De cualquier manera, la cuestión del ordenamiento no es en general terriblemente importante. Primero, porque los Hamiltonianos usados más frecuentemente no tienen ambigüedades de ordenamiento. Segundo, porque distintas elecciones de orden corresponden simplemente a asignar diferentes valores a los coeficientes de los posibles términos en $\hat{H}$, y normalmente al formular una teoría dejamos que dichos coeficientes sean arbitrarios.

Otro punto que vale la pena resaltar es que, en la integral de trayectoria que definimos, tratamos de manera distinta a $\mathcal{D}q(\tau)$ y $\mathcal{D}p(\tau)$ —p.ej., $p(\tau)$ no está fijo en los extremos. (Por supuesto, la situación se invertiría si calculamos el propagador en espacio de momentos, $\langle p', t' | p, t \rangle$.) Esto tiene como consecuencia que $\mathcal{D}q(\tau)\mathcal{D}p(\tau)$ NO es invariante bajo transformaciones canónicas generales en el espacio fase, que mezclan las q's con las p's, sino solo bajo las llamadas "transformaciones puntuales (o de punto)",

$$q_a \to Q_a(q) \quad , \quad p_a \to P_a = \sum_b p_b \frac{\partial q_b}{\partial Q_a} \quad ,$$

que representan cambios de coordenadas en el espacio configuración.

En general, se debe tener cuidado de definir la medida $\int \mathcal{D}q(\tau)\mathcal{D}p(\tau)$ de manera compatible con las simetrías clásicas del problema. Cuando esto no resulta posible, la teoría cuántica NO tendrá la simetría en cuestión, y se dice que tenemos una "anomalía" (tema de Campos II).

Notemos ahora que en $\int \mathcal{D}q(\tau)\mathcal{D}p(\tau)$ podemos dejar una de las integrales para el final, digamos aquella que corresponde al tiempo intermedio $t_I = t_0 + I\Delta t$.

Si tomamos $I \propto N \to \infty$ de manera tal que $t_I \equiv t''$ esté fijo, podemos entonces partir la integral funcional en 2:

$$\langle q';t'|q;t\rangle = \lim_{\Delta t\to 0} \int \underbrace{d^L q_1 \cdots}\, d^L q_I \underbrace{\cdots d^L q_{N-1}}\, \underbrace{\frac{d^L p_0}{(2\pi)^L}\cdots}\, \underbrace{\frac{d^L p_I}{(2\pi)^L}\cdots\frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}}$$

$$\exp\left[i\left(\sum_{n=0}^{I-1} + \sum_{n=I}^{N-1}\right)\left\{p_n\cdot(q_{n+1}-q_n) - H(q_{n+1},p_n)\Delta t\right\}\right]$$

$$\langle q';t'|q,t\rangle = \int \underbrace{d^L q''}_{\equiv d^L q_I} \lim_{\Delta t\to 0} \int d^L q_{I+1} \cdots d^L q_{N-1} \frac{d^L p_I}{(2\pi)^L} \cdots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L} \exp\left[i \sum_{n=I}^{N-1} \{ p_n \cdot (q_{n+1} - q_n) - H(q_{n+1}, p_n)\Delta t \} \right]$$

$$\times \lim_{\Delta t\to 0} \int d^L q_1 \cdots d^L q_{I-1} \frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \cdots \frac{d^L p_{I-1}}{(2\pi)^L} \exp\left[i \sum_{n=0}^{I-1} \{ p_n \cdot (q_{n+1} - q_n) - H(q_{n+1}, p_n)\Delta t \} \right]$$

$$= \int d^L q'' \int_{q(t'')=q''}^{q(t')=q'} Dq(\tau) Dp(\tau)\, e^{i\int_{t''}^{t'} d\tau\, [p\dot{q} - H]} \int_{q(t)=q}^{q(t'')=q''} Dq(\tau) Dp(\tau)\, e^{i\int_{t}^{t''} d\tau\, [p\dot{q} - H]} .$$

Esto es obvio en el lenguaje canónico, porque simplemente dice que

$$\langle q';t'|q;t\rangle = \int d^L q'' \langle q';t'|q'';t''\rangle \langle q'';t''|q;t\rangle ;$$ ✓

pero es satisfactorio ver que podemos deducir esta propiedad puramente en el nuevo lenguaje.

