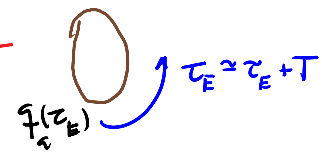
$$Z(\beta) \equiv \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\hat{H}}\right] = \int d^L q \, \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle ,$$

con temperatura inversa $\beta = T$. ← intervalo temporal (no temperatura)

Aprendemos así que una integral funcional donde el tiempo euclideano forma un círculo con periodo T

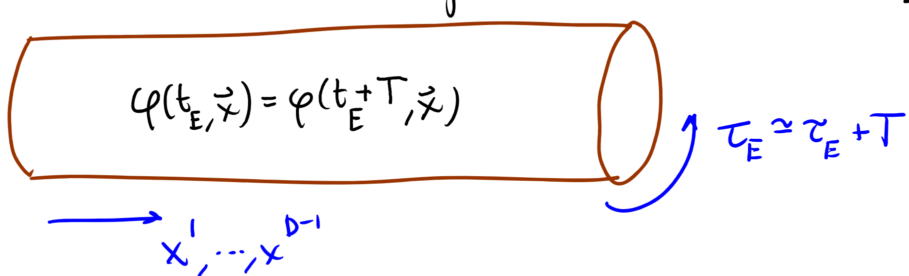


y con condiciones de frontera periódicas, equivale a la función de partición de un sistema en $D-1$ dimensiones espaciales, con temperatura $1/T$:

$$\boxed{Z(\beta) = N \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q(\tau) \, \exp\left[-S_E[q(\tau); 0, \beta]\right]} ,$$

relación que resulta útil en varios contextos.

Adelantándonos al caso de campos, donde $q_a(t) \to \varphi_{\vec{x}}(t)$, estaríamos hablando de la integral funcional sobre un cilindro,

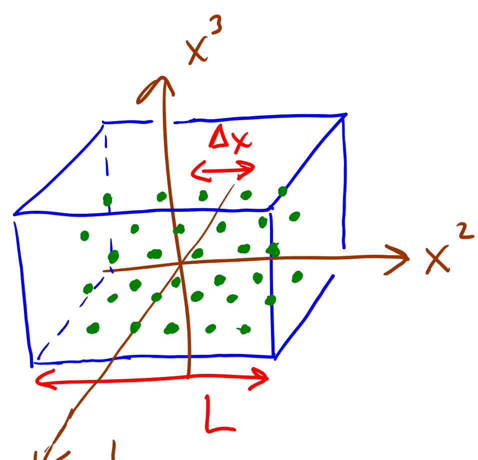


Podemos notar que el límite $T \to \infty$ corresponde al límite

límite de $\overbrace{\text{temperatura cero}}^{\beta\to\infty}$, donde $\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}\cdots) \to \langle\Omega|\cdots|\Omega\rangle$.

Todo lo que hemos dicho se puede generalizar de manera muy directa al caso de un sistema de campos $\varphi_l(\vec{x},t)$. Estrictamente hablando, para ello primero tenemos que discretizar el espacio, de manera análoga a como discretizamos ya al tiempo, y acotar nuestro sistema poniéndolo en una caja de volumen grande pero finito V, para obtener nuevamente un sistema con un número finito de grados de libertad.

Podemos, p.ej., escoger una retícula cúbica con espaciamiento Δx y lado de longitud L.



Si definimos $\vec{x}_{\vec{n}} \equiv \vec{n}\,\Delta x$, con $\vec{n}\in\mathbb{Z}^3$, entonces nuestras variables dinámicas serán el conjunto discreto

$$\varphi_{\vec{n}}(t) \equiv \varphi(t,\vec{x}_n)\,. \qquad (\leftrightarrow q_a(t))$$

lunes, 18 de febrero de 2008 09:51 p.m.

