lunes, 03 de septiembre de 2007 10:19 a.m.

$\underset{\sim}{L}(\bar p_1) \equiv \exp(i\varphi \underset{\sim}{J}^{(21)})\exp(i\theta \underset{\sim}{J}^{(13)})\exp(i\alpha \underset{\sim}{J}^{(30)})\exp(-i\theta \underset{\sim}{J}^{(13)})\exp(-i\varphi \underset{\sim}{J}^{(21)})$

si la propia $\underset{\sim}{\Lambda}$ es una rotación, entonces se tiene

$$\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar p) = \underset{\sim}{\Lambda} \quad \forall\ \bar p .$$

← Aquí importan las rotaciones místicas, aparentemente ociosas, en la definición de $\underset{\sim}{L}$ (p.78)

Dado que $\underset{\sim}{W}$ no cambia $\bar p_R$, el único efecto posible de $\hat U(\underset{\sim}{W})$ es mezclar los estados con distintos valores de λ:

$$\hat U(\underset{\sim}{W}) |\bar p_R, \lambda\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W}) |\bar p_R, \lambda'\rangle$$

↑ Matriz de dimensión finita (porque λ toma un número finito de valores)

Podemos notar ahora que el hecho de que las matrices $\hat U$ den una representación de Poincaré implica que

$$\hat U(\underset{\sim}{W}_2)\hat U(\underset{\sim}{W}_1)|\bar p_R, \lambda\rangle = \hat U(\underset{\sim}{W}_2 \underset{\sim}{W}_1)|\bar p_R, \lambda\rangle \quad \forall\ \lambda, \underset{\sim}{W}_1, \underset{\sim}{W}_2$$

de donde se sigue a su vez que

$$\sum_{\lambda', \lambda''} D_{\lambda''\lambda'}(\underset{\sim}{W}_2) D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W}_1) |\bar p_R, \lambda''\rangle = \sum_{\lambda''} D_{\lambda''\lambda}(\underset{\sim}{W}_2 \underset{\sim}{W}_1)|\bar p_R, \lambda''\rangle$$

y por tanto (dado que las λs etiquetan una base para el esp. interno)

$$\sum_{\lambda'} D_{\lambda''\lambda'}(\underset{\sim}{W}_2) D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W}_1) = D_{\lambda''\lambda}(\underset{\sim}{W}_2 \underset{\sim}{W}_1) \quad \forall\ \underset{\sim}{W}_1, \underset{\sim}{W}_2,$$

es decir, las matrices $D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W})$ forman una rep del grupito, $SO(3)$ (que será proyectiva si $\hat U$ lo es).

martes, 04 de septiembre de 2007 06:45 p.m.

Es fácil mostrar que el requisito de unitariedad para las $\hat{U}$'s se traduce en que las D's también son matrices unitarias.

En resumen, para una partícula masiva, siguiendo a Wigner hemos reducido el problema de encontrar una irrep unitaria para Poincaré(3,1) al problema, mucho más sencillo, de encontrar una irrep unitaria para el grupito SO(3).

(Notemos en particular que esta última rep sí podrá ser de dimensión finita, gracias a que SO(3) es compacto.)

Físicamente: basta entender las opciones y transformaciones que tiene la partícula cuando está en reposo, para entenderlo todo.

Dada una elección de la rep de SO(3) a la cual pertenecen las D's, habremos especificado por completo

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{a})|\bar{p},\lambda\rangle = \hat{U}(\underset{\sim}{1},\bar{a})\,\overbrace{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},0)|\bar{p},\lambda\rangle}^{\hat{U}(\underset{\sim}{L}(\bar{p}))|\bar{p}_R,\lambda\rangle}$$

p. 80

$$= \hat{U}(\underset{\sim}{1},\bar{a})\,\underbrace{\hat{U}(\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p}))\,\hat{U}(\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p}))}\,|\bar{p}_R,\lambda\rangle$$

$$= \hat{U}(\underset{\sim}{1},\bar{a}) \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p}))\,\hat{U}(\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p}))|\bar{p}_R,\lambda'\rangle\,,$$

es decir,

$$\boxed{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{a})|\bar{p},\lambda\rangle = \exp[ia\cdot(\Lambda p)] \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p}))\,|\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p},\lambda'\rangle}\,.$$

Esta irrep de Poincaré(3,1) debe corresponder a un valor concreto de σ^2, el autovalor del Casimir $\hat{\Sigma}^2$.