Usándola, podemos entender lo que sucede cuando consideramos la integral funcional con inserciones adicionales en el integrando, como p.ej.

$$\int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau)\,\mathcal{D}p(\tau)\; \underbrace{q_a(t'')\,q_b(t''')}_{=\,q_b(t''')\,q_a(t'')} \exp\left[i\int_t^{t'} d\tau\,\{p\dot{q}-H\}\right].$$

← Conmutan, porque son simples números

Suponiendo sin perder generalidad que $t' > t''' > t'' > t$, esta expresión se puede reescribir en la forma

$$\int dq'''\,dq'' \int_{q(t''')=q'''}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; \underbrace{q_b(t''')}_{q_b'''}\, e^{i\int_{t'''}^{t'} d\tau\,(p\dot{q}-H)} \int_{q(t'')=q''}^{q(t''')=q'''} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; \underbrace{q_a(t'')}_{q_a''}\, e^{i\int_{t''}^{t'''} d\tau\,(p\dot{q}-H)}$$

$$\times \int_{q(t)=q}^{q(t'')=q''} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; e^{i\int_t^{t''} d\tau\,(p\dot{q}-H)}$$

$$= \int dq'''\,dq''\, \langle q';t'\underbrace{|q''';t'''\rangle\, q_b'''}_{\hat{q}_b(t''')|q''';t'''\rangle} \langle q''';t'''\underbrace{|q'';t''\rangle\, q_a''}_{\hat{q}_a(t'')|q'';t''\rangle} \langle q'';t''|q;t\rangle ,$$

es decir,

$$\int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \; q_a(t'')\, q_b(t''')\; e^{\,i\int_t^{t'} d\tau\,(p\dot{q}-H)}$$

$$=\int d^L q'''\, d^L q''\, \langle q';t'|\hat{q}_b(t''')|q''';t'''\rangle\langle q''';t'''|\hat{q}_a(t'')|q'';t''\rangle\langle q'';t''|q;t\rangle$$

$$=\langle q';t'|\hat{q}_b(t''')\,\hat{q}_a(t'')|q;t\rangle .$$

Claramente, si hubiéramos supuesto que $t'>t''>t'''>t$ obtendríamos el mismo resultado pero con las etiquetas $\overset{t'''}{b}$ y $\overset{t''}{a}$ intercambiadas, es decir,

$$\langle q';t'|\hat{q}_a(t'')\,\hat{q}_b(t''')|q;t\rangle .$$

Vemos entonces que, al traducir del lenguaje de la integral funcional al lenguaje canónico, las funciones numéricas insertadas en el integrando se convierten en operadores ordenados de tal manera que el tiempo en el que están evaluadas aumenta de derecha a izquierda.

Es decir, más en general, tenemos

$$\boxed{\int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\ \exp\left[i\int_t^{t'} d\tau\,(p\dot{q}-H)\right] O_A(t_A)\,O_B(t_B)\cdots = \langle q';t'|\,T\{\hat{O}_A(t_A)\hat{O}_B(t_B)\cdots\}\,|q;t\rangle\,,}$$

donde T denota el orden temporal (o "cronológico") que nos fue útil en varios lugares de nuestra discusión en cuantización canónica.

L42.5: 21/11/18 L39.5: 19/05/17

Frecuentemente $H(q,p)$ es cuadrático en p, en cuyo caso la integral $\int \mathcal{D}p(\tau)$ es gaussiana y se puede hacer fácilmente.

Recordemos que $I(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

(porque

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\, e^{-\frac{a}{2}(x^2+y^2)} \underset{y=r\,\mathrm{sen}\,\theta}{\overset{x=r\cos\theta}{=\!=}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\,dr\, e^{-\frac{a}{2}r^2}$$

$$\overset{u=r^2/2}{=\!=} 2\pi \int_0^{\infty} du\, e^{-au} = \frac{2\pi}{a}\ ).$$