Siguiendo los mismos pasos que antes [ver, p.ej., Greiner, p.368, Ej. 12.1], podemos entonces formular el propagador en términos de una integral de trayectoria Hamiltoniana,

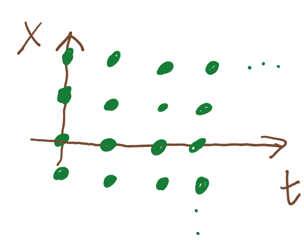
$$\boxed{\langle\varphi'(\vec x);t'|\varphi(\vec x);t\rangle = \int_{\varphi(t,\vec x)=\varphi(\vec x)\ \forall\vec x}^{\varphi(t',\vec x)=\varphi'(\vec x)\ \forall\vec x} \mathcal{D}\varphi(t,\vec x)\,\mathcal{D}\Pi(t,\vec x)\exp\left[i\int dt\,d^3x\left\{\Pi\dot\varphi-\mathcal{H}(\varphi,\vec\nabla\varphi,\Pi)\right\}\right]}$$

← análogo a $|q_a;t\rangle$

donde $|\varphi(\vec x);t\rangle$ denota un eigenestado del operador de campo en el cuadro de Heisenberg, $\hat\varphi(t,\vec x)|\varphi(\vec x);t\rangle=\varphi(\vec x)|\varphi(\vec x);t\rangle$,

$\Pi(t,\vec x)$ es una variable de integración funcional independiente de $\varphi(t,\vec x)$, y la medida se define a través de, p.ej.

$$\mathcal{D}\varphi(t,\vec x)\equiv\lim_{\Delta x\to0}\underbrace{\prod_{\vec n}\mathcal{D}\overset{\swarrow\varphi(t,\vec x_n)}{\varphi_{\vec n}(t)}}_{\text{cf. }\prod_a\mathcal{D}q_a(t)=\prod_a\left(\prod_m dq_{am}\right)}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta t\to0}}\prod_{\vec n,m}d\varphi(t_m,\vec x_n)\,.$$



Por supuesto, $\mathcal{H}$ es la densidad Hamiltoniana y

$$\partial_i\varphi(t,\vec x)\equiv\lim_{\Delta x\to0}\left[\frac{\varphi(\vec x+\Delta x\,\overset{\swarrow\text{vector unitario en dirección }x^i}{\vec u_i})-\varphi(\vec x)}{\Delta x}\right].$$

L43.5: 23/11/18

Si $\mathcal{H}(\varphi, \vec{\nabla}\varphi, \pi)$ es cuadrático en π y el coeficiente de π^2 es <u>independiente</u> de φ y $\vec{\nabla}\varphi$, tenemos también la versión lagrangiana

$$\boxed{\langle \varphi'(\vec{x}), t' | \varphi(\vec{x}), t \rangle = \mathcal{N} \int_{\varphi(t,\vec{x}) = \varphi(\vec{x})\ \forall \vec{x}}^{\varphi(t',\vec{x}) = \varphi'(\vec{x})\ \forall \vec{x}} \mathcal{D}\varphi(\vec{x},t)\ \exp\Big[i \underbrace{\int dt\, d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi)}_{S[\varphi]} \Big]}\ .$$

Podemos notar que, de hecho, la integral funcional para mecánica cuántica se puede considerar un caso particular de la de campos, interpretando a $q(t)$ como un "campo" en 0+1 dimensiones. De 1+1 dimensiones en adelante, además del límite $\Delta t \to 0$ que teníamos antes, necesitamos el límite adicional $\Delta x \to 0$. Como veremos más adelante, este último da lugar a divergencias "ultravioleta" que de alguna manera deberán controlarse ('regularizando') y eliminarse ('renormalizando'). Además, el límite $V \to \infty$ puede dar lugar a divergencias "infrarrojas"!

Con base en lo que aprendimos en el caso no relativista, sabemos que las funciones de correlación de N puntos,

vacío de la teoría interactuante

$$G_N(x_1,\dots,x_N) \equiv \langle\Omega| T\{\hat{\varphi}_H(x_1)\cdots\hat{\varphi}_H(x_N)\}|\Omega\rangle ,$$

cuadro de Heisenberg $\quad x_1^\mu \equiv (t_1, \vec{x}_1)$

se pueden calcular en el formalismo de la integral funcional usando la fórmula de la p. 539,

$$\boxed{G_N(x_1,\dots,x_N) = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}\right]}{\int \mathcal{D}\varphi\, \exp\left[i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}\right]}} .$$

Esta fórmula debe dar, entonces, los mismos resultados que obtuvimos por cuantización canónica, donde usamos (p. 393)

cuadro de interacción $\qquad$ vacío de la teoría libre

$$G_N(x_1,\dots x_N) = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0| T\{\hat{\varphi}_I(x_1)\cdots\hat{\varphi}_I(x_N)\exp\left[-i\int_{-T}^{T} d^4x\, \hat{\mathcal{H}}^I_{int}\right]\}|0\rangle}{\langle 0| T\{\exp\left[-i\int_{-T}^{T} d^4x\, \hat{\mathcal{H}}^I_{int}\right]\}|0\rangle}$$

como punto de partida para deducir la expansión perturbativa.