Y, efectivamente, podemos notar que $\leftarrow p_R^\mu = (m, \vec{0})$

$$\hat{\Sigma}_\mu |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\hat{J}^{\nu\lambda}\hat{p}^\rho|\bar{p}_R,\lambda\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\mu^{\ i}\underbrace{\epsilon_{ijk0}}_{\equiv -\epsilon^{ijk}}\hat{J}^{jk}\hat{p}^0|\bar{p}_R,\lambda\rangle \qquad (\epsilon^{123}\equiv +1)$$

$$= -\delta_\mu^{\ i}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{J}^{jk}\right)}_{\equiv \hat{J}^i}m|\bar{p}_R,\lambda\rangle \qquad \left(\text{con } \sum_{i,j,k}\right)$$

$\leftarrow$ generador de rotaciones alrededor del eje i

p.ej. $\hat{J}^{12} \equiv \hat{J}^3$

$$\left((2) \Rightarrow [\hat{J}^i, \hat{J}^j] = i\,\epsilon^{ijk}\hat{J}^k\right)$$

y por lo tanto

$$\hat{\Sigma}^\mu\hat{\Sigma}_\mu|\bar{p}_R,\lambda\rangle = \eta^{\mu\sigma}\frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\nu\lambda\rho}\hat{J}^{\nu\lambda}\hat{p}^\rho\left(-\delta_\mu^{\ i}\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{J}^{jk}\right)m|\bar{p}_R,\lambda\rangle$$

$$= +m\frac{1}{2}\epsilon_{i\nu\lambda\rho}\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{J}^{\nu\lambda}\underbrace{\hat{p}^\rho\hat{J}^{jk}}_{\hat{J}^{jk}\hat{p}^\rho + i(\eta^{\rho j}\cancel{\hat{p}^k} - \eta^{\rho k}\cancel{\hat{p}^j})}|p_R,\lambda\rangle$$

p.48

$$= m^2\frac{1}{2}\underbrace{\epsilon_{ilm0}}_{-\epsilon^{ilm}}\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\hat{J}^{lm}\hat{J}^{jk}|\bar{p}_R,\lambda\rangle$$

$$= -m^2\hat{J}^i\hat{J}^i|\bar{p}_R,\lambda\rangle \qquad \left(\text{con } \sum_i\right),$$

donde reconocemos a $\hat{\vec{J}}^2 \equiv \hat{J}^i\hat{J}^i = (\hat{J}^1)^2 + (\hat{J}^2)^2 + (\hat{J}^3)^2$, el operador de Casimir del grupito $SO(3)$. Sabemos que los posibles autovalores de $\hat{\vec{J}}^2$ son $j(j+1)$, con $j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots$

— valores asociados a reps irreducibles de dimensión $2j+1$ —

así que tenemos $\boxed{\sigma^2=-m^2 j(j+1)}$.

Es convencional llamar al entero o semientero j el espín de la partícula masiva. Físicamente, ¿qué significa entonces el espín? Es simplemente un número que codifica, por un lado, el número de estados 'internos' que tiene la partícula ($\leftrightarrow$ valores distintos de la etiqueta discreta λ), y por otro lado, la manera en que estos estados se mezclan entre sí bajo rotaciones y empujones — es decir, la forma en que la partícula 'cambia su apariencia' cuando la giramos o empujamos ($\leftrightarrow$ cuando giramos o cambiamos de velocidad).

Una partícula con espín no es entonces solo un puntito; es un puntito con un índice λ. P.ej., para $j=\frac{1}{2}$, es como si empezáramos pensando en 2 tipos distintos de partículas SIN tal etiqueta λ, $|p\rangle_1$ y $|p\rangle_2$; ¡pero resulta que al girar nuestra cabeza un tipo se transforma progresivamente en el otro! (solo posible por superposición cuántica) Es entonces más natural reinterpretar lo que tenemos como un solo tipo de de partícula con 2 estados 'internos', $|p_\mu,\lambda\rangle$. ($\lambda=1,2$ grado de libertad discreto)

Nos resta solo recordar la forma de las matrices $D_{\lambda'\lambda}$. Dado un valor de j, sabemos que la representación tiene dimensión $2j+1$, y también, que podemos etiquetar a los distintos estados de la partícula en reposo usando el autovalor de uno de los generadores de $SO(3)$, convencionalmente $\hat{J}^3$. Tenemos entonces los estados

$|\bar{p}_R, \lambda\rangle$, con $\lambda \equiv j^3 = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ (2j+1 valores),

$\hat{J}^3 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda |\bar{p}_R, \lambda\rangle$. seguiremos llamando λ, porque para $\bar{p} \neq \bar{p}_R$, λ NO será el eigenvalor de $\hat{J}^3$

$\hat{J}^{12}$

Definiendo $\hat{J}^{\pm} \equiv \hat{J}^1 \pm i \hat{J}^2$ $\left(\Rightarrow (\hat{J}^+)^\dagger = \hat{J}^-\right)$, podemos verificar que $[\hat{J}^3, \hat{J}^{\pm}] = \pm \hat{J}^{\pm}$, lo cual implica que

$$\hat{J}^3\left(\hat{J}^{\pm}|\bar{p}_R, \lambda\rangle\right) = \left(\hat{J}^{\pm}\hat{J}^3 \pm \hat{J}^{\pm}\right)|\bar{p}_R, \lambda\rangle = (\lambda \pm 1)\left(\hat{J}^{\pm}|\bar{p}_R, \lambda\rangle\right)$$

es decir, $\hat{J}^{\pm}|\bar{p}_R, \lambda\rangle = C_{\pm}(j,\lambda)|\bar{p}_R, \lambda \pm 1\rangle$ (con $C_{\pm} = 0$ si $\lambda = \pm j$)

