Teoría Cuántica de Campos

Tarea 1 — Entregar 11:10 viernes 26 de agosto

1. Propagadores y Funciones de Green

a) La ecuación $(\partial^2 + m^2)f(x) = 0$ con $\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ se conoce la *ecuación de Klein-Gordon*, y en consecuencia, el operador diferencial $\partial^2 + m^2$ se conoce como el operador de Klein-Gordon. Muestra que el propagador de Feynman $G_F(x'-x) \equiv G(x'-x)$ para la partícula libre relativista es una *función de Green* del operador de Klein-Gordon. Es decir, muestra que $(\partial^2 + m^2)G(x'-x)$ es proporcional a $\delta^{(4)}(x'-x)$, y encuentra la constante de proporcionalidad.
b) Comprueba que, por otra parte, el propagador $\langle x'|x\rangle$ es una solución (no una función de Green) de la ecuación de Klein-Gordon, es decir, $(\partial^2 + m^2)\langle x'|x\rangle = 0$. La delta de Dirac que obtuviste en el inciso anterior proviene entonces de las funciones escalón que figuran en la definición de G_F.
c) El propagador de Feynman G_F es apenas una de infinitas funciones de Green posibles para el operador de Klein-Gordon, que se distinguen entre sí por las condiciones de frontera. G_F propaga energías positivas hacia adelante en el tiempo y energías negativas hacia atrás (la opción exactamente opuesta se conoce como el propagador de Dyson G_D). El propagador *retardado* $G_R(x'-x)$ se define como la función de Green que se anula a menos que $t' > t$ (la opción exactamente opuesta se conoce como el propagador avanzado G_A). Escribe una expresión para $G_R(x'-x)$ como una integral específica sobre d^4p.
d) Realiza la integral sobre p^0 para obtener una expresión para G_R en términos de una integral específica sobre d^3p.
e) Comprueba que G_F y G_R difieren por una solución a la ecuación de Klein-Gordon.

2. Normalización de los Estados y Novedades en el Espacio de Posición

a) Cuando hablamos en clase de la partícula relativista, cuántica y libre, mostramos indirectamente que la medida de integración $\int d^3p/2E_{\vec{p}}$ (con $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$) es invariante bajo Lorentz, puesto que coincide con la medida manifiestamente invariante $\int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$. De la mano de lo anterior, esperamos que la combinación

$$2E_{\vec{p}}\,\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \equiv 2E_{\vec{p}}\,\delta(p^1 - p'^1)\delta(p^2 - p'^2)\delta(p^3 - p'^3) \ ,$$

que justamente elimina la integral sobre $\vec{p}$ recién mencionada, sea también invariante bajo rotaciones y bajo empujones. Muestra directamente que esto es cierto. En vista de ello, es útil adoptar una convención donde normalizamos a los estados $|\vec{p}\rangle$ (en los cuales la partícula tiene momento espacial definido) de acuerdo con

$$\langle \vec{p}|\vec{p}\,'\rangle = 2E_{\vec{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \ ,$$

en lugar de solo $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')$, que es lo que usamos habitualmente en el caso no relativista.

b) El valor del propagador de la partícula en espacio de posición, $\langle x'|x\rangle$, naturalmente depende de lo que signifiquen los estados (en el cuadro de Heisenberg) $|x\rangle \equiv |t, \vec{x}\,\rangle$. En la p. 12 de los apuntes, utilizamos la invariancia de $\int d^3p/2E_{\vec{p}}$ para definir $\langle x'|x\rangle$ de modo que sea también invariante bajo Lorentz. El paso del penúltimo al último renglón en esa página, involucra 2 cosas: insertar al operador identidad expresado como una integral sobre estados con momento espacial definido,

$$\hat{1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\,\rangle\langle\vec{p}\,|$$

(donde, como puedes verificar, la aparición de la energía en el denominador es consistente con la normalización elegida en la última ecuación del inciso anterior), y después escribir el traslape entre los estados de momento y de posición (en el cuadro de Schrödinger) como

$$\langle\vec{p}\,|\vec{x}\,\rangle = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} ,$$

que es la expresión a la que estamos acostumbrados. Comprueba que estos 2 elementos juntos implican que nuestros estados de posición *no* son ortogonales: $\langle\vec{x}\,'|\vec{x}\,\rangle \neq 0$ incluso si $\vec{x}\,' \neq \vec{x}$. Explica cómo es que este resultado está relacionado con nuestro análisis en clase del propagador $\langle x'|x\rangle$.
c) Los estados $|x\rangle$ o $|\vec{x}\,\rangle$ que estamos utilizando (y que son los que figuran en todos los libros, porque como veremos están directamente relacionados con el operador de campo) *no* representan entonces una partícula *completamente* localizada. Pero por otra parte, la escala de deslocalización ℓ (dentro de la cual es apreciable el traslape entre $|\vec{x}\,\rangle$ y $|\vec{x}\,'\rangle$) es finita. ¿Cuál es el valor de ℓ en general? Para saber qué tan grande o pequeña es esta deslocalización, toma como ejemplo concreto al electrón, y calcula el valor de ℓ en metros. Con base en lo que vimos en clase, ¿cuál dirías que es la razón *física* por la que no nos resulta posible localizar a un electrón en una región más pequeña que este valor de ℓ? ¿Puedes sustentar tu intuición con una estimación cuantitativa?
d) Explica por qué tu resultado en b) implica que los estados $|\vec{x}\,\rangle$ *no* son eigenestados de un operador de posición hermitiano $\hat{\vec{X}}$. Si quieres saber más sobre la dificultad para definir estados localizados de partícula (y el correspondiente operador de posición) en el caso relativista, consulta el artículo de Newton y Wigner que aparece como referencia (debajo del de Feynman) en la página del curso.