LOI: 30/01/23

Consideremos primero un campo escalar real y <u>libre</u>,

$$\mathcal{L}_0(\varphi, \partial_\mu\varphi) \equiv \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 .$$

Para N=2 esperamos obtener el propagador libre,

$$G_2^{(0)}(x,x') = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\,\varphi(x')\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_0\right]}{\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_0\right]}$$

← Integral gaussiana con 2 inserciones

← Integral gaussiana

$$\stackrel{?}{=} \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-x')}\underbrace{\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}}_{\equiv \tilde{K}_F(p)}}_{\equiv K_F(x-x')}$$

Recordemos la definición de la derivada funcional de una funcional $F[f(x)]$ (p.161),

de argumentos no fijos en F

$$\frac{\delta F}{\delta f(x')} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F[f(x)+\epsilon\delta^{(n)}(x-x')]-F[f(x)]}{\epsilon},$$

que implica que

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(x')} = \delta^{(n)}(x-x') \qquad \left(\text{análogo a } \frac{\partial f_i}{\partial f_k} = \delta_{ik}\right),$$

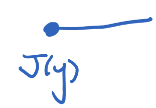
$$\frac{\delta}{\delta f(x')}\int d^n x\, f(x)\, g(x) = g(x') \qquad \left(\text{análogo a } \frac{\partial}{\partial f_k}\sum_i f_i g_i = g_k\right),$$

Podemos notar que

"fuente externa" del campo φ

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\left[i\int d^4y\, \mathcal{L}_0(\varphi,\partial\varphi) + \int d^4y\, \varphi(y) J(y)\right] = \varphi(x),$$

intuitivamente, vértice de 1 pata



$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\left[e^{i\int d^4y \mathcal{L}_0 + \int d^4y\, \varphi J}\right] = \varphi(x)\, e^{i\int d^4y\, \mathcal{L}_0 + \int d^4y\, \varphi J},$$

así que el numerador de $G_2^{(0)}(x,x')$ se puede reexpresar como

$$\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x')\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_0} = \frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\left[\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^4y \mathcal{L}_0 + \int d^4y\, \varphi J}\right]_{J=0}.$$

Esta observación nos resulta útil porque la integral funcional restante es gaussiana: el exponente

$$\int d^4y \left\{ \frac{i}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) + J\varphi \right\} \overset{\text{partes}}{=} \int d^4y \left\{ \frac{i}{2}\varphi \underbrace{\left[-\partial^2 - m^2\right]}_{\equiv \Delta_y}\varphi + J\varphi\right\}$$

es cuadrático en φ.

(El truco anterior es completamente análogo a

$$\int d^N\vec{\varphi}\, \varphi_n \varphi_{n'}\, e^{-\sum_{m,m'=1}^{N} \varphi_m A_{mm'} \varphi_{m'}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_n} \frac{\partial}{\partial J_{n'}} \left[\int d^N\vec{\varphi}\, e^{-\sum_{m,m'} \varphi_m A_{mm'} \varphi_m + \sum_m \varphi_m J_m} \right]_{\vec{J}=0} ,$$

que es consecuencia de $\quad \dfrac{\partial J_m}{\partial J_n} = \delta_{m,n}$.)

Sabemos que al hacer la integral gaussiana, acabaremos evaluando el exponente en el valor de $\varphi(y)$ que lo extremiza, o en otras palabras, en la solución a la ecuación de Euler-Lagrange que proviene de la acción modificada

$$\int d^4x \left(\mathcal{L}_0 - i\varphi J \right) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \varphi \underbrace{\Delta_x}_{= -\partial^2 - m^2} \varphi - i\varphi J \right\} ,$$

que es $\Delta_x \varphi - iJ = 0$, es decir,

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \varphi(x) = -iJ(x) ,$$

la ec. de Klein-Gordon con una fuente $-iJ(x)$.