Esto se puede generalizar al caso de múltiples variables,

$$I(\underset{\sim}{A},\vec{B}) \equiv \int d^Dx \, \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{D} A_{ab}\, x^a x^b + \sum_{a=1}^{D} B_a x^a\right]$$

parte antisimétrica no importaría

con A_{ab}, $B_a \in \mathbb{R}$, y $\underset{\sim}{A}$ una matriz simétrica, no singular, con eigenvalores positivos. para que integral converja

En tal caso, es posible diagonalizar a $\underset{\sim}{A}$ por medio de una matriz ortogonal $\underset{\sim}{O}$ $\left(\underset{\sim}{O}^T = \underset{\sim}{O}^{-1}\right)$:

$$\underset{\sim}{O}^T \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{O} = \underset{\sim}{\alpha} \longleftarrow \text{diagonal: } \underset{\sim}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots\ \alpha_D \end{pmatrix}, \quad \alpha_a > 0 .$$

Haciendo un cambio de variables (una rotación)

$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}\,' = \underset{\sim}{O}^{-1}\vec{x}$, tenemos entonces

$$\sum_{a,b=1}^{D} A_{ab}\, x^a x^b = \vec{x}^T \underset{\sim}{A}\, \vec{x} = \vec{x}\,'^T \underbrace{\underset{\sim}{O}^T \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{O}}_{\underset{\sim}{\alpha}} \vec{x}\,' = \sum_{a=1}^{D} \alpha_a\, x'^{a\,2},$$

$$\sum_{a=1}^{D} B_a x^a = \sum_{a,b=1}^{D} B_a O_{ab}\, x'^b = \sum_{b=1}^{D} \underbrace{\left(\sum_{a=1}^{D} B_a O_{ab}\right)}_{\equiv \beta_b} x'^b$$

y $d^Dx = d^Dx' \, \cancelto{1}{|\det \underset{\sim}{O}|}$, así que

$$I(\underset{\sim}{A}, \vec{B}) = \int d^D x' \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{D} \alpha_a x'^{a\,2} + \sum_{b=1}^{D} \beta_b x'^{b}\right]$$

$$= \prod_{a=1}^{D}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx'^a \exp\underbrace{\left[-\frac{1}{2}\alpha_a x'^{a\,2} + \beta_a x'^a\right]}_{-\frac{1}{2}\alpha_a\big(\underbrace{x'^a - \frac{\beta_a}{\alpha_a}}_{\equiv x''^a}\big)^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta_a^2}{\alpha_a}}\right)$$

$$= \prod_{a=1}^{D}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\beta_a^2}{\alpha_a}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx''^a \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha_a x''^{a\,2}\right]}_{\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_a}}}\right)$$

$\beta_a = \sum_{b=1}^{D} B_b O_{ba}$

$$= \underbrace{\left[\prod_{a=1}^{D}\left(\frac{\alpha_a}{2\pi}\right)\right]}_{\det\left(\frac{1}{2\pi}\underset{\sim}{A}\right)}{}^{-1/2} \exp\left[+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{a=1}^{D}\frac{\beta_a^2}{\alpha_a}}_{\sum_{a=1}^{D}\frac{1}{\alpha_a}\sum_{b,c=1}^{D} B_b O_{ba} B_c O_{ca}}\right]$$

$$= \vec{B}^T \underset{\sim}{O}\, \underset{\sim}{\alpha}^{-1} \underset{\sim}{O}^T \vec{B}.$$

Notando que

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{O}^T \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{O} \implies \underset{\sim}{\alpha}^{-1} = \underbrace{\underset{\sim}{O}^T}_{= \underset{\sim}{O}^{-1}} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{O}$$

$$\implies \underset{\sim}{O}\,\underset{\sim}{\alpha}^{-1} \underset{\sim}{O}^T = \underset{\sim}{A}^{-1} ,$$

obtenemos finalmente

$$\boxed{I(\underset{\sim}{A}, \vec{B}) = \frac{1}{\sqrt{\det\left(\frac{1}{2\pi}\underset{\sim}{A}\right)}} \exp\left[\frac{1}{2}\vec{B}^T \underset{\sim}{A}^{-1} \vec{B}\right]} . \qquad (\star)$$