Tomando en cuenta que $\hat{\vec{J}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}^+\hat{J}^- + \hat{J}^-\hat{J}^+) + (\hat{J}^3)^2$, podemos deducir que $C_{\pm} = \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda \pm 1)}$, es decir,

$$\hat{J}^{\pm}|\bar{p}_R, \lambda\rangle = \sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda \pm 1)}\;|\bar{p}_R, \lambda \pm 1\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{J}^1 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda+1)}\;|\bar{p}_R, \lambda+1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda-1)}\;|\bar{p}_R, \lambda-1\rangle \\ \hat{J}^2 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = -\frac{i}{2}\sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda+1)}\;|\bar{p}_R, \lambda+1\rangle + \frac{i}{2}\sqrt{j(j+1) - \lambda(\lambda-1)}\;|\bar{p}_R, \lambda-1\rangle \end{cases}$$

Esto especifica las componentes de las matrices $(2j+1)\times(2j+1)$ que en la rep de espín j corresponden a los generadores de rotaciones, matrices que denotaremos $\vec{J}^{[j]}$:

nombre de rep

al exponenciarlas nos dan las $D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W})$

$$\boxed{J^{3[j]}_{\lambda'\lambda} = \lambda\,\delta_{\lambda',\lambda}\,, \qquad J^{\pm[j]}_{\lambda'\lambda} = \sqrt{j(j+1)-\lambda(\lambda\pm 1)}\;\delta_{\lambda',\lambda\pm 1}}$$

(y que satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie so(3), $[J^{i[j]}, J^{l[j]}] = i\,\epsilon^{ilk} J^{k[j]}$).

Con ellas conocemos la forma de las matrices de rotación $D^{[j]}_{\lambda'\lambda}$ para rotaciones infinitesimales,

$$\hat{U}(\underbrace{\underset{\sim}{\mathbb{1}} - \tfrac{i}{2}\overset{\ll 1}{\omega_{lk}}\,\underset{\sim}{J}^{(lk)}}_{\equiv +i\vec{\theta}\cdot\underset{\sim}{\vec{J}}})\,|\bar{p}_R,\lambda\rangle = (\hat{\mathbb{1}} + i\,\vec{\theta}\cdot\hat{\vec{J}})\,|\bar{p}_R,\lambda\rangle$$

$$= \sum_{\lambda'} \underbrace{D^{[j]}_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{\mathbb{1}} + i\vec{\theta}\cdot\underset{\sim}{\vec{J}})}_{\equiv\, \delta_{\lambda',\lambda} + i\,\vec{\theta}\cdot\vec{J}^{[j]}_{\lambda'\lambda}}\,|\bar{p}_R,\lambda'\rangle$$

define eje y ángulo de rotación

aquí $\theta^i \ll 1$

e, iterando, podemos deducir las $D^{[j]}$'s para rotaciones finitas:

$$\boxed{D^{[j]}_{\lambda'\lambda}(\exp(i\vec{\theta}\cdot\underset{\sim}{\vec{J}})) = \left(\exp(i\vec{\theta}\cdot\vec{J}^{[j]})\right)_{\lambda'\lambda}}\,.$$

θ^i finito

En particular,

$$
\begin{aligned}
D^{[j]}_{\lambda'\lambda}\left({}^{(12)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta)\right) &= D^{[j]}_{\lambda'\lambda}\left(\exp(i\theta \underset{\sim}{J}^3)\right) \\
&= \left[\exp\left(i\theta\begin{pmatrix} j & & & & 0 \\ & j-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -j+1 & \\ 0 & & & & -j \end{pmatrix}\right)\right]_{\lambda'\lambda} \\
&= e^{i\theta\lambda}\,\delta_{\lambda\lambda'} ,
\end{aligned}
$$

así que

$$
\boxed{D^{[j]}\left({}^{(12)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta=2\pi)\right) = \pm \mathbb{1} \quad \text{si } \lambda \ (\text{y} \therefore j) \text{ es } \begin{matrix}\text{entero} \\ \text{semientero}\end{matrix}} .
$$

Es decir, las partículas con espín entero/semientero corresponden a reps no/sí proyectivas de $SO(3)$ (y $SO^{\uparrow}(3,1) \subset \text{Poincaré}(3,1)$), como habíamos prometido en la p. 58. Alternativamente, para todos los valores de j tenemos reps 'fieles' (<u>no</u> proyectivas) de los 'grupos cubrientes' de $SO(3)$ y $SO^{\uparrow}(3,1)$, que como dijimos antes son respectivamente $SU(2)$ y $SL(2,\mathbb{C})$.