[Nota: en la mayoría de los libros de texto, la fuente se define con un factor de i adicional a nuestras convenciones aquí, $J_{\text{allá}} \equiv -i J_{\text{aquí}}$. Eso simplifica la ec. de mov., $(\partial^2 + m^2)\varphi = J_{\text{allá}}$, pero lo obliga a uno a escribir

$$\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x') e^{i\int d^4y\, \mathcal{L}_0} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_{\text{allá}}(x)} \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_{\text{allá}}(x')} \left[\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^4y \{\mathcal{L}_0 + \varphi J_{\text{allá}}\}} \right]_{J_{\text{allá}}=0} .$$

]

La solución a $\Delta_x \varphi(x) = +i J(x)$ se puede expresar en la forma

$$\varphi_{sol}(x) = \int d^4x' \, \Delta^{-1}(x,x')\, J(x'),$$

donde $\Delta^{-1}(x,x')$ es la función de Green (es decir, el inverso) del operador diferencial Δ_x, tal que

$$\Delta_x \Delta^{-1}(x,x') = i\,\delta^{(4)}(x-x') .$$

notar factor de i

(Más adelante encontraremos a Δ^{-1} explícitamente.)

Es importante tener claro que la variable de integración $\varphi(x)$ dentro de la integral funcional $\int \mathcal{D}\varphi$ NO está obligada a satisfacer la ec. de mov.: la suma es sobre todas las funciones $\varphi(x)$.

Pero podemos verificar explícitamente que al desarrollar el exponente alrededor de $\varphi_{sol}(x)$, efectivamente completamos el cuadrado, como necesitamos para hacer la integral gaussiana: si escribimos

$$\varphi(x) = \underbrace{\int d^4x' \Delta^{-1}(x,x') J(x')}_{\varphi_{sol}(x)} + \underbrace{\varphi_f(x)}_{\text{fluctuación (arbitraria)}} ,$$

entonces

$$\Delta_x \varphi(x) = \Delta_x \varphi_f(x) + \int d^4x' \underbrace{\Delta_x \Delta^{-1}(x,x')}_{i\delta^{(4)}(x-x')} J(x')$$

$$= \Delta_x \varphi_f(x) + iJ(x) ,$$

de modo que el término cuadrático en el exponente es

$$\frac{i}{2}\int d^4x\, \varphi \Delta_x \varphi = \frac{i}{2}\int d^4x \left[\left(\varphi_f + \int d^4x' \Delta^{-1}(x,x') J(x') \right) \left(\Delta_x \varphi_f(x) + iJ(x) \right) \right]$$

$$= \frac{i}{2}\int d^4x \Big[\varphi_f \Delta_x \varphi_f + i \int d^4x' \, J(x)\,\Delta^{-1}(x,x')\,J(x')$$

$$+ \varphi_f\, i J + \underbrace{\int d^4x' \, \Delta^{-1}(x,x')\,J(x')\,\Delta_x \varphi_f(x)}_{\varphi_f\, i J} \Big]$$

partes

$$= \int d^4x \left[\frac{i}{2}\varphi_f \Delta_x \varphi_f - \frac{1}{2}\int d^4x' \, J(x)\,\Delta^{-1}(x,x')\,J(x') - \varphi_f J \right].$$

Y por otro lado, el término lineal en el exponente es

$$\int d^4x \, \varphi J = \int d^4x \left[\varphi_f J + \int d^4x' \, J(x)\,\Delta^{-1}(x,x')\,J(x') \right],$$

de modo que el exponente completo es

$$\int d^4x \left[\frac{i}{2}\varphi\Delta_x\varphi + \varphi J \right] = \int d^4x \Big[\frac{i}{2}\varphi_f \Delta_x \varphi_f - \frac{1}{2}\int d^4x' J(x)\,\Delta^{-1}(x,x')\,J(x') - \cancel{\varphi_f J}$$

$$+ \cancel{\varphi_f J} + \int d^4x' J(x)\,\Delta^{-1}(x,x')\,J(x') \Big]$$

$$= \int d^4x \Big[\underbrace{\frac{i}{2}\varphi_f \Delta_x \varphi_f}_{} + \frac{1}{2}\underbrace{\int d^4x' \, J(x)\,\Delta^{-1}(x,x')\,J(x')}_{} \Big]$$

puramente cuadrático en φ_f, que tomaremos como nuestra nueva variable de integración ✓

constante (independiente de φ_f).

miércoles, 20 de febrero de 2008 04:07 p.m.

