

Evidentemente tenemos de igual manera

$$\sum_{\lambda=1}^2 (\varepsilon_{k\lambda})^\nu (\varepsilon_{k\lambda}^*)^\sigma \rightarrow -\eta^{\nu\sigma},$$

de modo que al promediar $|M|^2$ sobre la polarización del fotón inicial y sumar sobre la del fotón final obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 |M|^2 &= (-\eta^{\mu\rho})(-\eta^{\nu\sigma}) M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}^* \\ &= M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^*. \end{aligned}$$

En nuestra cuenta de la dispersión de Compton, esto equivale a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 |M|^2 &= \frac{e^4}{2} \bar{u}_{p'}^{s'} \left[\frac{\gamma^\mu K \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu K' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right] u_p^s \\ &\quad \times \bar{u}_p^s \left[\frac{\gamma_\nu K \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu K' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] u_{p'}^{s'}. \end{aligned}$$

↑
para $M_{\mu\nu}^*$
usamos p. 481

Si ahora promediamos/sumamos también sobre el espín de los electrones para determinar

$$\overline{|M|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{s, s'=1}^2 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 |M|^2, \quad \text{encontramos que}$$

$$\overline{|M|^2} = \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[(\not{p}' + m) \left(\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right) \right. \\ \left. \times (\not{p} + m) \left(\frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p^\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right) \right]$$

Antes de tomar la traza, esta horrible expresión con hasta 8 matrices de Dirac se puede simplificar un poco usando las identidades

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = (\gamma^0)^2 - (\vec{\gamma})^2 = 4 \cdot \mathbb{1},$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \\ = 2\eta^{\mu\nu} \gamma_\mu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu,$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \\ \Rightarrow (\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \\ (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$$

junto con

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho},$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu,$$

que se demuestran de manera similar.

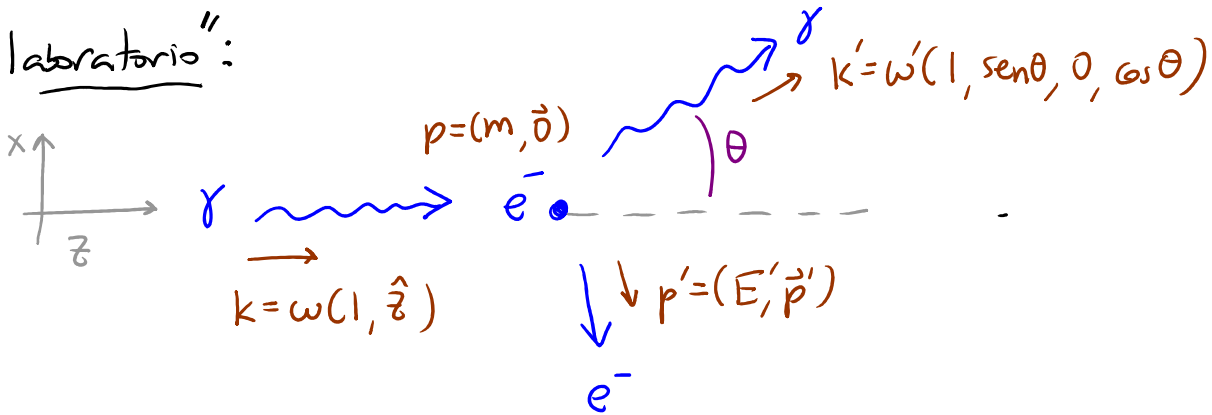
Después de mucho trabajo [ver Peskin pp. 161-162] se obtiene un resultado relativamente sencillo:

$$|\overline{m}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right].$$

141-33: 16/11/18

L385: 08/05/17

Para variar, evaluaremos esta expresión en el marco "del laboratorio":



con

$$\begin{aligned} |\vec{p}'|^2 &= E'^2 - m^2, & \omega + m &= \omega' + E', \\ 0 &= \omega' \sin \theta + p'_x, & \omega &= \omega' \cos \theta + p'_z, \end{aligned}$$

de modo que el proceso se puede parametrizar en términos de ω y θ .

