

Faddeev-Popov para $Z[J]$, donde el término fuente $\int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x)$ será invariante de norma si $\partial_\mu J^\mu = 0$ (p. 311). Claro que de todos modos, No son invariantes $\langle A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{\mu_n}(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}$.
 $\swarrow \quad \nwarrow$ J arbitraria

El resultado neto de aplicar el procedimiento de Faddeev-Popov al campo de norma $U(1)$ ha sido entonces simplemente agregar el término fijador de norma, que, por no ser invariante de norma, hace que la integral no sea ya divergente.

Como vimos al hacer la cuantización canónica en la norma de Lorentz (pp. 355-370), en presencia de este término la ec. de mov.,

$$\partial^2 A^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu (\partial \cdot A) = \underbrace{\left[\eta^{\mu\lambda} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\lambda \right]}_{\equiv \left(\Delta_x^\xi\right)^{\mu\lambda}} A_\lambda(x) = 0,$$

sí es invertible.

La función de Green correspondiente, $\Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x')$, satisface

$$\left(\Delta_x^\xi\right)^{\mu\lambda} \Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x') = i \delta_\nu^\mu \delta^{(4)}(x - x'),$$

que en espacio de momentos se traduce en

$$\left[-p^2 \eta^{\mu\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\lambda \right] \tilde{\Delta}_{\lambda\nu}^{-1}(p) = i \delta_\nu^\mu.$$

La solución es

$$\tilde{\Delta}_{\lambda\nu}^{-1}(p) = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\lambda\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\lambda p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right],$$

y por tanto

$$\Delta_{\lambda\nu}^{-1}(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x')} \left(\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \right) \left[\eta_{\lambda\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\lambda p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right].$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\equiv \tilde{M}_{F\lambda\nu}(p)}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\equiv M_{F\lambda\nu}(x-x')}$$

Propagador de Feynman para campo de Maxwell

Por construcción, los resultados para cantidades físicas (p.ej., amplitudes de dispersión) serán independientes del valor que elijamos para el parámetro fijador de norma ξ .

Antes habíamos trabajado en la "norma de Feynman", $\xi=1$.
 Otra elección común es la "norma de Landau", $\xi=0$ ($\xi=\infty$).
 Otros valores pueden ayudar a simplificar ciertos cálculos
 (p.ej., la "norma de Yennie", $\xi=3$).

De nuevo, el resumen de lo aprendido es ξ constante arbitraria

$$\int \frac{DA_w(x)}{\text{Vol}(U(1))} e^{iS[A]} = N_{\xi} \int DA(x) \exp\left[i \int d^4x \left\{ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 \right\}\right].$$

constante de normalización \uparrow incluye a Δ_{FP} , que en el caso abeliano es una constante

término fijador de norma

Consideremos ahora el caso de un campo fermiónico $\psi(x)$, donde los operadores satisfacen relaciones de anticonmutación.

En notación apropiada para un número finito de grados de libertad, en lugar de $[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\delta_{ab}$, $[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 = [\hat{p}_a, \hat{p}_b]$ tendremos entonces

$$\{\hat{\psi}_a, \hat{\chi}_b\} = i\delta_{ab}, \quad \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} = 0 = \{\hat{\chi}_a, \hat{\chi}_b\} \quad a, b = 1, \dots, L$$

donde $\hat{\chi}_a$ denota el momento canónicamente conjugado a $\hat{\psi}_a$ —p.ej., $\hat{\chi}_a = i\hat{\psi}_a^\dagger$ para el campo de Dirac

(salvo que en el caso de campos, evidentemente $a \rightarrow (a, \vec{x})$ y $\delta_{ab} \rightarrow \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$).

Podemos notar que $\hat{\psi}_a$ y $-i\hat{\chi}_b$ satisfacen las relaciones de

anticonmutación apropiadas para un par de operadores de creación y aniquilación fermiónicos, $\{\hat{a}_a, \hat{a}_b^\dagger\} = \delta_{ab}$,
 $\{\hat{a}_a, \hat{a}_b\} = 0 = \{\hat{a}_a^\dagger, \hat{a}_b^\dagger\}$.