Vale la pena notar que el exponente en esta expresión final coincide con el exponente cuadrático original,

$$Q(\vec{x}) \equiv -\frac{1}{2} \vec{x}^T \underset{\sim}{A} \vec{x} + \vec{B}^T \vec{x} = -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{D} x^a A_{ab} x^b + \sum_{a=1}^{D} B_a x^a$$

pero evaluado en el punto $\vec{x} = \vec{\xi}$ donde la función Q es <u>estacionaria</u>:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} Q(x) = -\sum_{b=1}^{D} A_{ab} x^b + B_a = 0$$

en $\vec{x} = \underset{\sim}{A}^{-1} \vec{B} \equiv \vec{\xi}$, jueves, 14 de febrero de 2008 12:12 a.m.

$$Q(\vec{x}) \equiv -\frac{1}{2}\vec{x}^T \underset{\sim}{A}\vec{x} + \vec{B}^T\vec{x}$$

y

$$Q(\vec{\xi}) = -\frac{1}{2}(\underset{\sim}{A}^{-1}\vec{B})^T \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{A}^{-1}\vec{B}) + \vec{B}^T(\underset{\sim}{A}^{-1}\vec{B})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{B}^T \underbrace{\underset{\sim}{A}^{-1\,T}}_{=\underset{\sim}{A}^{-1} \text{ porque } \underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}^T} \vec{B} + \vec{B}^T\underset{\sim}{A}^{-1}\vec{B} = \underbrace{\frac{1}{2}\vec{B}^T\underset{\sim}{A}^{-1}\vec{B}}_{\text{coincide con exponente en ec. }(\star)\text{, p.529}}. \checkmark$$

(La razón es que el paso de <u>completar el cuadrado</u> equivale a desarrollar en Taylor alrededor de $\vec{\xi}$:

$$Q(\vec{x}) = Q(\vec{\xi}) + \sum_{a=1}^{D} \cancel{\left.\frac{\partial Q}{\partial x^a}\right|_{\vec{x}=\vec{\xi}}}^{\,0} (x-\xi)^a$$

queda como constante en exponente

$$+\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{\infty}(x-\xi)^a \underbrace{\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x^a \partial x^b}\right|_{\vec{x}=\vec{\xi}}}_{-A_{ab}} (x-\xi)^b$$

expresión cuadrática que conduce a determinante

$$+ \text{ términos con } \cancel{\frac{\partial^l Q}{\partial x^{a_1}\cdots\partial x^{a_l}}}^{\,0} \quad l>2 \quad .)$$

Por continuación analítica, la fórmula $(\star)$ se puede extender al caso con $\underset{\sim}{A}, \vec{B} \in \mathbb{C}$. P.ej. (ver Tarea 7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{e^{\frac{i}{2}ax^2 + ibx}}_{\text{caso anterior, con } a\to -ia,\ b\to ib} = \sqrt{\frac{i2\pi}{a}}\; e^{-\frac{i}{2}\frac{b^2}{a}}.$$

Notar que la convergencia de esta integral a priori NO es obvia

Volvamos ahora a la integral de camino, suponiendo un Hamiltoniano cuadrático en las p's, que es el caso más común:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{L} A_{ab}(q)\, p_a p_b + \sum_{a=1}^{L} B_a(q)\, p_a + C(q).$$

Tenemos entonces

$$\langle q';t' | q;t\rangle = \lim_{\Delta t\to 0} \int d^L q_1 \cdots d^L q_{N-1} \underbrace{\frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \cdots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}}_{\text{integrales gaussianas}}$$

$$\times \exp\left[i \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ p_n \cdot (q_{n+1} - q_n) - \left[\tfrac{1}{2} p_n \cdot \underset{\sim}{A} \cdot p_n + B \cdot p_n + C \right] \Delta t \right\} \right].$$

evaluados en q_{n+1}

El exponente es estacionario en p_n tal que

$$q_{n+1} - q_n - [\underset{\sim}{A}\cdot p_n + B]\Delta t = 0 \quad , \text{ es decir,}$$

$$\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t} = \underset{\sim}{A}\cdot p_n + B = \frac{\partial H(q_{n+1}, p_n)}{\partial p_n} \quad ,$$

que reconocemos como la versión discretizada de la ecuación de Hamilton $\dot{q}_a = \dfrac{\partial H}{\partial p_a}$.