Dados ω, θ , podemos determinar en particular ω' despejando de las 4 fórmulas anteriores, o equivalentemente, notando que

$$\begin{aligned} m^2 = p'^2 &= (p + k - k')^2 = p^2 + 2p \cdot (k - k') + \cancel{k^2} - 2k \cdot k' + \cancel{k'^2} \\ &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

lo cual implica la fórmula de Compton

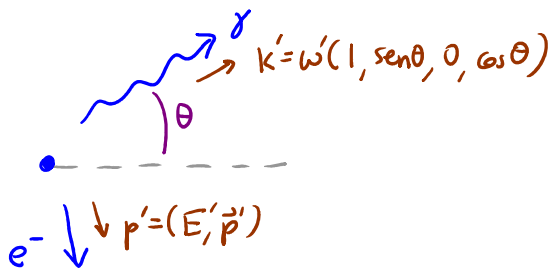
$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}. \quad \left(\Rightarrow \frac{\omega'}{\omega} < 1 \text{ efecto Compton} \right)$$

Sabiendo que $p \cdot k = m \omega$ y $p \cdot k' = m \omega'$, nuestro resultado

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right] \\
 &= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m \underbrace{\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)}_{\substack{\text{p. 503} \\ \frac{m}{\omega} (1 - [1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)])}_{\cos\theta - 1}} + m^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2}_{\substack{\text{p. 503} \\ (\cos\theta - 1)^2 \\ \cos^2\theta - 2\cos\theta + 1}} \right] \\
 &= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 1 + \cos^2\theta \right] = 2e^4 \left[\frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} + 1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta) - 1 + \cos^2\theta \right]
 \end{aligned}$$

En este marco, la integral sobre el espacio fase invariante es

$$\begin{aligned}
 \int d\pi'_2 &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{p}' - \vec{k} - \vec{p}) \delta(\omega' + E' - \omega - E) \\
 &\Rightarrow \vec{p}' = (-\omega' \sin\theta, 0, \omega - \omega' \cos\theta) \\
 &= \int \frac{\omega'^2 d\omega' d\Omega'}{(2\pi)^3 2\omega'} \frac{1}{2\sqrt{\omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2}} (2\pi) \delta(\omega' + \sqrt{\omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2} - \omega - m)
 \end{aligned}$$



$$\frac{\delta\left(\omega' - \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}\right)}{1 + \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{\sqrt{\omega'^2 + \omega^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2}}}$$

$$= \int \frac{d\Omega'}{(2\pi)^2 4} \left(\frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}} \frac{1}{1 + \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{\sqrt{\omega'^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}}} \right) \left| \omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega'^2 - \omega^2 \cos^2 \theta} = E' = \omega + m - \omega'$$

$$\frac{\frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}}{\omega + m - \omega' + \omega' - \omega \cos \theta} = \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2},$$

es decir,

$$d\pi'_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega' \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2} \xrightarrow{\int d\phi} \frac{d(\cos \theta)}{8\pi} \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2}$$

Usando esto en la fórmula de la p. 463 para la sección eficaz, tenemos

$$d\sigma = d\pi'_2 \frac{|\overline{M}|^2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| 4E_1 E_2} \leftarrow 1 \cdot 4 \omega m$$

$p = (m, \vec{0})$
 $\gamma \rightsquigarrow \vec{e} \cdot$
 $\vec{k} = \omega(1, \hat{z})$

$$= \frac{d(\cos \theta)}{32\pi \omega m} \frac{\omega/m}{\left(1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)\right)^2} 2e^4 \left[\frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta) - \cos^2 \theta \right]$$

o, en forma más abreviada,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right]$$

Fórmula de Klein-Nishina

$$\text{con } \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}$$

Podemos notar aquí que cuando $\omega \ll m$ tenemos $\frac{\omega'}{\omega} \rightarrow 1$ y por tanto $\leftarrow 0.511 \text{ MeV} (\leftrightarrow \text{rayos gamma})$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} \rightarrow \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} [1 + \cos^2\theta], \quad \int d\Omega \quad \int d\Omega \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{lab}} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} \rightarrow \frac{e^4}{32\pi^2 m^2} \left[4\pi + \frac{4\pi}{3}\right] = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2,$$

que reproduce correctamente la bien conocida

valor clásico del electrón

sección eficaz de Thomson.



