variables en una integral fermiónica es

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_n = \int d\theta_1' \cdots d\theta_n' \; J \quad ,$$

donde el "Jacobiano" J es el inverso de lo que estamos acostumbrados,

$$J \equiv \det\left(\frac{\partial\theta_j'}{\partial\theta_k}\right) .$$

L5: 15/02/23

Ahora que ya entendemos lo que significa integrar sobre una o más variables anticonmutativas, podemos verificar también que, como prometimos en la p. 594, $\theta-\theta'$ efectivamente juega un papel completamente análogo a la delta de Dirac usual, $\delta(x-x')$:

$$\begin{aligned}\int d\theta\,(\theta-\theta')f(\theta) &= \int d\theta\,(\theta-\theta')(A+\theta B) \\ &= \int d\theta\,(\theta A-\theta' A+0-\theta'\theta B) \\ &= A+\theta' B \\ &= f(\theta') .\end{aligned}$$

✓

Notar que $\int d\theta\, e^{-\frac{1}{2}a\theta^2} = \int d\theta = 0$

Para uso futuro, podemos calcular la integral "gaussiana"

$$\int d\theta_1 d\theta_2\, e^{-\theta_1 a \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2 \,(1 - \theta_1 a \theta_2)$$

sin $\frac{1}{2}$

$$= a,$$

donde hemos supuesto que a es un número conmutativo.

De manera similar, dadas $2n$ variables de Grassmann θ_j y cualquier matriz $\underset{\sim}{A}$ $2n\times 2n$ que sea antisimétrica y conmutativa, es fácil ver que

con $1/2$, por contribución de A_{ij} y $A_{ji} = -A_{ij}$

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} \theta_i A_{ij} \theta_j\right)$$

número de transposiciones

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{P:(2n\cdots 1)\to(j_1\cdots j_{2n})} (-1)^P \underbrace{A_{j_1 j_2} A_{j_3 j_4} \cdots A_{j_{2n-1} j_{2n}}}_{n \text{ factores}}$$

permutaciones

$$\equiv (-1)^n \, \mathrm{Pf}(\underset{\sim}{A}),$$

donde en el último renglón hemos definido el '**Pfaffiano**' de la matriz $\underset{\sim}{A}$. P.ej., para $n=1$,

$$\operatorname{Pf} \underset{\sim}{A} = \operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[(-1)^0 \overset{-a}{A_{21}} + (-1)^1 \overset{a}{A_{12}}\right] = -a \,,$$

que efectivamente coincide con lo que obtuvimos arriba.

Es relativamente fácil comprobar que

$$\left(\operatorname{Pf}(\underset{\sim}{A})\right)^2 = \sum_{p:(1\cdots 2n)\to(j_1\cdots j_{2n})} (-1)^p \underbrace{A_{1j_1} A_{2j_2} \cdots A_{2nj_{2n}}}_{2n \text{ factores}}$$

$$= \det \underset{\sim}{A}$$

[ver, p.ej., Nakahara, "Geometry, Topology and Physics", pp. 394-395]. (En particular, para nuestro ejemplo con $n=1$,

$$\left(\operatorname{Pf}(\underset{\sim}{A})\right)^2 = (-a)^2 = \det\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} . \quad \checkmark \;)$$

Así que el resultado de la integral fermiónica gaussiana involucra a $\sqrt{\det \underset{\sim}{A}}$, igual que en el caso bosónico, pero <u>en el numerador</u> en lugar del denominador (y con la elección de signo especificada por el Pfaffiano).