Evaluando en este valor de p_a, el exponente $p\cdot\dot{q}-H$ coincidirá con el Lagrangiano usual $L(q,\dot{q})$ (tal que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\left[p\cdot\dot{q} - H(q,p)\right] = \frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a}\dot{q}_b + p_a - \frac{\partial H}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a}$$

derivada a q fijo

Hamilton

$$= \cancel{\frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a}\dot{q}_b} + p_a - \cancel{\dot{q}_b\frac{\partial p_b}{\partial \dot{q}_a}} \checkmark \Bigg):$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\Delta t\left\{\left[\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t}-B\right]\cdot p_n - \frac{1}{2}p_n\cdot \underset{\sim}{A}\cdot p_n + C\right\}\Bigg|_{p_n=\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t}-B\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\Delta t\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t}-B\right]\cdot \underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\left[\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t}-B\right]+C\right\}$$

$$\xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \int_t^{t'} d\tau \underbrace{\left\{\frac{1}{2}\left[\dot{q}(\tau)-B(q(\tau))\right]\cdot A^{-1}(q(\tau))\cdot\left[\dot{q}(\tau)-B(q(\tau))\right]+C(q(\tau))\right\}}_{L(q(\tau),\dot{q}(\tau))} \longleftrightarrow H = p\cdot\dot{q}-L$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$= S[q(\tau)].$$

Cuando llevamos a cabo las $N\times L$ integrales gaussianas $\int_{-\infty}^{\infty} dp_n$, obtenemos entonces una integral funcional sobre $q(\tau)$ que tiene la forma

$$\langle q';t'|q;t\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\int d^L q_1 \cdots d^L q_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1}\left[\det\left(\frac{i\Delta t}{2\pi}\underset{\sim}{A}(q_n)\right)\right]^{-1/2}$$

$$\times \exp\left[i\sum_{n=0}^{N-1}\Delta t\, L\left(q_n, \frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t}\right)\right].$$

Normalmente $\underset{\sim}{A}$ es independiente de q, en cuyo caso el producto de los determinantes ($\equiv$ determinante funcional) es simplemente una constante de normalización

$$\mathcal{N}_A \equiv \lim_{N\to\infty}\left(\frac{i\Delta t}{2\pi}\right)^{-LN/2}\left[\det \underset{\sim}{A}\right]^{-1/2},$$

que se puede sacar de la integral para obtener finalmente la versión Lagrangiana de la integral de camino,

$$\boxed{\langle q';t'|q;t\rangle = \mathcal{N}_A \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau)\, \underbrace{\exp\left[i\int_t^{t'} d\tau\, L(q(\tau),\dot q(\tau))\right]}_{\exp(iS[q(\tau)])}}.$$

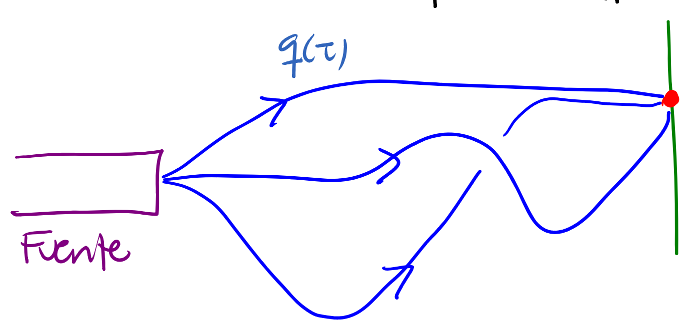
En casos donde $\underset{\sim}{A}$ <u>sí</u> depende de $q(\tau)$, es importante recordar incluir la determinante <u>dentro de</u> $\int \mathcal{D}q(\tau)$.

Ya sea en la versión original, Hamiltoniana, o en la versión Lagrangiana que acabamos de deducir,

$$\langle q';t' | q;t \rangle = \mathcal{N} \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau) \exp\{ i S[q(\tau)] \} \quad ,$$

es interesante resaltar el contenido físico de la integral funcional. Este formalismo nos da un método alternativo de cuantización, basado en la premisa de que el sistema físico realmente explora todas las trayectorias disponibles en el espacio configuración (o fase).