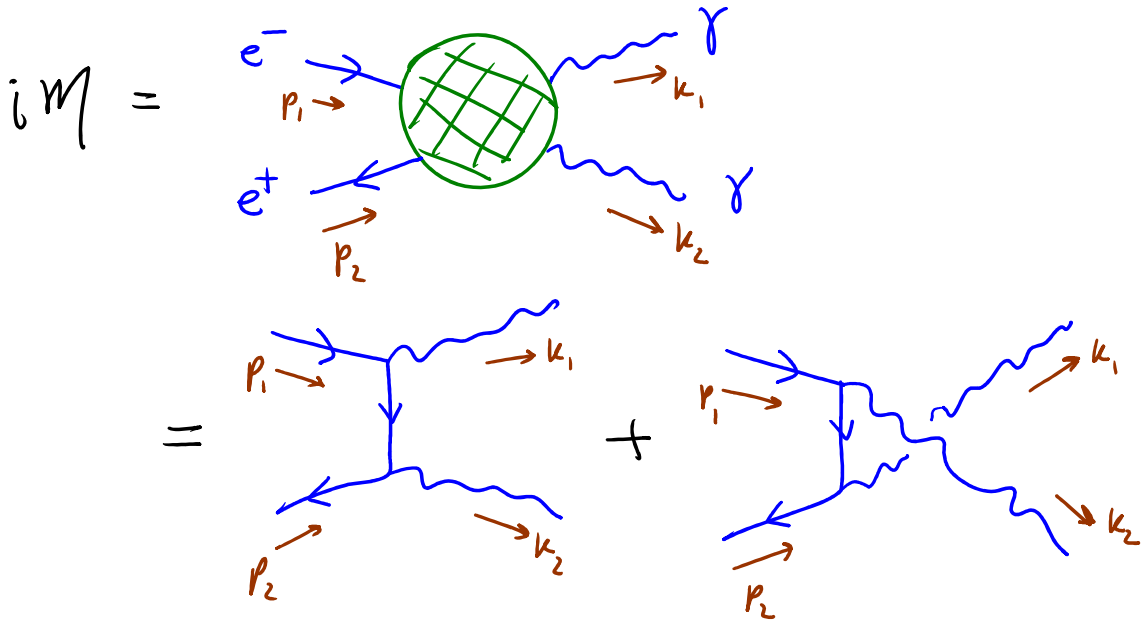
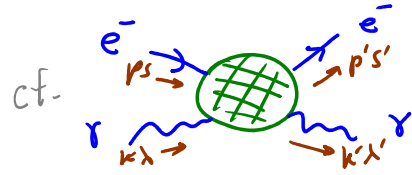
Una última observación es que la dispersión de Compton

$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ está relacionada por simetría de cruce con

el proceso de aniquilación electrón-positrón $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$,

es decir, involucra los mismos diagramas pero orientados de

formas distintas en el tiempo:



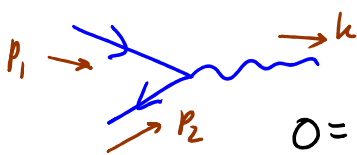
Podemos entonces obtener el resultado para $\overline{|M|^2}$

simplemente reemplazando

$$p \rightarrow p_1, \quad p' \rightarrow -p_2, \quad k \rightarrow -k_1, \quad k' \rightarrow k_2$$

en el resultado correspondiente para la dispersión Compton (p. 502) y multiplicando a $\overline{|M|^2}$ por -1 (por 1 fermión cruzado).