Con un cambio de base, cualquier matriz antisimétrica $2n \times 2n$ se puede descomponer en la forma

$$\underset{\sim}{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\underset{\sim}{\mathcal{A}}^T \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underset{\sim}{A} = (\det \underset{\sim}{\mathcal{A}})^2,$$

donde $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ es entonces $n \times n$. Si denotamos

$$\theta_l = \Theta_l \quad , \quad \bar{\theta}_l \equiv \Theta_{n+l} \qquad \forall\ l = 1, \ldots, n$$

(donde, vale la pena enfatizar, NO estamos pidiendo que la barra se refiera al conjugado complejo), entonces en el exponente de la integral gaussiana aparece

$$\frac{1}{2}(\theta^T \ \ \bar{\theta}^T) \begin{pmatrix} 0 & -\underset{\sim}{\mathcal{A}}^T \\ \underset{\sim}{\mathcal{A}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\theta^T \underset{\sim}{\mathcal{A}}^T \bar{\theta} + \bar{\theta}^T \underset{\sim}{\mathcal{A}} \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l,k} \left(\underbrace{-\theta_l \mathcal{A}_{kl} \bar{\theta}_k}_{+\bar{\theta}_k \mathcal{A}_{kl} \theta_l} + \bar{\theta}_k \mathcal{A}_{kl} \theta_l\right)$$

$$= \bar{\theta}^T \underset{\sim}{A}\, \theta \,,$$

y nuestra fórmula dice por tanto que

$$\boxed{\begin{aligned}\int d\theta_1 \cdots d\theta_n\, d\bar{\theta}_1 \cdots d\bar{\theta}_n\, \exp\left(-\bar{\theta}^T \underset{\sim}{A}\, \theta\right) &= (-1)^n \underbrace{Pf(\underset{\sim}{A})}_{\pm\sqrt{\det \underset{\sim}{A}}} \\ &= \pm (-1)^n \det \underset{\sim}{A}\,.\end{aligned}}$$

Podemos también deducir este resultado directamente, ya que como vimos antes la integral da, salvo un signo,

$$\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{p:(1\cdots n)\to(j_1\cdots j_n) \\ p':(1\cdots n)\to(k_1\cdots k_n)}} (-1)^{p+p'} A_{j_1k_1} \cdots A_{j_nk_n} \,,$$

expresión que coincide con $\det \underset{\sim}{A}$ (nuevamente, salvo un posible signo).

Vemos que este resultado muestra que cualquier determinante se puede siempre reexpresar como una integral sobre variables fermiónicas. Como dijimos antes (p. 579), esto es justo lo que necesitamos para tomar en cuenta la determinante de Faddeev-Popov $\Delta_{FP}(A)$ en una teoría de norma no abeliana. Para ello se necesitarán 2 campos fermiónicos auxiliares $c(x)$, $b(x)$, conocidos como 'fantasmas' de Faddeev-Popov.

Para uso futuro, conviene también notar desde ahora que podemos igualmente hacer integrales "gaussianas" con inserciones utilizando el mismo truco que conocemos del caso bosónico. Por simplicidad, tomaremos como ejemplo el caso más sencillo, $n=1$.

Supongamos entonces que queremos calcular

$$I = \int d\theta_1\, d\theta_2\; \theta_1 \theta_2\; \underbrace{\exp\left(-\theta_1 a \theta_2\right)}_{1-\theta_1 a \theta_2} = -1 .$$

(Notar que hicieron falta no 1 sino 2 inserciones para tener un resultado no nulo.)

Podemos comprobar en primer lugar que, contrario a lo que pudiéramos suponer, igual que en el caso conmutativo sigue siendo cierto que

'fuentes' anticonmutativas

$$\underbrace{\theta_1\theta_2 e^{-\theta_1 a\theta_2}}_{\theta_1\theta_2(1-0)} = \underbrace{\frac{d}{d\eta_1}\frac{d}{d\eta_2}\underbrace{\left[e^{-\theta_1 a\theta_2+\eta_1\theta_1+\eta_2\theta_2}\right]}_{\substack{1-\theta_1 a\theta_2+\eta_1\theta_1+\eta_2\theta_2\\ +\frac{1}{2}2\eta_1\theta_1\eta_2\theta_2}}}_{0+0+0+0+\theta_1\theta_2}\Bigg|_{\eta_1=\eta_2=0}$$

caso particular $n=1$

(donde la instrucción final $\eta_1=\eta_2=0$ resultó innecesaria).