Debido que $\hat{\Psi}_a \hat{\Psi}_a = 0$, existe un estado $|0\rangle$ tal que
 $\hat{\Psi}_a |0\rangle = 0 \quad \forall a$ (análogo a $\hat{a}_a |0\rangle = 0$),

a partir del cual podemos construir una base para el "espacio de Fock" correspondiente,

$$|a_1, a_2, \dots, a_n\rangle \equiv (-i\hat{\chi}_{a_1})(-i\hat{\chi}_{a_2}) \dots (-i\hat{\chi}_{a_n}) |0\rangle$$

equivale a $1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots$ con los 1 en el lugar a_1, a_2, \dots

con $n=0, \dots, L$, $a_j \neq a_k \quad \forall 1 \leq j, k \leq n \quad j \neq k$

(base análoga a $\hat{a}_a^\dagger \dots \hat{a}_a^\dagger |0\rangle$). Aprendemos entonces

que el espacio de Hilbert de nuestro sistema fermiónico es 2^L -dimensional, muy diferente al caso bosónico $\{|q\rangle\}$.
 $\uparrow \text{dim} = \infty$

En el caso bosónico, para obtener la integral funcional utilizamos bases $\{|q\rangle\}$ y $\{|p\rangle\}$ de autoestados de \hat{f}_a y \hat{p}_a , respectivamente, así que necesitamos las

bases análogas aquí, (cf. $\hat{q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle$, $\hat{p}_a |p\rangle = p_a |p\rangle$)
 $\hat{\psi}_a |\psi\rangle = \psi_a |\psi\rangle$, $\hat{\chi}_a |\chi\rangle = \chi_a |\chi\rangle$.

Pero notando que $0 = \{\hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b\} |\psi\rangle = (\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a) |\psi\rangle$,

aprendemos que los eigenvalores ψ_a (y, de manera similar, los χ_a) NO pueden ser números ordinarios,

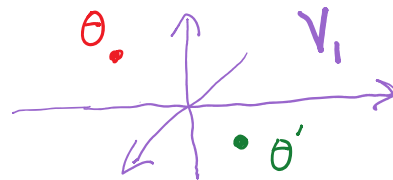
puesto que anticomutan. Lo que hacemos entonces

es inventar nuevos números. Consideramos a los ψ_a 's y

χ_a 's como elementos de un espacio vectorial V_1

(real o complejo) de dimensión $D \geq 2L$. ↑ para que podamos sumar o reescribirlos

Así que $V_1 \cong \mathbb{R}^D$ ó \mathbb{C}^D .



(Eventualmente necesitaremos

$D \geq 2LN \rightarrow \infty$ para la integral funcional, donde $N \equiv \frac{t'-t}{\Delta t}$ es

igual que antes el número de subintervalos en la discreti-

zación de $\int \mathcal{D}\psi(t) \mathcal{D}\chi(t)$). Y definimos formalmente un producto

bilineal y asociativo, conocido como 'producto exterior', tal que

$$\theta \theta' = -\theta' \theta \quad \forall \theta, \theta' \in V_1 \quad (\Rightarrow \theta^2 = 0 \quad \forall \theta \in V_1).$$

L#1: 28/01/19 (-90 min por repaso I)

Podemos notar que los resultados de este producto

$$(\theta_1 \theta_2)(\theta_3 \theta_4) = (\theta_3 \theta_4)(\theta_1 \theta_2) \quad \text{por asociatividad del producto}$$

conmutan entre sí, y forman parte de un nuevo espacio vectorial, V_2 , que tiene dimensión $\binom{D}{2} \equiv \frac{D!}{2!(D-2)!}$:

si e_j con $j=1, \dots, D$ es una base para V_1 , entonces $e_j e_k$ con $1 \leq j < k \leq D$ es una base para V_2 .

De manera similar, los productos triples $\theta \theta' \theta''$ anticommutan y pertenecen a un espacio vectorial V_3 de dimensión $\binom{D}{3}$,

los productos cuádruples a V_4 de dimensión $\binom{D}{4}$,

... , y los productos D -tuples a V_D de dimensión $\binom{D}{D} = 1$.