Vale la pena resaltar que este es el proceso de dispersión más sencillo para la aniquilación electrón-positrón, porque en



No se podría conservar el (vector) momento:

$$0 = k^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2m^2 + 2(E_{p_1} E_{p_2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

imposible con las 3 partículas en la caps

$$= 2m^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{p}_1|^2}} \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{p}_2|^2}} - \cos \alpha \right) > 0 \quad \uparrow \quad \times$$

7. Integral Funcional

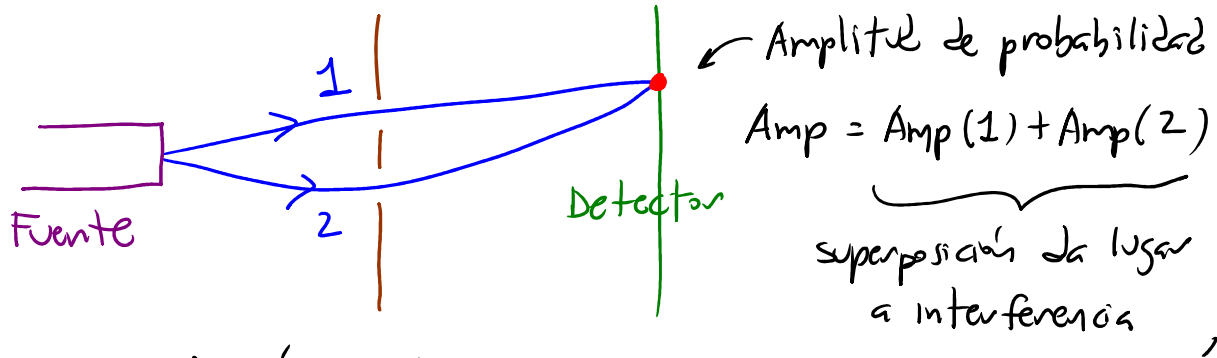
Hasta ahora hemos aprendido a cuantizar campos con el método tradicional de "cuantización canónica", que involucra a operadores sujetos a ciertas relaciones de conmutación, y está basado en la descripción Hamiltoniana de la teoría.

Feynman descubrió un método completamente distinto que da los mismos resultados: la "cuantización por integral de trayectoria (o funcional)", que No involucra a operadores, y está basada en la descripción Lagrangiana. Como todo en la vida, tiene:

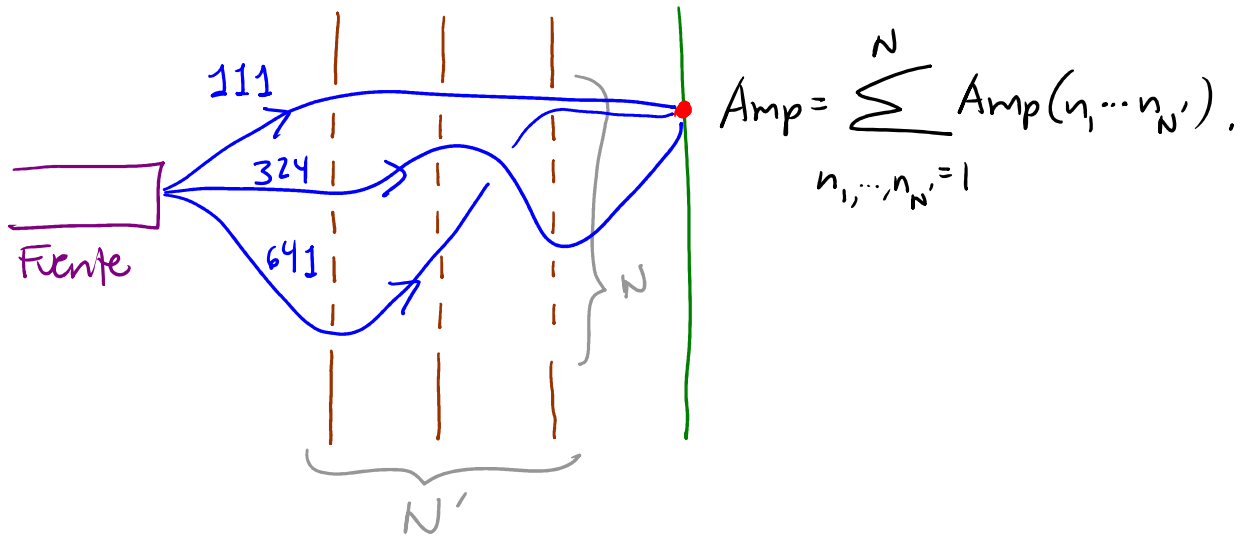
Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> • Usa <u>números</u> en vez de operadores 	<ul style="list-style-type: none"> • La integración funcional esconde algunos <u>sutilezas</u>
<ul style="list-style-type: none"> • Para sistemas relativistas, el uso de L hace manifiesta la <u>invariancia de Lorentz</u> 	<ul style="list-style-type: none"> • Por no basarse directamente en H, la <u>unitariedad</u> <u>No</u> es manifiesta

Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> Facilita la deducción de las <u>reglas de Feynman</u> para la expansión perturbativa 	<ul style="list-style-type: none"> En algunos casos, las reglas de Feynman leídas ingenuamente a partir de \mathcal{L} son <u>incorrectas</u>
<ul style="list-style-type: none"> Facilita la deducción de las "<u>identidades de Ward</u>" (generalización cuántica del teorema de Noether) 	
<ul style="list-style-type: none"> Proporciona intuición acerca del <u>límite clásico</u>, y facilita la obtención de una expansión semiclásica 	
<ul style="list-style-type: none"> Facilita enormemente la cuantización de <u>teorías de normas</u>, especialmente no abelianas 	
<ul style="list-style-type: none"> Permite la extracción de información <u>no perturbativa</u> (pej, QCD en la retícula) 	

La motivación básica es el principio de superposición en, p.ej., el experimento de la doble rendija:



o con $N \times N'$ rendijas,



Así que, más en general, esperaríamos poder escribir al propagación en la forma

$$G(x, x') \sim \sum_{\text{trayectorias}} Amp(\text{trayectoria}),$$

aunque nos falta entender cómo podemos definir esta 'suma', y cuál amplitud debemos asignar a cada trayectoria.

Por simplicidad, deduciremos primero la integral de trayectoria no en teoría cuántica de campos, sino en mecánica cuántica no relativista, es decir, para un sistema con un conjunto finito de grados de libertad.

Para tal sistema, cuantizado canónicamente, tenemos operadores \hat{q}_a, \hat{p}_a $a=1, \dots, L$ en el cuadro de Schrödinger, que satisfacen

$$[\hat{q}_a, \hat{p}_b] = i\delta_{ab}, \quad [\hat{q}_a, \hat{q}_b] = 0 = [\hat{p}_a, \hat{p}_b].$$

Podemos encontrar una base de eigenestados $|q\rangle$ tales que

$$\hat{q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle, \quad \langle q' | q \rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) \equiv \delta^{(L)}(q' - q)$$

$$\Leftrightarrow \hat{1} = \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q| \equiv \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q|,$$

o autoestados $|p\rangle$ tales que

$$\hat{p}_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad \langle p' | p \rangle = (2\pi)^L \delta^{(L)}(p' - p)$$

$$\Leftrightarrow \hat{1} = \int \frac{d^L p}{(2\pi)^L} |p\rangle \langle p|.$$

insertar por convención

Como siempre, $\langle q | \hat{p}_a | \psi \rangle = -i \frac{\partial}{\partial q_a} \langle q | \psi \rangle$

$$\Rightarrow \langle q | p \rangle = \prod_a \exp(i q_a p_a) \equiv \exp(i q \cdot p).$$

