rm cl}(x,J] \equiv \langle\Omega|\hat{\phi}(x)|\Omega\rangle_J \ ,$$

o simplemente $\phi_{\rm cl}(x)$, cuando queramos abreviar. Normalmente el valor esperado del campo en el vacío de la teoría sin modificar sería cero, $\phi_{\rm cl}(x,0] = 0$, pero la presencia de la fuente justamente hace que el campo se 'encienda', como comentamos varias veces en clase. Usando $\phi_{\rm cl}$, es habitual definir una nueva funcional Γ como la transformada de Legendre de W,

$$\Gamma[\phi_{\rm cl}] \equiv W[J] - \int d^4x\, J(x)\phi_{\rm cl}(x,J] \ .$$

Muestra que $\delta\Gamma/\delta J = 0$ (lo cual justifica la notación, porque $\Gamma[\phi_{\rm cl}]$ no depende de J) y

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{\rm cl}]}{\delta\phi_{\rm cl}(x)} = -J(x) \ .$$

Esta última expresión indica que, si apagamos la fuente, la ecuación que tenemos que resolver para determinar el valor esperado del campo en el vacío $\phi_{\rm cl}(x,0]$ es equivalente a la condición para extremizar a la funcional $\Gamma[\phi_{\rm cl}]$. Por esta razón, esta funcional se conoce como la *acción efectiva* de la teoría: es análoga a la acción clásica, pero incluye todas las correcciones cuánticas. Nota que al hablar de Γ ya no es necesario 'recordar' la manera en que el valor de fondo del campo dependía de J, porque Γ no depende de J. El argumento funcional de Γ, $\phi_{\rm cl}$, es entonces simplemente una función clásica arbitraria.

b) Es posible mostrar que $\Gamma[\phi_{\rm cl}]$ también es una funcional generatriz, en este caso, de los correladores irreducibles por una partícula $\Gamma_N(1,\ldots,N)$ en los que nos hemos estado concentrando al buscar divergencias ultravioleta (y a partir de los cuales se pueden reconstruir todos los correladores conexos, simplemente uniendo Γ_N's con propagadores libres). Más específicamente, se tiene

$$\Gamma_N(1,\ldots,N) = \left.\frac{\delta^N\Gamma[\phi_{\rm cl}]}{\delta\phi_{\rm cl}(1)\cdots\delta\phi_{\rm cl}(N)}\right|_{\phi_{\rm cl}=0} \ .$$

Demuestra este hecho siguiendo a alguno de los libros de campos (p.ej., en Peskin sección 11.5, Greiner 12.7 o Gross 17.2). De nuevo, con esta fórmula tenemos una definición de los correladores propios que no depende de la expansión perturbativa (aunque, como estás aprendiendo, equivale a la definición que dimos a partir de cortar diagramas). Dicho al revés (cf. el problema 1a), la acción efectiva toma la forma

$$\Gamma[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\,\frac{1}{n!}\Gamma_n(1,\ldots,n)\phi_{\rm cl}(1)\cdots\phi_{\rm cl}(n) \ .$$

En general esta acción es altamente no local, pero puede visualizarse como una sola integral que contiene infinitos términos con derivadas cada vez más altas. La parte sin derivadas incluye el llamado *potencial efectivo*, que determina la configuración de mínima energía entre todas aquellas donde el campo es independiente de la posición.