Teoría Cuántica de Campos II

Tarea 11 — Entregar lunes 20/03 $\leq$16:10

1. $\hbar$ y la Expansión en Lazos

a) Por análisis dimensional, indica dónde debe aparecer $\hbar$ (que normalmente ponemos igual a 1) en la integral funcional. Con base en esto, deduce cómo figura $\hbar$ en cada propagador y en cada vértice de una teoría arbitraria.

b) Tomando el ejemplo concreto de la teoría ϕ^4, deduce la relación que hay para un diagrama arbitrario entre el número I de líneas internas, el número V de vértices, el número E de patas externas, y el número L de lazos.

c) Usando tus 2 resultados anteriores, muestra que los diagramas con L lazos que contribuyen a una función de correlación de N puntos *amputada* son de orden $\hbar^{L-1}$. Así que si organizamos la expansión perturbativa de acuerdo no con el número de vértices sino con el número de lazos (como resulta conveniente en particular para renormalizar, puesto que las posibles divergencias provienen de las integrales sobre el momento que circula en los lazos), tenemos una expansión en potencias de $\hbar$. Esto es cierto para una teoría arbitraria. Los diagramas a orden más bajo en esta expansión son los que hemos llamado diagramas a nivel árbol, es decir, los que carecen de lazos (aunque pudieran tener un número arbitrario de vértices). Ellos corresponden entonces al límite clásico de la teoría (lo que domina cuando $\hbar \to 0$).

2. El Límite Semiclásico y la Aproximación de Punto de Silla

a) En el problema 1a) de la Tarea 6, argumentaste a partir de la integral funcional que en el límite clásico cobran especial relevancia las trayectorias que extremizan la acción, es decir, las soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento. Para examinar esto de manera más sistemática, sigue tomando $\hbar \neq 1$, como en el problema anterior a este. Considera la integral funcional para un campo $\phi(x)$. Definiendo

$$\phi(x) \equiv \phi_{\mathrm{sol}}(x) + \sqrt{\hbar}\,\eta(x) \ ,$$

con $\phi_{\mathrm{sol}}(x)$ una solución clásica a la ecuación de movimiento (con las condiciones de frontera requeridas), desarrolla la acción en potencias de $\sqrt{\hbar}$. ¿Qué utilidad tiene incluir el factor de $\sqrt{\hbar}$ enfrente de η al definir esta expansión?

b) Haz un cambio de variable de integración $\phi \to \eta$, y muestra que en una expansión en potencias de $\sqrt{\hbar}$, la contribución dominante (la única que sobrevive en el límite clásico) viene precisamente de $S[\phi_{\mathrm{sol}}]$ (la acción evaluada en la solución clásica).

c) ¿Puedes hacer la integral funcional para la siguiente contribución en esta serie? Esta primera corrección constituye ya lo que legítimamente podemos llamar la aproximación semiclásica (aunque a veces la gente usa esta frase para referirse a la expresión del inciso anterior).

d) Explica por qué la aproximación semiclásica es de hecho *exacta* en el caso de una teoría de campos libres (si no vislumbras la respuesta, tal vez quieras repasar lo que dijimos en las pp. 529-30, 548).

e) Ahora evitemos considerar el límite clásico, y pongamos nuevamente $\hbar = 1$. Imagina que tenemos una teoría en la que la acción entera es proporcional a $1/\lambda$, con

λ algún parámetro no aparece en ningún otro lugar en la acción. (Dicho en otras palabras, queremos que la acción esté multiplicada por algún parámetro que puede considerarse muy grande.) Ejemplos de ello serían la acción de Yang-Mills (que puede escribirse con un solo factor $1/g_{YM}^2$ al frente), la acción de gravedad o supergravedad (con un factor $1/G_N$), o la acción de una cuerda (con un factor $1/\alpha'$, donde α', el inverso de la tensión de la cuerda, está relacionado con su longitud característica). Explica por qué en todos estos casos, si λ puede considerarse muy pequeño, la integral funcional se simplifica de la misma manera que dedujiste en los incisos anteriores. Este análogo de la aproximación clásica o semiclásica se conoce con nombres variados: aproximación de fase estacionaria, o de punto de silla, o de descenso más agudo.