En el cuadro de Heisenberg, los operadores correspondientes son

$$\hat{q}_a(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{q}_a e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{p}_a(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{p}_a e^{-i\hat{H}t},$$

con los conjuntos completos de autoestados

$$|q;t\rangle \equiv \exp(i\hat{H}t) |q\rangle \Rightarrow \hat{q}_a(t) |q;t\rangle = q_a |q;t\rangle,$$

$$|p;t\rangle \equiv \exp(i\hat{H}t) |p\rangle \Rightarrow \hat{p}_a(t) |p;t\rangle = p_a |p;t\rangle,$$

que también satisfacen

$$\langle q';t | q;t \rangle = \delta^{(L)}(q' - q), \quad \langle p';t | p;t \rangle = (2\pi)^L \delta^{(L)}(p' - p),$$

$$\langle q;t | p;t \rangle = \exp(i q \cdot p),$$

$$\hat{1} = \int d^L q |q;t\rangle \langle q;t|,$$

$$\hat{1} = \int \frac{d^L p}{(2\pi)^L} |p;t\rangle \langle p;t| \quad \forall t.$$

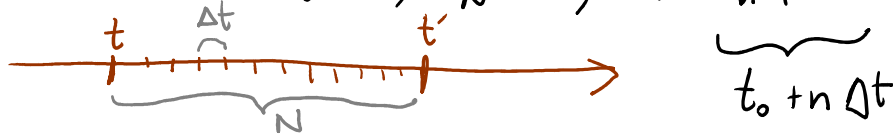
Nuestro objetivo es calcular el propagador

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \langle q' | \exp[-i\hat{H}(t'-t)] | q \rangle$$

en términos de una suma sobre trayectorias.

Para ello, enfoquemos primero nuestra atención en la evolución infinitesimal, dividiendo el intervalo $[t, t']$ en N subintervalos de duración $\Delta t \equiv \frac{t'-t}{N}$ (con $N \gg 1$; eventualmente $N \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta t \rightarrow 0$).

Denotaremos $t_0 \equiv t$, $t_N = t'$, $t_n = t_{n-1} + \Delta t \quad \forall 1 \leq n \leq N-1$.



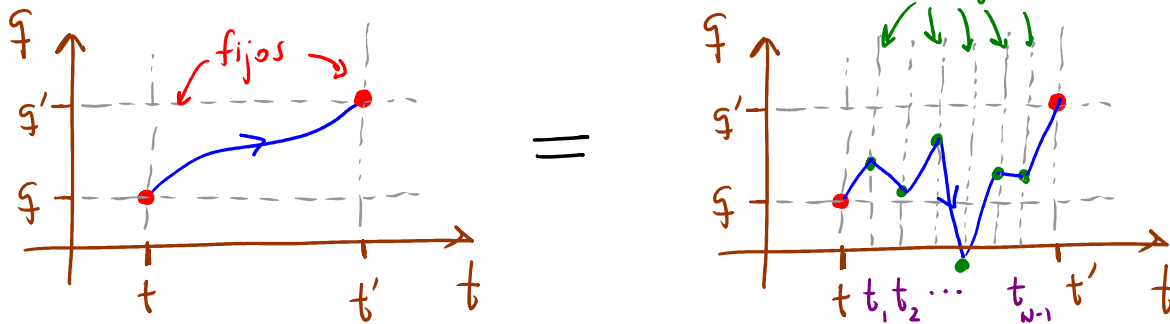
Insertando para cada instante intermedio t_n , $1 \leq n \leq N-1$

$$\hat{1} = \int d^L q_n |q_n; t_n\rangle \langle q_n; t_n|,$$

podemos reescribir al propagador como un producto de propagadores para cada subintervalo:

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | q; t \rangle &= \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \langle \overbrace{q'; t'}^{q'; t'} | q_N; t_N \rangle \langle q_{N-1}; t_{N-1} | q_{N-2}; t_{N-2} \rangle \\ &\quad \dots \langle q_2; t_2 | q_1; t_1 \rangle \underbrace{\langle q_1; t_1 | q_0; t_0 \rangle}_{q; t}. \end{aligned}$$

gráficamente,



Ahora, el propagador en un intervalo infinitesimal es

$$\langle q_{n+1}; t_{n+1} | q_n; t_n \rangle = \langle q_{n+1}; t_n | \exp[-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)] | q_n; t_n \rangle$$

ojo $\underbrace{\exp[-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)]}_{\hat{1} - i\hat{H}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)}$

así que para nuestro cálculo necesitamos evaluar el

elemento de matriz $\langle q_{n+1}; t_n | \hat{H} | q_n; t_n \rangle \forall n$,

donde

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = e^{i\hat{H}t_n} \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) e^{-i\hat{H}t_n} = \hat{H}(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)).$$