Ahora, dado que $\int \mathcal{D}\varphi(x) \equiv \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi(x)$ (en versión discretizada), y en cada punto x

$\varphi(x)$ difiere de $\varphi_f(x) \equiv \varphi(x) - \int d^4x' \Delta^{-1}(x,x') J(x')$

por una constante, tenemos

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) = \int \mathcal{D}\varphi_f(x),$$

y concluimos entonces que

$$\int \mathcal{D}\varphi\, e^{\int d^4x \left[\frac{i}{2}\varphi \Delta_x \varphi + \varphi J\right]}$$

$$= \underbrace{e^{\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x'\, J(x) \Delta^{-1}(x,x') J(x')}}_{\substack{\text{exponencial original,} \\ \text{evaluada en } \varphi = \varphi_{sol} \\ \equiv e^{\frac{1}{2} J \cdot \Delta^{-1} \cdot J}}} \underbrace{\int \mathcal{D}\varphi_f\, e^{\int d^4x \frac{i}{2} \varphi_f \Delta_x \varphi_f}}_{\propto (\mathrm{Det}\, \underbrace{\Delta_x}_{\substack{\text{determinante funcional} \\ \text{(producto de eigenvalores)}}})^{-1/2}}$$

coincide con p. 530

Recordemos ahora que, para el numerador de $G_2^{(0)}(x,x')$, lo que necesitamos es diferenciar este resultado con respecto a J. Toda la dependencia de J está ya afuera de la integral funcional, y dado que

$$e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J} = 1 + \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J}_{\equiv \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x'\, J(x)\Delta^{-1}(x,x')J(x')}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J\Big)^2 + \dots,$$

tenemos

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\Big[e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J}\Big]_{J=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(x')}\Big[\cancelto{0}{1} + \frac{1}{2}\int d^4y\, d^4y'\, J(y)\Delta^{-1}(y,y')J(y') + \cancel{\dots}\Big]_{J=0}$$

0 después de evaluar en $J=0$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)}\Big[\frac{1}{2}\int d^4y\, d^4y'\Big\{\underbrace{\frac{\delta J(y)}{\delta J(x')}}_{\delta^{(4)}(y-x')}\Delta^{-1}(y,y')J(y') + J(y)\Delta^{-1}(y,y')\underbrace{\frac{\delta J(y')}{\delta J(x')}}_{\delta^{(4)}(y'-x')}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)}\Big[\frac{1}{2}\int d^4y'\,\Delta^{-1}(x',y')J(y') + \frac{1}{2}\int d^4y\, J(y)\Delta^{-1}(y,x')\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Delta^{-1}(x',x) + \frac{1}{2}\Delta^{-1}(x,x')$$

$$= \Delta^{-1}(x,x')$$

porque, como veremos en breve, Δ^{-1} es <u>simétrica</u> en sus 2 argumentos.

miércoles, 20 de febrero de 2008 04:35 p.m.

Concluimos entonces finalmente que

$$G_2^{(0)}(x,x') = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \; \varphi(x)\varphi(x') \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi)\right]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi)\right]}$$

$$= \frac{\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left\{ \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi) + \int d^4y \, \varphi J\right] \right\}_{J=0}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi)\right]}$$

$$= \frac{\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x')} \left\{ e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J} \int \mathcal{D}\varphi_f \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi_f)\right] \right\}_{J=0}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi)\right]}$$

$$= \frac{\Delta^{-1}(x,x') \cancel{\int \mathcal{D}\varphi_f \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi_f)\right]}}{\cancel{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^4y \, \mathcal{L}_0(\varphi)\right]}} ,$$

Dets se cancelan

es decir,

$$\boxed{G_2^{(0)}(x,x') = \Delta^{-1}(x,x')} .$$

Esto explica el patrón general que habíamos encontrado antes, en las pp. 283-285 : el propagador libre siempre está dado por la función de Green del operador diferencial que figura en $\mathcal{L}_0$.

Y efectivamente, en este caso podemos ver fácilmente que

$$K_F(x-x') \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x-x')} \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

es la función de Green para $\Delta_x = -\partial^2 - m^2$:

$$\Delta_x K_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cancel{(p^2-m^2)}\, e^{-ip\cdot(x-x')} \frac{i}{\cancel{p^2-m^2+i\epsilon}}$$