Habíamos estudiado ya en el inciso i) el caso de la partícula 'sin espín', es decir, con $j=0$, que evidentemente corresponde a la rep trivial de $SO(3)$: $D^{[0]}(\underset{\sim}{W}) = 1 \quad \forall\, \underset{\sim}{W}$.

Las reps no triviales más útiles son:

- $\boxed{j=\frac{1}{2}}$ (matrices 2×2): $\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ $\quad J^{+[\frac{1}{2}]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sqrt{j(j+1)-\lambda(\lambda+1)}$ con $\lambda=-j=-\frac{1}{2}$

$$J^{1[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{2[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{3[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

i.e., $\boxed{\vec{J}^{[\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}}$ c/ $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$

matrices de Pauli

$$\Longrightarrow \left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = i\epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2} \quad ✓$$

Notar que $\vec{J}^{[\frac{1}{2}]}$ son, de hecho, los generadores que <u>definen</u> el álgebra de Lie su(2): se trata de matrices complejas 2×2 <u>hermitianas</u> y <u>sin traza</u>, que al exponenciarse dan lugar a matrices complejas 2×2 <u>unitarias</u> y con <u>determinante $=1$</u> $(\det(e^M) = e^{Tr(M)})$, es decir, elementos del grupo de Lie SU(2):

$$D^{[\frac{1}{2}]}(\exp(i\vec{\theta}\cdot\underset{\sim}{\vec{J}})) = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}\right), \text{ y en particular,}$$

$$\left.\begin{aligned}
D^{[\frac{1}{2}]}\left({}^{(12)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta)\right) &= \exp\left(\frac{i}{2}\theta\sigma^3\right) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \\
D^{[\frac{1}{2}]}\left({}^{(23)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta)\right) &= \exp\left(\frac{i}{2}\theta\sigma^1\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \\ i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\
D^{[\frac{1}{2}]}\left({}^{(31)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta)\right) &= \exp\left(\frac{i}{2}\theta\sigma^2\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \\ -\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \in SU(2)$$

• $\boxed{j=1}$ (matrices 3x3): $\lambda = 1, 0, -1$ ← $\sqrt{j(j+1)-\lambda(\lambda+1)}$ con $j=1, \lambda=0$

$$J^{3[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^{+[1]} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{-[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J^{1[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{2[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Hubiéramos esperado que estas matrices 3x3 coincidieran con (los subloques espaciales 3x3 de) los generadores de rotaciones $\underset{\sim}{J}^{(12)}, \underset{\sim}{J}^{(13)}, \underset{\sim}{J}^{(23)}$ ← rep vectorial que habíamos deducido ya en la p. 40. Y en efecto, es posible mostrar que las matrices $J^{i[1]}$ se convierten en las matrices $\underset{\sim}{J}^{(k\ell)}$ a través de un cierto cambio de base (ver Tarea 2).

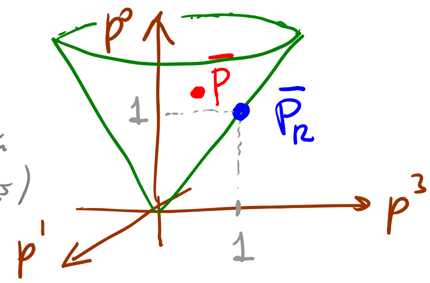
En cualquier caso, así como sucedió con las $J^{i[\frac{1}{2}]}$, vemos explícitamente que las $J^{i[1]}$ son matrices hermitianas, garantizando por tanto que la correspondiente irrep de Poincaré(3,1) es unitaria.

Lo mismo es cierto para todos los valores de j.

L8: 29/08/22 L7: 20/08/18

IIa) Partícula sin masa: $\{|p^\mu,\lambda\rangle\}$ con $p^2=0, p^0>0$ $(\Rightarrow p^0=|\vec{p}|)$

En este caso claramente no existe ningún marco de referencia donde la partícula esté en reposo, pero sí podemos repetir la construcción de Wigner, usando como vector de referencia a, p.ej., $p_R^\mu=(1,0,0,1)E_R$. ← escala arbitraria (unidades)



¿Cuál sería el grupito en este caso? Se trata de transformaciones de Lorentz $\underset{\sim}{W}$ tales que $W^\mu{}_\nu p_R^\nu = p_R^\mu$. Es más fácil pensar esto en su versión infinitesimal: queremos

$W^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ (con $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$) tales que

$(\delta^\mu_\nu+\omega^\mu{}_\nu)p_R^\nu = p_R^\mu + \omega^\mu{}_\nu p_R^\nu = p_R^\mu$, es decir,

$\omega^\mu{}_\nu p_R^\nu \propto \omega^\mu{}_0 + \omega^\mu{}_3 = 0$. ← columna 0 de $\underset{\sim}{\omega}$ = − columna 3 de $\underset{\sim}{\omega}$

La posibilidad más general es entonces

$$\underset{\sim}{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \theta & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\theta & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

← recordar $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$

índices ${}^\mu{}_\nu$

L7: 15/02/17

Recurriendo a nuestros resultados de la p. 40, podemos expresar esta $\underset{\sim}{\omega}$ como una combinación lineal de los $\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}$.