Dado un Hamiltoniano que es un polinomio en \hat{q}_a y \hat{p}_a ,

siempre podemos reordenar cada término en él de tal

manera que todas las \hat{q} 's queden a la izquierda de todas

las \hat{p} 's,

$$\hat{H}(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) = \hat{H}_e(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n))$$

↑ "orden estándar"

(p.ej., $\hat{q}_a \hat{p}_b = \hat{q}_a \hat{p}_b$, $\hat{p}_a \hat{q}_b \hat{p}_c = \hat{q}_b \hat{p}_a \hat{p}_c - i\delta_{ab} \hat{p}_c$, etc.).

Insertando $\hat{1} = \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} |p_n; t_n\rangle \langle p_n; t_n|$,
teremos entonces

$$\begin{aligned} & \langle q_{n+1}; t_n | \hat{H}(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) | q_n; t_n \rangle \\ &= \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} \underbrace{\langle q_{n+1}; t_n | \hat{H}_e(\hat{q}(t_n), \hat{p}(t_n)) | p_n; t_n \rangle}_{H_e(q_{n+1}, p_n) \exp[+iq_{n+1} \cdot p_n]} \underbrace{\langle p_n; t_n | q_n; t_n \rangle}_{\exp[-iq_n \cdot p_n]} \\ & \quad \equiv \sum_{a=1}^L q_{n+1, a} p_{n, a} \end{aligned}$$

donde es importante notar que, en general,

$$H_e(q_{n+1}, p_n) \neq H(q_{n+1}, p_n),$$

porque en estas expresiones q_{n+1}, p_n son números.

Usando este resultado, vemos que

$$\begin{aligned}
 \langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \langle q_{n+1}, t_{n+1} | \overbrace{[\hat{1} - i\hat{H}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)]}^{\exp(-i\hat{H}\Delta t)} | q_n, t_n \rangle \\
 &= \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} \langle q_{n+1}, t_{n+1} | [\hat{1} - i\hat{H}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)] | p_n, t_n \rangle \langle p_n, t_n | q_n, t_n \rangle \\
 &= \int \frac{d^L p_n}{(2\pi)^L} \underbrace{[1 - iH_e(q_{n+1}, p_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)]}_{\exp[-iH_e(q_{n+1}, p_n)\Delta t] + \mathcal{O}(\Delta t^2)} \exp[i(q_{n+1} - q_n) \cdot p_n]
 \end{aligned}$$

Con esto podemos regresar al caso del intervalo finito $[t, t']$ para deducir que

$$\langle \overbrace{q'; t'}^{q'; t'} | q; t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \langle q_N; t_N | q_{N-1}; t_{N-1} \rangle \dots \langle q_1; t_1 | \underbrace{q; t}_{q; t} \rangle$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}$$

$$\exp \left[i \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (q_{n+1} - q_n) \cdot p_n - H_e(q_{n+1}, p_n) \Delta t \right\} \right].$$