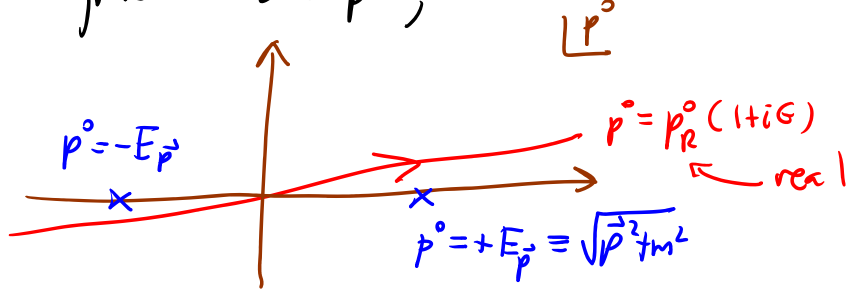
$$= i\,\delta^{(4)}(x-x'),$$

es decir,

$$\Delta^{-1}(x,x') = K_F(x-x')$$ ← tal como prometimos, $\Delta^{-1}(x,x') = \Delta^{-1}(x',x)$

y reproducimos por tanto el resultado esperado para $G_2^{(0)}$. ✓

Recordamos de las pp. 20-23 que el $+i\epsilon$ especifica el contorno de integración sobre p^0,

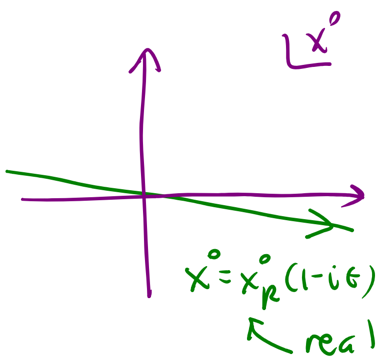


,

miércoles, 20 de febrero de 2008 11:41 p.m.

que implementa el orden temporal T — justo el orden producido por la integral funcional — y por otro lado, como vimos en las pp. 422-423, es justo lo necesario para que tengamos

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^{T} dx^0 \int d^3x \; \Delta_x \underbrace{\Delta^{-1}(x,x')}_{i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip\cdot(x-x')}}{p^2-m^2}} \cdots$$



$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\displaystyle i\int\frac{dp^0 d^3p}{(2\pi)^4}\, e^{ip^0(x^0-x'^0)-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = i\,\delta^{(4)}(x-x')}$$

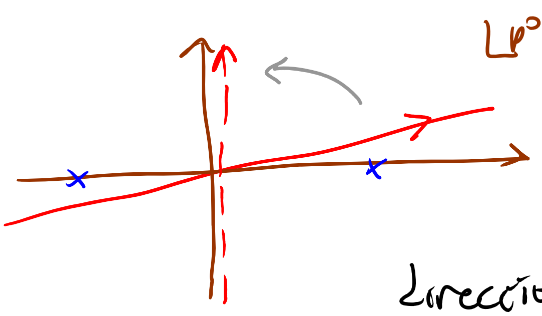
gracias a que $ip^0(x^0-x'^0) = i(1+i\epsilon)p^0_R(x^0_R - x'^0_R)(1-i\epsilon)$

$$= i(1+\epsilon^2)\,p^0_R(x^0_R - x'^0_R)$$

es <u>imaginario puro</u>.

p. 540

Podemos notar de aquí, por cierto, que la rotación de Wick corresponde en espacio de momentos a $p^0 = +ip^0_E$ $(\leftrightarrow x^0 = -ix^0_E)$



Es decir, la continuación analítica se hace justamente en la dirección necesaria para <u>eludir</u> los polos.

En la misma teoría libre, podemos inmediatamente deducir la función de N puntos

$$G_N^{(0)}(x_1,\dots,x_N) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\ \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_0\right]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_0\right]}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0}}}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_N)}\Bigg[\underbrace{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS_0+\int d^4x\,\varphi J}}_{e^{\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J}\cancel{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0}}}\Bigg]_{J=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_N)}\left[1+\left(\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}J\cdot\Delta^{-1}\cdot J\right)^2+\dots\right]_{J=0}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } N\in 2\mathbb{Z}+1 \\ \dfrac{1}{(N/2)!}\dfrac{1}{2^{N/2}}\dfrac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\dfrac{\delta}{\delta J(x_N)}\left(J\cdot\Delta^{-1}\cdot J\right)^{N/2} & \text{si } N\in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Al diferenciar, obtenemos una suma de productos de $N/2$ Δ^{-1}'s, evaluadas en todas las distintas parejas que se pueden formar con los argumentos $x_1, \dots, x_N$:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^{-1}(x_1,x_2)\,\Delta^{-1}(x_3,x_4)\cdots\Delta^{-1}(x_{N-1},x_N)\,, \\ \Delta^{-1}(x_1,x_3)\,\Delta^{-1}(x_2,x_4)\cdots\Delta^{-1}(x_{N-1},x_N)\,, \quad \text{etc.} \end{array}\right\} N! \text{ términos}$$