Para obtener un espacio vectorial cerrado bajo este producto y un elemento identidad, consideramos

también a $V_0 \equiv \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} de dimensión $\binom{D}{0} = 1$,

y formamos la suma directa

$$A_D \equiv V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_D,$$

que tiene dimensión

$$\binom{D}{0} + \binom{D}{1} + \binom{D}{2} + \dots + \binom{D}{D} = 2^D$$

y se conoce como álgebra de Grassman (o álgebra exterior).

24:13/02/23

Para entender esta estructura de forma más concreta, tomemos como ejemplo el caso $D=3$, donde V_0, V_1, V_2, V_3 tienen respectivamente dimensión $1, 3, 3, 1$.

Si e_1, e_2, e_3 constituyen una base para V_1 , entonces $(L=1)$ $e_{12} \equiv e_1 e_2$, $e_{13} \equiv e_1 e_3$, $e_{23} \equiv e_2 e_3$ son una base para V_2 , y $e_{123} \equiv e_1 e_2 e_3$ es una base para V_3 .

Cualquier elemento $\theta \in V_1$ se puede descomponer en términos de esta base, $\theta = \sum_j \alpha_j e_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , y puede por tanto representarse simplemente

$$\text{como } \theta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Similarmente, podemos escribir $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \in V_2$ y $(\gamma_1) \in V_3$.

Los elementos de p.ej., la suma directa $V_2 \oplus V_3$ son por definición del tipo $\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \beta_3 e_{23} + \gamma_1 e_{123}$, es decir, para sumar elementos de V_2 y V_3 promovemos

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

y al sumar obtenemos entonces

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} .$$

Aplicando esta misma idea a la suma total, vemos que el álgebra de Grassmann en cuestión,

$$\Lambda_3 \equiv V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

es un espacio vectorial 8-dimensional ($2^3=8$) constituido por elementos

$$z + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \beta_3 e_{23} + \gamma_1 e_{123} ,$$

que (con esta elección de base) pueden representarse

en la forma

$$\begin{pmatrix} z \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

← este es un punto
en \mathbb{R}^8 ó \mathbb{C}^8


y que tienen un producto entre sí, definido a partir

$$\text{de } e_j e_k = -e_k e_j .$$

(El ejemplo más conocido de un álgebra de Grassmann es el conjunto de formas diferenciales sobre una variedad D -dimensional, $\omega_{(p)} \equiv \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ con $p=0, 1, \dots, D$, donde \wedge denota al "producto cunã" o "producto exterior" y $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ es un tensor de rango $(0, p)$ totalmente antisimétrico.)

Llamamos a los elementos básicos $\theta \in V_1$

Variables de Grassmann o números anticomutativos

— y hay que tener claro que son tan 'números' como los números complejos $\mathbb{C} \equiv \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ 

(cf. $A_1 \equiv \{x+ey \mid x, y \in \mathbb{R}, e^2 = 0\}$).

Más en general, los elementos de V_{2n} y V_{2n+1} se conocen como variables de Grassmann 'par' e 'impar', respectivamente.

Adoptaremos además la convención natural

$$\{\theta, \hat{\psi}_a\} = 0 = \{\theta, \hat{\chi}_a\} \quad \forall a.$$

Usando estos ingredientes, podemos definir entonces

$$|\psi\rangle \equiv \exp\left(-i \sum_{a=1}^L \hat{\chi}_a \psi_a\right) |0\rangle \quad \leftarrow \{\hat{\chi}_a, \psi_b\} = 0$$

(análogo al estado coherente $\exp(c \hat{a}^\dagger) |0\rangle$), es decir,

$$|\psi\rangle = \prod_{a=1}^L \exp(-i \hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

$$= \prod_{a=1}^L (1 - i \hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle$$

la serie del exponencial se trunca porque $\psi_a \psi_a = 0$ (y $\hat{\chi}_a \hat{\chi}_a = 0$)
sin suma

$$= (1 - \underbrace{\psi_1(-i \hat{\chi}_1)}_{\text{análogo a } \hat{a}^\dagger}) (1 - \psi_2(-i \hat{\chi}_2)) \dots (1 - \psi_L(-i \hat{\chi}_L)) |0\rangle$$

$$= |0\rangle - \psi_1(-i \hat{\chi}_1) |0\rangle - \psi_2(-i \hat{\chi}_2) |0\rangle - \dots - \psi_L(-i \hat{\chi}_L) |0\rangle$$

$$- \psi_1 \psi_2 (-i \hat{\chi}_1) (-i \hat{\chi}_2) |0\rangle - \dots - \psi_{L-1} \psi_L (-i \hat{\chi}_{L-1}) (-i \hat{\chi}_L) |0\rangle$$