Usando esto, podemos escribir

$$I = \frac{d}{d\eta_1}\frac{d}{d\eta_2}\left[\int d\theta_1 d\theta_2\, e^{-\theta_1 a\theta_2+\eta_1\theta_1+\eta_2\theta_2}\right],$$

donde ahora nos gustaría "completar el cuadrado", es decir, lograr que la dependencia de las fuentes η_1, η_2 figure solo en términos independientes de θ_1, θ_2, que podrán sacarse entonces de la integral.

Sabiendo que

$$[\ \ ] = \int d\theta_1 d\theta_2 \underbrace{\left(1 - \theta_1 a \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2 + \eta_1 \theta_1 \eta_2 \theta_2\right)}^{e^{-\theta_1 a \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2}}$$

$$= +a + \eta_1 \eta_2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{a} \eta_1 \eta_2\right) \underbrace{\int d\theta_1 d\theta_2\, e^{-\theta_1 a \theta_2}}_{a}$$

$$= \exp\left(\eta_1 \frac{1}{a} \eta_2\right) \int d\theta_1 d\theta_2\, e^{-\theta_1 a \theta_2}$$

vemos que la factorización deseada es

$$\int d\theta_1 d\theta_2\, e^{-\theta_1 a \theta_2 + \eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2\, e^{\eta_1 \frac{1}{a} \eta_2}\, e^{-\theta_1 a \theta_2}.$$

↑ sale de la integral

Podemos verificar además que, igual que en el caso bosónico, el factor que sobra después de este paso donde "completamos el cuadrado" coincide con el exponente original $E(\theta_1, \theta_2)$ evaluado en el punto $(\theta_1^{ext}, \theta_2^{ext})$ donde se "extremiza":

$$\frac{d}{d\theta_1} E(\theta_1, \theta_2) = -a\theta_2 - \eta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2^{ext} = -\frac{1}{a} \eta_1 ,$$

$$\frac{d}{d\theta_2} E(\theta_1, \theta_2) = +a\theta_1 - \eta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1^{ext} = +\frac{1}{a} \eta_2 ,$$

de modo que

$$E(\theta_1^{ext}, \theta_2^{ext}) = \overbrace{-\left(+\frac{\eta_2}{a}\right) a\left(-\frac{\eta_1}{a}\right) + \eta_1\left(+\frac{\eta_2}{a}\right) + \eta_2\left(-\frac{\eta_1}{a}\right)}^{-\theta_1^{ext} a \theta_2^{ext} + \eta_1 \theta_1^{ext} + \eta_2 \theta_2^{ext}}$$

$$= \cancel{-\eta_1 \frac{1}{a} \eta_2} + \cancel{\frac{1}{a}\eta_1\eta_2} + \frac{1}{a}\eta_1\eta_2 \,, \quad \checkmark$$

justo como en el caso bosónico. Lo mismo se puede mostrar en presencia de más variables $(n>1)$.

Volviendo por fin a la discusión de los eigenestados de $\hat{\psi}_a$, notamos que usando esta nueva definición de integral podemos escribir una relación de completez análoga a $\hat{\mathbb{1}} = \int \prod_{a=1}^{L} dq_a \, |q\rangle\langle q|$:

$$\boxed{\hat{\mathbb{1}} = \int \left(\prod_{a=L}^{1} d\psi_a\right) |\psi\rangle\langle\psi|} \,.$$