La transformación parametrizada por θ es claramente una rotación en el plano 1-2, generada por $\underset{\sim}{J}^{(12)} \equiv \underset{\sim}{J}^3$.

$p^\mu_R = (1,0,0,1)$

$\vec{p}_R$

Por otro lado, α_1 y α_2 parametrizan un empujón y una rotación <u>simultáneos</u>, con generadores

$$\underset{\sim}{J}^{(01)} + \underset{\sim}{J}^{(13)} \equiv \underset{\sim}{K}^1 - \underset{\sim}{J}^2 \quad y \quad \underset{\sim}{J}^{(02)} + \underset{\sim}{J}^{(23)} \equiv \underset{\sim}{K}^2 + \underset{\sim}{J}^1,$$

empujón a lo largo de x^1 — rotación alrededor de eje x^2

respectivamente. Si llamamos a estos generadores

$$\underset{\sim}{P}^1 \equiv \underset{\sim}{K}^1 - \underset{\sim}{J}^2 \quad y \quad \underset{\sim}{P}^2 \equiv \underset{\sim}{K}^2 + \underset{\sim}{J}^1 \implies \underset{\sim}{\omega} = \theta \underset{\sim}{J}^3 + \alpha_1 \underset{\sim}{P}^1 + \alpha_2 \underset{\sim}{P}^2,$$

podemos ver que satisfacen las relaciones de conmutación

p. 43 $\quad \eta^{00} = +1 \quad \eta^{33} = -1$

$$[\underset{\sim}{P}^1, \underset{\sim}{P}^2] = [\underset{\sim}{J}^{(01)}, \underset{\sim}{J}^{(02)}] + [\underset{\sim}{J}^{(13)}, \underset{\sim}{J}^{(23)}] = -i\underset{\sim}{J}^{(12)} + i\underset{\sim}{J}^{(12)} = 0,$$

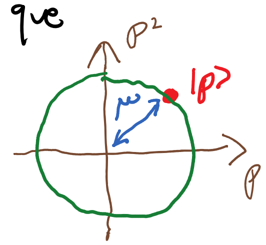
$$[\underset{\sim}{J}^3, \underset{\sim}{P}^1] = [\underset{\sim}{J}^{(12)}, J^{(01)}] + [\underset{\sim}{J}^{(12)}, \underset{\sim}{J}^{(13)}] = +i\underset{\sim}{J}^{(02)} + i\underset{\sim}{J}^{(23)} = i\underset{\sim}{P}^2,$$

$$[\underset{\sim}{J}^3, \underset{\sim}{P}^2] = [\underset{\sim}{J}^{(12)}, \underset{\sim}{J}^{(02)}] + [\underset{\sim}{J}^{(12)}, \underset{\sim}{J}^{(23)}] = -i\underset{\sim}{J}^{(01)} - i\underset{\sim}{J}^{(13)} = -i\underset{\sim}{P}^1,$$

que, como podemos ver, resultan ser idénticas a las relaciones de conmutación de $\hat{J}^3$, $\hat{P}^1$ y $\hat{P}^2$ (p. 48).

Concluimos entonces que el grupito asociado a una partícula sin masa, $SO^+(3,1)\big|_{(1,0,0,1)}$, es una copia de ('isomorfo' a) el grupo "de Poincaré" en 2 dimensiones espaciales, que denotaremos Poincaré(2,0). (Normalmente se le llama a este el "grupo ortogonal inhomogéneo en 2 dimensiones", $ISO(2)$, o el "grupo euclideano en 2 dim", $E(2)$.)

A través del truco de Wigner que aprendimos en el caso masivo, concluimos entonces que para construir una rep de Poincaré(3,1) con $m^2=0$, basta construir una rep del grupito Poincaré(2,0), cosa que resulta mucho más sencilla. El único Casimir de este grupito es $(\hat{P}^1)^2+(\hat{P}^2)^2$, así que las irreps que buscamos estarán etiquetadas por el eigenvalor correspondiente, que llamaremos μ^2. ← análogo a $j(j+1)$ Podemos trabajar con una base de eigenestados $\{|p\rangle\}$ ← λ de $\hat{P}^1$ y $\hat{P}^2$:



$$\hat{P}^a|p\rangle = p^a|p\rangle \quad (a=1,2), \text{ con } (p^1)^2+(p^2)^2=\mu^2 \quad (\Rightarrow \mu^2 \geq 0).$$

¡¡ Pero para $\mu^2>0$ esta rep tiene dimensión infinita !!