+ productos triples + cuádruples - quíntuplos - ...

$$+ (-1)^{\lfloor \frac{L+1}{2} \rfloor} \psi_1 \psi_2 \dots \psi_L (-i \hat{\chi}_1) (-i \hat{\chi}_2) \dots (-i \hat{\chi}_L) |0\rangle,$$

que expresado en términos de nuestra base original (p. 585) es

$$|\psi\rangle = |0\rangle - \sum_{a=1}^L \psi_a |a\rangle - \sum_{a_1 < a_2} \psi_{a_1} \psi_{a_2} |a_1, a_2\rangle + \dots \pm \psi_1 \dots \psi_L |1, \dots, L\rangle.$$

Podemos notar aquí que $|\psi\rangle$ de hecho no forma parte del mismo espacio de Hilbert, sino de un espacio extendido

en lugar de solo $V_0 = \mathbb{C}$

donde permitimos coeficientes en el álgebra de Grassmann.

Esta diferencia es necesaria para nuestros propósitos.

L43: 26/05/17

Podemos verificar que $|\psi\rangle$ es un eigenestado de los operadores $\hat{\psi}_a$:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_b |\psi\rangle &= \hat{\psi}_b \left(\prod_{a \neq b} \exp(-i\hat{\chi}_a \psi_a) \right) |0\rangle \\ &= \left(\hat{\psi}_b - i\hat{\psi}_b \hat{\chi}_b \psi_b \right) \prod_{a \neq b} \exp(-i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \\ &\stackrel{\text{análisis}}{=} \underbrace{\{\hat{\psi}_b, -i\hat{\chi}_b\}}_{= \delta_{bb} = 1} \prod_{a \neq b} \exp(-i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \quad \text{p. 584} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \psi_b \prod_{a \neq b} \exp(-i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \\ &= \psi_b \exp(-i\hat{\chi}_b \psi_b) \prod_{a \neq b} \exp(-i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \\ &= \psi_b \prod_a \exp(-i\hat{\chi}_a \psi_a) |0\rangle \\ &= \psi_b |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Si definimos además al bra $\langle 0|$ a través de

$\langle 0 | \hat{\chi}_a = 0 \quad \forall a$ (análogo a $\langle 0 | \hat{a}_a^\dagger = 0$),

normalizada de tal manera que $\langle 0 | 0 \rangle = 1$,

podemos construir análogamente $\leftarrow +i \sum_a \hat{\chi}_a \psi_a$

$$\langle \psi | \equiv \langle 0 | \left(\prod_{a=1}^L \hat{\psi}_a \right) \exp \left(-i \sum_a \psi_a \hat{\chi}_a \right)$$

$$= \langle 0 | \prod_a \left[\hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right],$$

que tiene la propiedad

$$\langle \psi | \hat{\psi}_b = \langle 0 | \left(\prod_{a \neq b} \left[\hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right] \right) \overset{\pm 1}{s_b} \underbrace{\hat{\psi}_b (1 - i \psi_b \hat{\chi}_b) \hat{\psi}_b}_{\hat{\psi}_b (\hat{\psi}_b - i \psi_b \hat{\chi}_b \hat{\psi}_b)}$$

$$= \langle 0 | \left(\prod_{a \neq b} \left[\hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right] \right) s_b \underbrace{\hat{\psi}_b (1 - i \psi_b \hat{\chi}_b) \psi_b}_{\hat{\psi}_b \psi_b}$$

$$= \langle 0 | \prod_a \left[\hat{\psi}_a (1 - i \psi_a \hat{\chi}_a) \right] \psi_b$$