Podemos verificar esta relación tomando el elemento de matriz más general

$$\underbrace{\langle\psi''|\hat{\mathbb{1}}|\psi'\rangle}_{\prod_{a=1}^{L}(\psi_a'-\psi_a'')} \stackrel{?}{=} \int \left(\prod_{a=L}^{1} d\psi_a\right) \underbrace{\langle\psi''|\psi\rangle\langle\psi|\psi'\rangle}_{\prod_{b=1}^{L}(\psi_b-\psi_b'')\prod_{c=1}^{L}(\psi_c'-\psi_c)}$$

p.594

y recordando que $\psi_b - \psi_b''$ juega un papel análogo a $\delta(x_b - x_b'')$, en el sentido de que

$$\int d\psi_b \, (\psi_b - \psi_b'') f(\psi_b) = f(\psi_b'') \qquad \text{p. 601} \quad ,$$

de modo que la expresión del lado derecho se reduce a

$$\prod_{c=1}^{L} (\psi_c' - \psi_c'') \quad .$$

De manera similar, es fácil mostrar que

$$\hat{\mathbb{1}} = (-i)^L \int \left(\prod_{a=1}^{L} d\chi_a \right) |\chi\rangle\langle\chi| \quad .$$

Juntando todos nuestros ingredientes, podemos finalmente proceder justo igual que en el caso bosónico (pp. 513-18) para obtener la integral de trayectoria fermiónica, ← Schrödinger

$$\langle \psi'; t' | \psi; t \rangle = \langle \psi' | \exp[-i\hat{H}(\hat{\psi}, \hat{\chi})(t'-t)] | \psi \rangle$$

↑ No es un estado físico

Heisenberg's

$$= \lim_{N\to\infty} \int d^L\psi_1 \cdots d^L\psi_{N-1} \frac{d^L\chi_0}{i^L} \cdots \frac{d^L\chi_{N-1}}{i^L}$$

$N = \frac{t'-t}{\Delta t}$

$$\cdot \exp\left[i \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n (\psi_{n+1} - \psi_n) - H_a(\psi_n, \chi_n) \Delta t \right]$$

¿orden antiestándar: todas las χ's a la izquierda de las ψ's (donde hemos tomado el orden antiestándar de $\hat{H}$ solo como ejemplo concreto), expresión que naturalmente abreviamos como

$$\boxed{\langle \psi';t'|\psi;t\rangle = \int_{\psi(t)=\psi}^{\psi(t')=\psi'} \mathcal{D}\psi(\tau)\,\mathcal{D}\chi(\tau)\exp\left[i\int_t^{t'} d\tau\left\{\chi(\tau)\dot{\psi}(\tau)-H(\psi(\tau),\chi(\tau))\right\}\right].}$$

Esta, de entrada, sería la versión Hamiltoniana de la integral funcional. Pero, en el caso fermiónico, el Lagrangiano típicamente es de primer orden en $\dot{\psi}_a$ (como sucede con $\mathcal{L}_{Dirac}$) y los momentos χ_a son por lo tanto variables adicionales, <u>independientes</u> de $\dot{\psi}_a$ (como vimos la p. 262, la definición del momento canónico es una <u>constricción</u>), de manera que $\chi\dot{\psi} - H(\psi,\chi)$ coincide directamente con el Lagrangiano.

Podemos mostrar también que, p.ej.,

$$\int_{\psi(t)=\psi}^{\psi(t')=\psi'} \mathcal{D}\psi(\tau)\,\mathcal{D}\chi(\tau)\,\psi_a(t'')\psi_b(t''')\exp\left[i\int_t^{t'} d\tau\left\{\chi\dot{\psi}-H\right\}\right]$$

$$= \langle \psi'; t' | T\{ \hat{\psi}_a(t'') \hat{\psi}_b(t''') \} | \psi; t \rangle ,$$

donde el orden temporal para operadores fermiónicos se define justo como vimos en la p. 281,

$$T\{\hat{\psi}_a(t'')\hat{\psi}_b(t''')\} = \begin{cases} +\hat{\psi}_a(t'')\hat{\psi}_b(t''') & \text{si } t'' > t''' \\ -\hat{\psi}_b(t''')\hat{\psi}_a(t'') & \text{si } t''' > t'' \end{cases} .$$