La única rep que se apega a nuestra definición de partícula, donde el parámetro λ que etiqueta a los distintos estados 'internos' de la partícula toma solo un número finito de valores, corresponde entonces a $m^2=0$.

En este caso, tenemos un solo estado, $|p^1=0, p^2=0\rangle$, que debe entonces ser un eigenestado del único generador restante, $\hat{J}^3$: $\hat{J}^3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$.

Desde esta perspectiva, λ podría ser un número real arbitrario, pero vimos antes que, por el hecho de que $SO(3)\subset SO^+(3,1)\subset \text{Poincaré}(3,1)$ es 'doblemente conexo', debemos tener en particular

$$\exp(i2\pi\hat{J}^3)|\lambda\rangle = e^{i2\pi\lambda}|\lambda\rangle = \pm|\lambda\rangle,$$

lo cual nos restringe a λ — entero / semientero.

Cada valor permitido, $\lambda=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm\frac{3}{2},\pm2,\ldots$ nos da una distinta irrep unidimensional del grupito (aunque todas estas reps comparten el mismo eigenvalor del Casimir $\hat{P}^2$: $m^2=0$).

útil

En resumen, por nuestra definición de partícula, estamos haciendo como si en el caso no masivo el grupito fuera solo $SO(2)\subset SO(3)$. (En $\mathbb{R}^{D-1,1}$, el grupito sería $SO(D-1)$ para $m^2>0$, $SO(D-2)$ para $m^2=0$.)

en lugar de $ISO(2)\equiv \text{Poincaré}(2,0)$

Para construir la deseada irrep de Poincaré(3,1) con $m^2=0$, nuestro punto de partida son entonces los estados $|\bar{p}_R, \lambda\rangle$, con $p_R^\mu = (1,0,0,1)E_R$ y una elección específica del valor (entero o semientero) de λ.

← etiqueta la rep, no el estado: $\hat{J}^3$ es Casimir de $SO(2)$

Para determinar σ^2, podemos notar que

$$\hat{\Sigma}_1 |\bar{p}_R, \lambda\rangle \overset{p.67}{=} \frac{1}{2}\epsilon_{1\nu\lambda\rho}\hat{J}^{\nu\lambda}\hat{P}^\rho |\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$= \left(\epsilon_{1230}\hat{J}^{23}\hat{P}^0 + \epsilon_{1023}\hat{J}^{02}\hat{P}^3\right)|\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$= E_R\left(-\hat{J}^{23} - \hat{J}^{02}\right)|\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

$$\overset{p.91}{=} -E_R\hat{P}^2 |\bar{p}_R, \lambda\rangle$$

componente 2, no $\hat{P}^a\hat{P}^a$

$= 0$ (porque todos los estados tienen $\mu=0 \Rightarrow p^a=0$),

no confundir con $p_2=0$

y de manera similar,

$$\hat{\Sigma}_2 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = +E_R\hat{P}^1 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = 0,$$

mientras que

$$\hat{\Sigma}_0 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \epsilon_{0123}\hat{J}^{12}\hat{P}^3 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = +E_R\lambda |\bar{p}_R, \lambda\rangle,$$

y $$\hat{\Sigma}_3 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \epsilon_{3120}\hat{J}^{12}\hat{P}^0 |\bar{p}_R, \lambda\rangle = -E_R\lambda |\bar{p}_R, \lambda\rangle.$$

En resumen, esto dice que

$$\hat{\Sigma}_{\mu\nu} |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda\, p_{R\mu} |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda \hat{P}_\mu |\bar{p}_R, \lambda\rangle,$$

de donde se sigue que, para todas estas reps,

$$\hat{\Sigma}_{\mu\nu} \hat{\Sigma}^{\mu\nu} |\bar{p}_R, \lambda\rangle = \lambda^2 \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu |\bar{p}_R, \lambda\rangle = 0, \text{ es decir, } \boxed{\sigma^2 = \lambda^2 p^2 = 0}.$$

cf. $\sigma^2 = -j(j+1)p^2$ para $p^2 = m^2 > 0$ (p.84)

(En cambio, para los estados $|\bar{p}_R, \rho\rangle$ en una rep con $(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2 = \mu^2 > 0$, hubiéramos tenido

$$\hat{\Sigma}^{\mu\nu}\hat{\Sigma}_{\mu\nu} |\bar{p}_R, \rho\rangle = [\cancel{(\hat{J}^3)^2} \underbrace{-(\hat{\rho}^1)^2 - (\hat{\rho}^2)^2 \cancel{-(\hat{J}^3)^2}] |\bar{p}_R, \rho\rangle}_{(-(\rho^1)^2 - (\rho^2)^2)|\bar{p}_R, \rho\rangle}$$

así que $\sigma^2 = -\mu^2 < 0$.)