$$= \langle \psi | \psi_b. \quad \checkmark$$

La relación análoga a $\langle q' | q \rangle = \delta^{(L)}(q'_a - q_a)$ es entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi' | \psi \rangle &= \langle 0 | \left(\prod_{a=1}^L \hat{\Psi}_a \right) \exp \left[i \sum_a \hat{\chi}_a (\psi'_a - \psi_a) \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_a \left[\hat{\Psi}_a + i \hat{\Psi}_a \hat{\chi}_a (\psi'_a - \psi_a) \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \prod_a \left[0 + i \underbrace{\{ \hat{\Psi}_a, \hat{\chi}_a \}}_i (\psi'_a - \psi_a) \right] | 0 \rangle \\ &= \prod_{a=1}^L (\psi_a - \psi'_a), \end{aligned}$$

así que este producto de algún modo es análogo a la delta de Dirac. Más adelante veremos por qué.

De manera similar, podemos definir autoestados de $\hat{\chi}_a$:

$$|\chi\rangle \equiv \exp \left(-i \sum_a \hat{\Psi}_a \chi_a \right) \prod_{a=L}^1 (-i \hat{\chi}_a) | 0 \rangle,$$

$$\langle \chi | \equiv \langle 0 | \exp \left(-i \sum_a \chi_a \hat{\Psi}_a \right),$$

que satisfacen

$$\hat{\chi}_b |\chi\rangle = \chi_b |\chi\rangle, \quad \langle \chi | \hat{\chi}_b = \langle \chi | \chi_b,$$

$$\langle \chi' | \chi \rangle = i^L \prod_{a=L}^1 (\chi_a - \chi'_a), \quad \sim \text{delta de Dirac}$$

$$\langle \chi | \psi \rangle = \exp\left(-i \sum_a \chi_a \psi_a\right), \quad \neq 1 - i \sum_a \chi_a \psi_a$$

ojo:

porque
 $(\sum_a \chi_a \psi_a)^2 \neq 0$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \exp\left(+i \sum_a \chi_a \psi_a\right).$$

Podemos notar que estas 2 últimas expresiones son análogas al traslapo $\langle q | p \rangle = \exp(i \sum_a q_a p_a)$.

Como último ingrediente para formular la integral de trayectoria para un campo fermiónico, nos falta definir una noción de integración, análoga a la integral bosónica $\int_{-\infty}^{\infty} dq f(q)$.

Es decir, necesitamos un mapeo $A_b \rightarrow A_D$ que posea las mismas propiedades básicas que la integral usual: linealidad, invariancia bajo el corrimiento de la variable de integración ($q \rightarrow q + c$), y el hecho de que la integral de

una derivada total es igual a cero (lo cual nos da la posibilidad de integrar por partes).

En el caso fermiónico, debido a que θ es 'nilpotente' ($\theta^2 = 0$), la función más general de UNA variable de Grassmann es

$$f(\theta) = A + \theta B.$$

En esta expresión, A y B podrían ser números ordinarios o anticommutativos, por lo que debemos recordar que $\theta B = \pm B\theta$ si B es ^{par} impar.

La noción natural de 'derivada' es

$$\frac{d}{d\theta} 1 = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \theta = 1 \Rightarrow \frac{df(\theta)}{d\theta} = B.$$

↖ objeto impar (mapa $V_1 \rightarrow V_0$)

Esta es evidentemente una copia de las reglas usuales para diferenciar con respecto a variables conmutativas, pero es importante notar que aquí No hemos interpretado a $\frac{d}{d\theta}$ como una operación asociada a un cambio infinitesimal en la

variable Θ . Ni podríamos hacerlo, puesto que el producto en A no es invertible, de modo que no podemos definir el concepto de dividir entre un número anticommutativo.

Por la condición de nilpotencia $\int d\Theta^2 = 0$, no existe un inverso de esta derivada, lo que hubiera sido el análogo de la integral indefinida.