La generalización a campos es directa (necesitamos nuevamente discretizar el espacio además del tiempo), y podemos deducir una fórmula para funciones de correlación idéntica al caso bosónico:

$$\boxed{\langle \Omega | T\{\hat{O}_1(x_1)\cdots\hat{O}_N(x_N)\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int D\psi D\chi\, O_1(x_1)\cdots O_N(x_N)\, e^{iS}}{\int D\psi D\chi\, e^{iS}}}$$

proyecta sobre $|\Omega\rangle$

Consideremos en particular el caso del campo de Dirac, $\psi(x)$, que como sabemos tiene 4 componentes complejas

$\psi_a(x)$ $(a=1,2,3,4)$ que se mezclan entre sí bajo Lorentz según la representación espinorial. Cuando lo consideramos como variable de integración en una integral de trayectoria, $\psi_a(x)$ en cada x y para cada valor de a es un número anticonmutativo complejo independiente, y tenemos, p.ej.,

$$\boxed{\mathcal{D}\psi(x) \equiv \prod_{a,\vec{x}} \mathcal{D}\psi_a(t,\vec{x}) \equiv \prod_{a,\vec{x},t} d\psi_a(t,\vec{x})} .$$

Dado que

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\overbrace{\gamma^\mu\partial_\mu}^{\equiv \not{\partial}}\psi - m\bar{\psi}\psi$$
$$= \bar{\psi}\underbrace{(i\not{\partial}-m)}_{\equiv \Delta_x}\psi ,$$

tenemos $\chi(x) \equiv \Pi_\psi(x) = i\psi^\dagger(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^0$, variable que es independiente de $\psi(x)$, porque el campo es complejo. (Por otra parte, $\bar{\chi} \equiv \Pi_{\bar{\psi}} = 0$.)

L6: 20/02/23

Resulta conveniente considerar la integral funcional no sobre $\psi^\dagger(x)$, sino sobre $\bar{\Psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$.

Recordando que γ^0 es una matriz unitaria, tenemos $|\det \gamma^0| = 1 \Rightarrow \mathcal{D}\Psi^\dagger(x) = \mathcal{D}\bar{\Psi}(x)$, y podemos por tanto escribir

$$\langle \Omega | T\{\hat{O}_1(x_1) \cdots \hat{O}_N(x_N)\} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\, O_1(x_1) \cdots O_N(x_N)\, e^{iS_D}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\, e^{iS_D}}.$$

Igual que en el caso bosónico, nos conviene definir la funcional generatriz

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] \equiv \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp\Big[i\int d^4x\, \bar{\Psi} \underbrace{\Delta_x}_{i\not{\partial} - m} \Psi + \int d^4x \{\bar{\eta}(x)\Psi(x) - \bar{\Psi}(x)\eta(x)\}\Big]$$

donde $\bar{\eta}(x), \eta(x)$ son fuentes anticonmutativas y espinoriales complejas, con $\bar{\eta}(x) \equiv \eta^\dagger(x)\gamma^0$ (variable que es independiente de $\eta(x)$, precisamente por ser compleja). Justo como en el caso bosónico, nuestra fuente $\bar{\eta}(x)$ incluye un factor de i adicional con respecto a la convención usual de los libros de texto.

Hemos tomado además en cuenta que

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x')} \int d^4x \{-\bar{\Psi}(x)\eta(x)\} = +\bar{\Psi}(x').$$

LCII3: 06/02/19

Procediendo igual que en el caso bosónico (p.550), para evaluar esta funcional generatriz libre conviene cambiar la variable de integración $\psi(x) \longrightarrow \psi_f(x)$, donde

$$\psi(x) \equiv \underbrace{-\int d^4x'\,\Delta^{-1}(x,x')\,\eta(x')}_{\psi_{sol}(x) \text{ extremiza } S} + \underset{\uparrow \text{ fluctuación}}{\psi_f(x)}$$

$$\left(\Rightarrow \bar{\psi}(x) \equiv +\int d^4x'\,\bar{\eta}(x')\,\Delta^{-1}(x',x) + \bar{\psi}_f(x) \right),$$

usando $\Delta^{-1}(x,x')^{\dagger}\gamma^0 = -\gamma^0\Delta^{-1}(x',x)$

con $\Delta^{-1}(x,x')$ la función de Green tal que

$$\Delta_x \Delta^{-1}(x,x') = i\,\delta^{(4)}(x-x'), \quad \Rightarrow \Delta_x \psi_{sol} = -i\eta$$

es decir, el propagador de Feynman (p.282)

$$D_F(x-x') \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-x')}\, \underbrace{\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}}_{\equiv \tilde{D}_F(p) = \frac{i}{\not{p}-m}}.$$