En esta narración de los hechos, un electrón (no relativista), p.ej., se traslada de una posición espacial a otra



$$\text{Amp} = \int \mathcal{D}q(\tau)\, e^{iS}$$

'olfateando' todos los caminos posibles, y asignándole un peso e^{iS} a cada uno de ellos para determinar a dónde le 'late' llegar. Esta es una descripción mucho más intuitiva que la del formalismo canónico, pero equivalente. En la tarea 7 exploraremos en particular la luz que este formalismo arroja sobre el límite clásico ($\hbar \to 0$).

44: 25/11/22

Dado que la fase e^{iS} tiene comportamiento oscilatorio, no es obvio que la integral de trayectoria Lagrangiana converja (como de hecho no lo era tampoco en la versión Hamiltoniana).

Podemos obtener una integral mejor definida si sustituimos $t = -it_E$, tomando $t_E \in \mathbb{R}$ (en vez de $t \in \mathbb{R}$).

tiempo euclideano

Definiendo

$$iS[q(\tau)] = i\int_t^{t'} d\tau\, L\left(q(\tau), \frac{\partial}{\partial\tau}q(\tau)\right)$$

$$\overset{\tau=-i\tau_E}{=} +\int_{t_E}^{t'_E} d\tau_E\, L\left(q(\tau_E), i\frac{\partial}{\partial\tau_E}q(\tau_E)\right)$$

$$\equiv \underbrace{-\int_{t_E}^{t'_E} d\tau_E\, L_E\left(q(\tau_E), \partial_{\tau_E} q(\tau_E)\right)}_{\equiv S_E[q(\tau_E)]},$$

tenemos entonces

$$\langle q'; t'_E | q; t_E \rangle = N \int_{q(t_E)=q}^{q(t'_E)=q'} \mathcal{D}q(\tau_E) \; \exp\left[-S_E(q(\tau_E))\right] .$$

El punto importante es que, como los sistemas físicos estables tienen un Hamiltoniano acotado por debajo, la acción euclideana S_E está también acotada por debajo, de tal manera que $\exp[-S_E]$ <u>no</u> puede ser divergente.

P.ej., para la partícula no relativista en un potencial externo,

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 - V(q) \Longrightarrow L_E = \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{\partial q}{\partial \tau_E}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{V(q)}_{\geq V_{mín}} .$$

En la práctica, normalmente hacemos nuestros cálculos en la versión euclideana de la integral funcional, y al final <u>definimos</u> la integral Lorentziana como la lunes, 18 de febrero de 2008 06:28 p.m.

Continuación analítica correspondiente.

Esta maniobra, $t \to -it_E$, se puede llevar a cabo igualmente en el formalismo canónico:

$$\langle q';t'|q;t\rangle = \langle q'|e^{-i\hat{H}(t'-t)}|q\rangle = \langle q'|e^{-\hat{H}(t'_E-t_E)}|q\rangle .$$

Podemos notar aquí que, si tomamos $T \equiv t'_E - t_E \to \infty$, el operador de evolución $\exp[-\hat{H}T]$ se convierte en un operador de proyección sobre $|\Omega\rangle$, el estado base de la teoría (el estado con más baja energía):

$$e^{-\hat{H}T}|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon} e^{-\hat{H}T}|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon} e^{-E_\varepsilon T}|\varepsilon\rangle\langle\varepsilon|\psi\rangle$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} e^{-E_\Omega T}|\Omega\rangle\langle\Omega|\psi\rangle .$$

← Esto es lo mismo que obtuvimos en la p.388 tras $t \to t(1-i\epsilon)$

Podemos usar esta propiedad para calcular valores esperados en el estado fundamental,

$$\underbrace{\langle q';T|}_{\langle q'|e^{-\hat{H}T}} T\{\hat{O}_A(t_A)\hat{O}_B(t_B)\cdots\} \underbrace{|q;-T\rangle}_{e^{-\hat{H}T}|q\rangle}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \langle q'|\Omega\rangle e^{-E_\Omega T}\langle\Omega|T\{\hat{O}_A(t_A)\cdots\}|\Omega\rangle e^{-E_\Omega T}\langle\Omega|q\rangle$$