Cualquier p^μ tal que $p^2 = 0$, $p^0 > 0$ puede obtenerse a partir de p_R^μ a través de una transformación de Lorentz (no única) $\underset{\sim}{L}(p, p_R)$, que para ser concretos podemos elegir como

igual que para $m^2 > 0$ (p.78); pero omitiendo primeras 2 rotaciones

$$\underset{\sim}{L}(p) \equiv \exp(i\varphi \underset{\sim}{J}^{(21)}) \exp(i\Theta \underset{\sim}{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \underset{\sim}{J}^{(30)}).$$

coords angulares de $\vec{p}$

$$\operatorname{senh}\alpha \equiv \gamma v = \frac{1}{2}\left(\frac{p^0}{E_R} - \frac{E_R}{p^0}\right)$$

$$\left(\Rightarrow \cosh\alpha \equiv \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{p^0}{E_R} + \frac{E_R}{p^0}\right)\right).$$

Usando esta conexión podemos definir como antes

$$\boxed{|\bar{p},\lambda\rangle \equiv \hat{U}(\underset{\sim}{L}(\bar{p}))|\bar{p}_R,\lambda\rangle},$$

y tendremos entonces

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda})|\bar{p},\lambda\rangle = \hat{U}(\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p}))\,\hat{U}\big(\underbrace{\underset{\sim}{L}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p})\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{L}(\bar{p})}_{\equiv \underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p})}\big)|\bar{p}_R,\lambda\rangle,$$

donde por construcción $\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p}) \in SO^+(3,1)\big|_{\bar{p}_R} = \text{Poincaré}(2,0)$,

es decir, $\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p}) = \exp[i\theta\underset{\sim}{J}^{(12)}]\exp[i\alpha_a \underset{\sim}{P}^a]$

para ciertos parámetros $\theta = \theta(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p})$, $\alpha_a = \alpha_a(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p})$,

lo cual (dado que $\hat{P}^a = 0$ en nuestra rep) conduce a

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda})|\bar{p},\lambda\rangle = \hat{U}(\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p}))\exp[i\theta(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p})\hat{J}^3]|\bar{p}_R,\lambda\rangle.$$

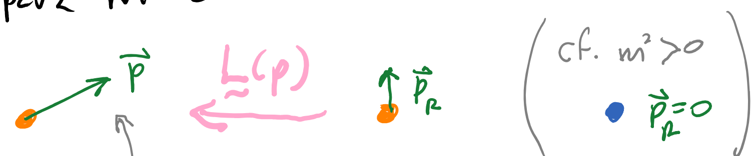
$$\boxed{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda})|\bar{p},\lambda\rangle = \underbrace{e^{i\lambda\theta(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p})}}_{\equiv D^{\{\lambda\}}(\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{p}))}|\underset{\sim}{\Lambda}\bar{p},\lambda\rangle}.$$

$\leftarrow$ 'matriz' 1×1

Independientemente de si la partícula es masiva o no, podemos notar que $|\bar{p},\lambda\rangle \equiv \hat{U}(\underset{\sim}{L}(\bar{p}))|\bar{p}_R,\lambda\rangle$ No es eigenestado (con eigenvalor λ) de $\hat{J}^3$, sino de $\hat{J}'^3 \equiv \hat{U}(\underset{\sim}{L}(\bar{p}))\hat{J}^3\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{L}(\bar{p}))$, que es el operador de momento angular NO en la dirección x^3, sino en la dirección x'^3 (es decir, el generador de rotaciones en el plano x'^1-x'^2) asociado al sistema inercial S' donde $p'^\mu \equiv \underset{\sim}{L}^{-1}(\bar{p})^\mu{}_\nu p^\nu$ es justamente el vector de referencia p_R^μ: donde la partícula <u>no masiva</u> se mueve en la dirección x'^3 y tiene energía $p'^0 = E_R$, o la partícula <u>masiva</u> está en reposo, $p'^0 = m$.

En otras palabras, para $m^2 = 0$

$$\hat{J}'^3 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \hat{\vec{J}}$$



momento angular a lo largo de esta dirección

(resultado que verificaremos explícitamente en la Tarea 2).

Vemos entonces que, para $m^2=0$, λ representa siempre la componente del <u>momento angular</u> en la dirección del movimiento de la partícula, cantidad física que se conoce como la helicidad de la partícula, y que a veces denotaremos h.

concepto que tiene sentido también para $m^2>0$

Según acabamos de ver, para $m^2=0$ la helicidad es invariante bajo el grupo de Lorentz <u>restringido</u> $SO^+(3,1)$, y es por ello que basta con considerar un valor de λ a la vez.

domingo, 09 de septiembre de 2007 08:43 p.m.

Pero la operación de paridad de hecho relaciona $\lambda \leftrightarrow -\lambda$.