Cada tipo distinto de término aparece un total de

$$\underbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{permutaciones de } N/2 \\ \text{parejas formadas con} \\ x_1 \cdots x_N}}{(N/2)!} \quad \times \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{permutaciones dentro} \\ \text{de las } N/2 \text{ parejas}}}{2^{N/2}}}_{\substack{\#\text{ total de permutaciones de } x_1\cdots x_N \text{ que} \\ \text{mantienen intacta nuestra elección de } N/2 \text{ parejas}}} \quad \text{veces}\,,$$

así que los factores numéricos se cancelan.

Recordando que $\Delta^{-1} = K_F = G_2^{(0)}$, obtenemos entonces

$$\boxed{G_N^{(0)}(x_1,\dots,x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \in 2\mathbb{Z}+1 \\ K_F(x_1-x_2)K_F(x_3-x_4)\cdots K_F(x_{N-1}-x_N) + \text{permutaciones} & \text{si } N \in 2\mathbb{Z} \end{cases}}\,,$$

lunes, 25 de febrero de 2008 06:07 p.m.

justo como obtuvimos en cuantización canónica (en la p. 401) usando el teorema de Wick.

L1: 22/05/17
L2: 01/02/23

De manera similar, podemos proceder con la generalización al caso de una teoría con interacciones, donde

$$\mathcal{L}(\partial_\mu\varphi,\varphi) = \mathcal{L}_0(\partial_\mu\varphi,\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \underbrace{V(\varphi)}_{\text{incluye } m^2\varphi^2} \qquad \left(\text{p.ej., } \mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right).$$

La función de N puntos es entonces (p. 545)

$$G_N(x_1,\ldots,x_N) = \frac{\int\mathcal{D}\varphi\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int})\right\}}{\int\mathcal{D}\varphi\exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int})\right]}$$

Lím implícito $T\to\infty(1-i\epsilon)$

datos iniciales/finales $\varphi(\vec{x})$ NO importan en el límite $T\to(1-i\epsilon)\infty$

$$= \underbrace{\frac{1}{\int\mathcal{D}\varphi\, e^{iS}}}_{\frac{1}{Z[0]}}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_N)}\Big[\underbrace{\int\mathcal{D}\varphi\exp\left\{i\int d^4x(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int})+\int d^4x\,\varphi J\right\}}_{\equiv Z[J]}\Big]_{J=0}$$

$\equiv Z[J]$ funcional generatriz o función de partición

función $J(x)$ arbitraria

$$\propto {}_J\langle\Omega|T\left\{\exp\left[-i\left(\hat{H}+i\int d^4x\,\hat{\varphi}J\right)2T\right]\right\}|\Omega\rangle_J$$

vacío en presencia de la fuente J

Así que, si logramos calcular $Z[J]$, podremos determinar fácilmente $G_N(x_1,\dots,x_N)$ $\forall\, N$.

Podemos notar ahora que

términos no cuadráticos mezclados por acoplamientos

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i\int d^4x \left(\mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi) \right) + \int d^4x\, \varphi J \right\}$$

integral NO gaussiana

$$= \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}(\varphi(y)) \right\} \exp\left\{ i\int d^4x\, \mathcal{L}_0(\varphi) + \int d^4x\, \varphi J \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \, \underbrace{\exp\left\{ i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) \right\}}_{\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]^n} \exp\left\{ i\int d^4x\, \mathcal{L}_0 + \int d^4x\, \varphi J \right\}$$

$$\left(\text{p.ej. } \underbrace{\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4} \right)$$

suma converge $\forall\, \lambda$

$$= \exp\left\{ i\int d^4y\, \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) \right\} \underbrace{\int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i\int d^4x\, \mathcal{L}_0 + \int d^4x\, \varphi J \right\}}$$

funcional generatriz en teoría libre $\equiv Z_0[J]$

p.552

$$= e^{\frac{1}{2} J\cdot\Delta^{-1}\cdot J} \underbrace{Z_0[0]}_{\propto (\mathrm{Det}\,\Delta_x)^{-1/2}} .$$