$\not{p} = p_\mu\gamma^\mu$

$i\epsilon$: implementa orden temporal

Podemos entonces deducir (Tarea 9) que

$$Z_0[\bar{\eta},\eta] = \exp\Big\{ \underbrace{-\int d^4y\,d^4y'\,\bar{\eta}(y)\,\Delta^{-1}(y,y')\,\eta(y')}_{\equiv \bar{\eta}\cdot\Delta^{-1}\cdot\eta} \Big\} \underbrace{\int \mathcal{D}\bar{\psi}_f\,\mathcal{D}\psi_f\, e^{i\int d^4x\,\bar{\psi}_f\Delta_x\psi_f}}_{= Z_0[0,0] \,\propto\, \operatorname{Det}\Delta_x}$$

determinante funcional en el numerador

es decir, $Z_0[\bar{\eta},\eta] = \exp\{-\bar{\eta}\cdot\Delta^{-1}\cdot\eta\} Z_0[0,0]$.

A partir de este resultado podemos calcular por ejemplo la función de 2 puntos en la teoría libre,

$$\langle 0|T\{\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x')\}|0\rangle = \frac{1}{Z_0[0,0]} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(x')} Z_0[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0}$$

$$= \frac{1}{Z_0[0,0]} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(x')} \Big[-\int d^4y\, d^4y'\, \bar{\eta}(y)\Delta^{-1}(y,y')\eta(y')\Big]_{\bar{\eta}=\eta=0} Z_0[0,0]$$

notar que este instrucción sí es necesaria

$$= \Delta^{-1}(x,x')$$

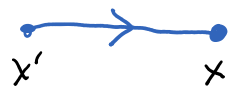
$$= D_F(x-x') \ .$$

Vale la pena recordar que, como hemos enfatizado ya en varias ocasiones, $D_F(x-x') = \langle 0|T\{\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x')\}|0\rangle \neq D_F(x'-x)$.

$\{\hat{a}^\dagger + \hat{b}$

Físicamente, el primero describe la propagación de un fermión de x' a x (o un antifermión de x a x'), mientras que el segundo describe la propagación de un fermión de x a x' (o un antifermión de x' a x).

Como antes, representaremos a $D_F(x-x')$ como una línea con una flecha en la dirección de propagación del fermión (ver p. 473).



Para la función de N puntos en la teoría libre, reproducimos por supuesto lo predicho por el teorema de Wick fermiónico: una suma sobre productos de las N/2 contracciones posibles, tomando en cuenta los signos debidos a la anticonmutación (p. 473).

Juntando nuestros resultados para los campos fermiónico y vectorial, podemos finalmente cuantizar por integral funcional a QED,

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\gamma^\mu D_\mu \equiv \gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)$$

(con $q = -e$ para el electrón, muón o tauón)

$$= \underbrace{\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell}}_{\equiv \mathcal{L}_{libre}} \underbrace{- qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{\equiv \mathcal{L}_{int}},$$

agregando el término fijador de norma $-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2$
y usando variables de Grassmann para $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$.
Obtenemos así las reglas de Feynman que ya conocemos
para los 2 propagadores libres y el vértice de 3 patas:
ver pp. 473, 476 y 477, o pp. 479-480 para un
resumen de las reglas de Feynman en QED apropiadas
para calcular no funciones de correlación sino
amplitudes de dispersión.

L44.5: 29/05/17 (+15 min)