3. El álgebra de Lie de los Grupos de Lorentz y Poincaré

a) Empleando la definición de los seis generadores de Lorentz como matrices $\mathbf{J}^{(\mu\nu)}$ 4×4, con componentes

$$i\left(J^{(\mu\nu)}\right)^{\lambda}{}_{\kappa} = \delta^{\mu}_{\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \delta^{\nu}_{\kappa}\eta^{\mu\lambda} ,$$

deduce las relaciones de conmutación del álgebra de Lie $so(3,1)$:

$$\left[\mathbf{J}^{(\mu\nu)}, \mathbf{J}^{(\rho\sigma)}\right] = i\left(\eta^{\mu\sigma}\mathbf{J}^{(\nu\rho)} + \eta^{\nu\rho}\mathbf{J}^{(\mu\sigma)} - \eta^{\mu\rho}\mathbf{J}^{(\nu\sigma)} - \eta^{\nu\sigma}\mathbf{J}^{(\mu\rho)}\right) .$$

b) Usando la representación de las transformaciones de Poincaré como matrices 5×5, en la cual el generador de translaciones en la dirección μ está dado por

$$i\left(P_{(\mu)}\right)^M{}_N = \delta^M_\mu \delta^4_N$$

(con $M, N = 0,1,2,3,4$) y los generadores de Lorentz son, como arriba,

$$i\left(J^{(\mu\nu)}\right)^L{}_K = \delta^\mu_K \eta^{\nu L} - \delta^\nu_K \eta^{\mu L} \ ,$$

muestra que

$$\left[\mathbf{J}^{(\mu\nu)}, \mathbf{P}^{(\lambda)}\right] = i\left(\eta^{\nu\lambda}\mathbf{P}^{(\mu)} - \eta^{\mu\lambda}\mathbf{P}^{(\nu)}\right) \ .$$

4. $SL(2,\mathbf{C})$ **y el Grupo de Lorentz**

a) Dado un vector $x^\mu = (x^0, \vec{x})$, podemos definir una matriz hermitiana 2×2:

$$X \equiv x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_\mu \equiv (\mathbf{1}, \vec{\sigma})$, con σ_i las matrices de Pauli. A la inversa, cualquier matriz X que sea hermitiana y 2×2 se puede escribir en esta forma, y por tanto define un vector x^μ. Calcula $\det X$ y $\operatorname{Tr} X$. Muestra que si $X' = LXL^\dagger$, donde L es cualquier matriz compleja 2×2 con $\det L = 1$, entonces x'^μ y x^μ están relacionados por una cierta transformación de Lorentz, $\Lambda(L)$. Observa que $\Lambda(L) = \Lambda(-L)$.

b) Si L_1 y L_2 corresponden a las transformaciones de Lorentz Λ_1 y Λ_2, respectivamente, entonces ¿qué matriz L_3 corresponde a $\Lambda_3 = \Lambda_2\Lambda_1$? Muestra que las L's (matrices complejas 2×2, con determinante 1) forman un grupo, cuyos elementos se pueden caracterizar con 6 parámetros reales. Llamamos a este grupo de Lie $SL(2,\mathbf{C})$. Hemos visto que es prácticamente equivalente a $SO^+(3,1)$, excepto que L y $-L$ describen la *misma* transformación de Lorentz, lo cual se resume escribiendo que $SO^+(3,1) = SL(2,\mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$, donde $\mathbf{Z}_2$ denota el grupo discreto $\{+\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Esta identificación resulta ser la razón por la cual $SO^+(3,1)$ no es simplemente conexo, a pesar de que $SL(2,\mathbf{C})$ sí lo es ($SL(2,\mathbf{C})$ resulta tener la misma topología que $\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^3$).

c) Comprueba que si L, además de tener determinante 1, es unitaria (es decir, si $L\in SU(2)$), entonces $\Lambda(L)$ es una rotación. En otras palabras, $SO(3) = SU(2)/\mathbf{Z}_2$.

d) Considera L's cercanas a la identidad, $L_{ab} = \delta_{ab} + \omega_{ab}$ $(a,b = 1,2)$, con $|\omega_{ab}| \ll 1$. ¿Qué condición debe satisfacer la matriz ω para que $L\in SL(2,\mathbf{C})$? El espacio de tales ω's (ya no necesariamente infinitesimales) es entonces el álgebra de Lie $sl(2,\mathbf{C})$.

e) Como puedes fácilmente comprobar, cualquier $\omega\in sl(2,\mathbf{C})$ se puede expresar en la forma $\omega = \vec{z}\cdot\vec{\sigma}$ con $z_i\in\mathbf{C}$, o en otras palabras, $\omega = i\vec{a}\cdot\vec{\sigma} + i\vec{b}\cdot\vec{\tau}$, donde a_i, b_i son parámetros *reales* y $\vec{\tau}\equiv i\vec{\sigma}$. Determina las relaciones de conmutación entre los 6 generadores σ_i, τ_i. Muestra que si identificamos cada uno de los generadores de Lorentz $\mathbf{J}^{(\mu\nu)}$ con una cierta combinación lineal (que debes determinar) de los generadores

σ_i, τ_i, entonces los conmutadores de $so(3,1)$ coinciden con los de $sl(2,\mathbf{C})$.
f) Podemos escribir cualquier $L \in SL(2,\mathbf{C})$ en la forma $L = \exp(i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}+i\vec{b}\cdot\vec{\tau})$. Usando tus resultados del inciso anterior, comprueba una vez más que las rotaciones corresponden a L's unitarias, y muestra que los empujones corresponden a L's hermitianas. Explica por qué esto implica que los empujones no forman un grupo.