Para entender por qué, recordemos primero que la paridad es

$$\underset{\sim}{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$ y su implementación como simetría

No confundir con $\hat{P}_\mu$

cuántica requiere la existencia de un operador $\hat{U}(\underset{\sim}{P}) \equiv \hat{P}$, tal que

$$\hat{P}\underbrace{\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{a})}_{\hat{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu} + i a_\mu \hat{P}^\mu + \ldots}\hat{P}^{-1} = \hat{U}(\underset{\sim}{P})\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},\bar{a})\hat{U}(\underset{\sim}{P}^{-1}) = \underbrace{\hat{U}(\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{P}^{-1}, \underset{\sim}{P}\bar{a})}_{\hat{1} - \frac{i}{2}(\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\omega}\underset{\sim}{P}^{-1})_{\lambda\rho}\hat{J}^{\lambda\rho} + i(\underset{\sim}{P}\bar{a})_\rho \hat{P}^\rho + \ldots}$$

o, en versión infinitesimal,

$$\hat{P}\, i\hat{J}^{\mu\nu}\hat{P}^{-1} = i P^\mu{}_\lambda P^\nu{}_\rho \hat{J}^{\lambda\rho},$$

$$\hat{P}\, i\hat{P}^\mu \hat{P}^{-1} = i P^\mu{}_\rho \hat{P}^\rho .$$

p.64

p.62

No cancelamos la i porque a priori NO es obvio si $\hat{P}$ es lineal/unitario o antilineal/antiunitario. p.49

La componente $\mu=0$ de esta última ecuación dice que

$\hat{P}\, i\hat{H} = i\hat{H}\hat{P}$. Si $\hat{P}$ fuera antilineal, esto diría que

Hamiltoniano

$-\hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}$, y entonces dado un estado $|\bar{p},\lambda\rangle$ con energía positiva ($\hat{H}|\bar{p},\lambda\rangle = p^0|\bar{p},\lambda\rangle$, con $p^0>0$), la operación de paridad nos daría un estado $\hat{P}|\bar{p},\lambda\rangle$ con energía negativa:

$$\hat{H}(\hat{P}|\bar{p},\lambda\rangle) = -\hat{P}\hat{H}|\bar{p},\lambda\rangle = -p^0(\hat{P}|\bar{p},\lambda\rangle). \quad \times$$

Necesitamos entonces que $\hat{P}$ sea lineal (y unitario).

L9: 26/08/22

Si en vez de la paridad $\underset{\sim}{P}$ consideramos a la inversión temporal $\underset{\sim}{T} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, a partir de la componente $\mu=0$ de la ecuación $\hat{T}\, i \hat{P}^\mu \hat{T}^{-1} = i\, T^\mu{}_\nu \hat{P}^\nu$ podemos

$T^0{}_0 = -1$

ver que, para conmutar con $\hat{H}$ y así preservar la restricción a energías positivas, $\hat{T}$ debe ser antilineal (y por tanto antiunitario), como habíamos prometido en la p. 50.

Usando la linealidad de $\hat{P}$ para cancelar las i's, tenemos

$$\hat{P}\hat{\vec{J}}\hat{P}^{-1} = +\hat{\vec{J}}\,, \quad \hat{P}\hat{\vec{K}}\hat{P}^{-1} = -\hat{\vec{K}}\,, \quad \hat{P}\hat{\vec{P}}\hat{P}^{-1} = -\hat{\vec{P}}\,,$$

rotaciones empujones

donde vemos en particular que $\hat{P}$ le cambia el signo al momento espacial pero deja al momento angular invariante, así que efectivamente invierte la helicidad $h = \lambda \to -\lambda$.

En una teoría invariante bajo paridad, por cada estado $|\bar{p},\lambda\rangle$ con $p^2=0$, $\lambda\neq 0$, necesariamente existirá otro con la helicidad opuesta, $|\bar{p},-\lambda\rangle$, y es natural considerar a ambos como a pesar de que no podemos con Poincaré pasar gradualmente de $|\lambda\rangle\rangle$ a $|-\lambda\rangle\rangle$

asociados a una misma partícula: es sólo incluyéndolos a los 2 que obtenemos una irrep del grupo de Lorentz completo $O(3,1)$. Este es el caso, p.ej., de la teoría de Maxwell, donde asociada al campo electromagnético encontramos una partícula no masiva, el fotón, con estados $|\bar{p},\lambda=+1\rangle$ y $|\bar{p},\lambda=-1\rangle$.

Aquí λ sí distingue estados en misma irrep

Las interacciones débiles, en cambio, NO son invariantes bajo paridad, y es por ello que el Modelo Estándar original pudo modelar al neutrino como una partícula no masiva y con helicidad $\lambda=-1/2$ solamente.

Es habitual también llamar a $|h|$ el "espín" de la partícula no masiva en cuestión. Pero, con base en lo que hemos visto,

L8: 22/08/18

debe quedar muy claro que una partícula no masiva en general NO puede entenderse simplemente como el límite $m^2 \to 0$ del caso masivo: mientras que la partícula con $m^2>0$ y espín j posee $2j+1$ estados internos, aquella con $m^2=0$ y espín j tiene (a lo más) 2.