Pero lo que nosotros necesitamos es un análogo fermiónico de la integral definida $\int_a^b dq f(q)$, que implemente todas las propiedades mencionadas. Estos requisitos en realidad no nos dejan con mucha opción. Dado que $\int d\Theta$ será un objeto anticommutativo, tenemos

$$\int d\Theta : V_0 \rightarrow V_1, \quad \int d\Theta : V_1 \rightarrow V_0.$$

Por linealidad, nos basta con saber cómo "integrar" a 1 y a Θ . Pero $1 = \frac{d}{d\Theta} \Theta$ es una

"derivada total", así que debe integrar a cero.

Haciendo una elección de la normalización de $\int d\theta$,
tenemos entonces la integral de Berezin

$$\boxed{\int d\theta 1 = 0, \int d\theta \theta = 1} \Rightarrow \int d\theta f(\theta) = B. \quad \underbrace{A+\theta B}$$

Es decir, nuestra noción de integral no tiene nada que ver con una suma, ¡sino que coincide con la derivada, $\int d\theta \equiv \frac{d}{d\theta}$!

Podemos notar que con esta definición se logra también tener un resultado que no cambia ante el corrimiento de la variable de integración:

$$\int d\theta_1 (\theta_1 + \theta_2) = 1 = \int d\theta' \theta' \quad \text{con } \theta' \equiv \theta_1 + \theta_2.$$

\uparrow independiente de θ_1

Para funciones de más de una variable anticomutativa, la forma más general es

$$f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_0 + \sum_{j=1}^N \theta_j f_j + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{jk} \quad \begin{array}{l} \text{totalmente} \\ \text{antisimétricos} \end{array}$$

$$+ \sum_{j < k < l} \theta_j \theta_k \theta_l f_{jkl} + \dots + \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N f_{12 \dots N}$$

(la cual se puede pensar como una "serie de Taylor", que termina debido a la nilpotencia de las θ_j).

En este caso, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{j_1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{j_2}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_{j_{n-1}}} \frac{\partial}{\partial \theta_{j_n}} \theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_2} \theta_{j_1} = 1 ,$$

y para otros órdenes debemos tomar en cuenta que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0 \quad \forall i, j \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = 0 \quad \forall i \neq j .$$

Sabiendo que la integral fermiónica es lo mismo que la derivada, deducimos entonces que

$$\int d\theta_{j_1} \dots d\theta_{j_n} \theta_{j_n} \dots \theta_{j_1} = 1 ,$$

$$\{d\theta_j, d\theta_i\} = 0 \quad \forall i, j ,$$

$$\{d\theta_j, \theta_i\} = 0 \quad \forall j \neq i ,$$

de donde podemos inferir el resultado para la integral múltiple más general posible ,

$$\begin{aligned}
& \int d\theta_{j_1} \cdots d\theta_{j_n} f(\theta_1, \dots, \theta_N) \\
&= \int d\theta_{j_1} \cdots d\theta_{j_n} \left[f_0 + \sum_j \theta_j f_j + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{jk} + \dots \right] \\
&= f_{j_n j_{n-1} \dots j_1} + \sum_j \theta_j f_{j_n j_{n-1} \dots j_1 j} \\
&\quad + \sum_{j < k} \theta_j \theta_k f_{j_n j_{n-1} \dots j_1 j k} + \dots
\end{aligned}$$

↙ coeficiente de $\theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_1}$
↘ coeficiente de $\theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_1} \theta_j$
↙ coeficiente de $\theta_{j_n} \theta_{j_{n-1}} \dots \theta_{j_1} \theta_j \theta_k$

En particular,

$$\int d\theta_N \cdots d\theta_2 d\theta_1 f(\theta_1, \dots, \theta_N) = f_{12 \dots N}$$

así que la integral de Berezin puede ser vista simplemente como una herramienta para extraer el coeficiente del término más alto en la "serie de Taylor" de f .

[II2:30/01/19]

Notar que ↙ porque $\frac{d}{d\theta'} \theta' = 1$ con $\theta' = \lambda \theta$

$$\int d(\lambda \theta) \equiv \int_{\lambda \in \mathbb{K}} d(\lambda \theta) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\theta} = \frac{1}{\lambda} \int d\theta$$

y, más en general, la regla para el cambio de