de donde

$$\langle\Omega|T\{\hat{O}_A(t_A)\cdots\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{2E_\Omega T}}{\langle q'|\Omega\rangle\langle\Omega|q\rangle}\mathcal{N}\int_{q(-T)=q}^{q(T)=q'}\mathcal{D}q\, O_A(t_A)\cdots e^{-S_E}$$

o lo que es lo mismo,

$$\langle\Omega|T\{\hat{O}_A(t_A)\cdots\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{\displaystyle\int_{q(-T)=q}^{q(T)=q'}\mathcal{D}q(\tau)\, O_A(t_A)\cdots\exp\left[-S_E[q(\tau);-T,T]\right]}{\displaystyle\int_{q(-T)=q}^{q(T)=q'}\mathcal{D}q(\tau)\,\exp\left[-S_E[q(\tau);-T,T]\right]}.$$

Podemos notar aquí que las constantes de normalización se cancelan, y las condiciones inicial/final se vuelven virtualmente irrelevantes, siempre y cuando impliquen un traslape $\neq 0$ con el estado base $|\Omega\rangle$.

Al generalizar a campos, la fórmula anterior nos dará la receta para calcular funciones de correlación.

Es posible extender este resultado al caso con tiempo Lorentziano, si agregamos $-i\epsilon$ al intervalo temporal para preservar la propiedad de proyección sobre el vacío: dado que $\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} e^{-i\hat{H}T}|\psi\rangle \propto |\Omega\rangle$, tenemos

$$\boxed{\langle\Omega|T\{\hat{O}_A(t_A)\cdots\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}q(\tau)\, O_A(t_A)\cdots \exp[iS(-T,T)]}{\int \mathcal{D}q(\tau) \exp[iS(-T,T)]}}$$

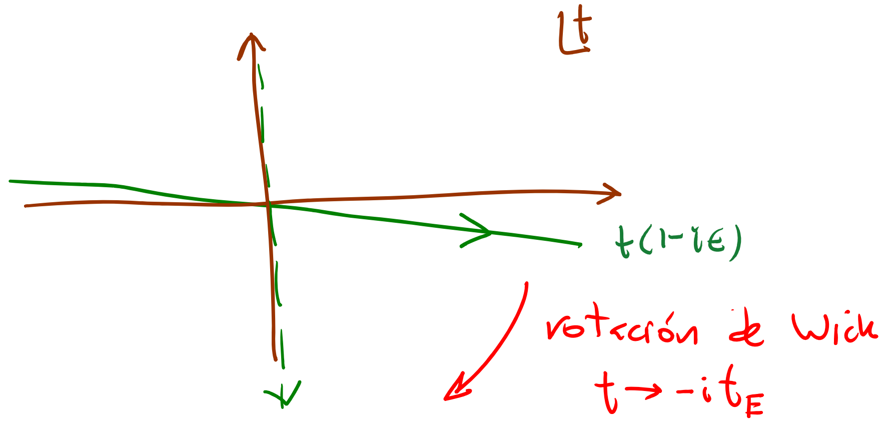
La aparición de $-i\epsilon$ aquí nos debe resultar familiar, puesto que figuró igualmente en nuestra deducción de la fórmula para funciones de correlación en cuantización canónica, al pasar al cuadro de interacción (pp. 388-393).

Este término nos recuerda en qué dirección debemos hacer la continuación analítica, o "rotación de Wick", para

540

lunes, 18 de febrero de 2008 09:18 p.m.

pasar del caso lorentziano al euclideano (o viceversa):



Como explicamos en las pp. 422-423, la adición de $-i\epsilon$ al tiempo corresponde exactamente a agregar $+i\epsilon$ al propagador de Feynman en espacio de momentos, como estamos acostumbrados.

Ya que estamos en el tema, vale la pena hacer una observación tangencial: si en la versión euclideana nos restringimos a calcular la amplitud con $q'=q$, e integramos sobre q, tendremos

$$\int d^L q \, \langle q | e^{-\hat{H}T} | q \rangle = \mathcal{N} \int_{q(0)=q(T)} \mathcal{D}q(\tau) \, \exp\left[-S_E[q(\tau); 0, T]\right],$$

y el lado izquierdo es precisamente la función de partición de mecánica estadística cuántica,