43: 23/11/22

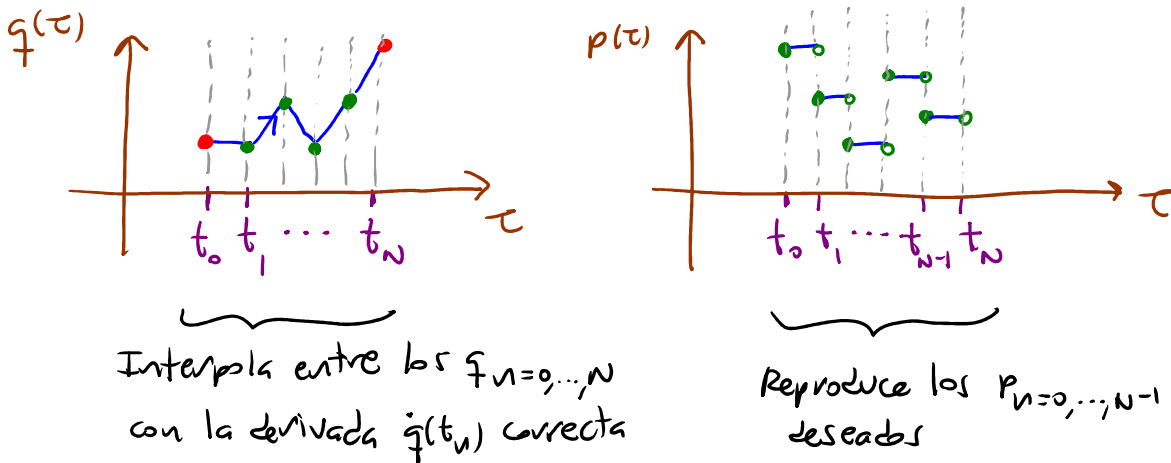
$$\underbrace{\frac{t' - t}{N} \rightarrow 0}$$

Si elegimos ahora funciones $q(\tau), p(\tau) \forall \tau \in [t, t']$
 tales que $q(t_n) = q_n \forall 0 \leq n \leq N$, $p(t_n) = p_n \forall 0 \leq n \leq N-1$,
 podemos ver que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (= \lim_{N \rightarrow \infty})$ convierte a la suma
 que aparece en el exponente en una integral:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\{ \frac{(q_{n+1} - q_n)}{\Delta t} \cdot p_n - H_e(q_{n+1}, p_n) \right\}$$

$$= \int_t^{t'} d\tau \left\{ \dot{q}(\tau) \cdot p(\tau) - H_e(q(\tau), p(\tau)) \right\}.$$

La elección más sencilla de las funciones $q(\tau), p(\tau)$ sería



Definiendo la medida de integración funcional

$$\int Dq(\tau) Dp(\tau) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^L q_1 \dots d^L q_{N-1} \frac{d^L p_0}{(2\pi)^L} \dots \frac{d^L p_{N-1}}{(2\pi)^L}$$

(que es del tipo $\frac{d^L q_n d^L p_n}{(2\pi)^L} \forall 1 \leq n \leq N-1$, pero NO $n=0$)

obtenemos entonces finalmente la deseada expresión para el propagador en términos de una integral funcional o de trayectoria,

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \mathcal{D}q(\tau) \mathcal{D}p(\tau) \exp \left[i \int_t^{t'} d\tau \left\{ \dot{q}(\tau) \cdot p(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right\} \right].$$

Por lo menos de manera intuitiva, esta expresión final dice que debemos sumar sobre "todas las funciones" del intervalo $[t, t']$ al espacio fase $\{q, p\}$, con las restricciones $q(t) = q$, $q(t') = q'$.

Esta suma está pesada por la exponencial de lo que parece ser la acción en notación Hamiltoniana,

$$S[q(\tau)] = \int d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) = \int d\tau \left[p(\tau) \cdot \dot{q}(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right],$$

excepto que los "momentos" $p(\tau)$ en la integral NO están relacionados con $\dot{q}(\tau)$ a través de las ecs. de Hamilton, sino que son variables de integración independientes.

La fórmula que hemos obtenido representa la solución al problema de evolución temporal en mecánica cuántica: con esta receta para el propagador, ¡hemos logrado resolver la ecuación de Schrödinger!

La dificultad restante, claro está, radica en que la integral en cuestión NO es una integral ordinaria.

Nosotros, de hecho, solo aprenderemos a calcular 1 tipo de integral funcional de manera explícita: la integral gaussiana (análoga a $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2+bx+c)$).

Como veremos, esto nos bastará para construir la expansión perturbativa.

A diferencia de la integral ordinaria, para la integral de trayectoria no existen tablas extensas del estilo de Gradshteyn & Ryzhik, aunque sí hay algunos libros con ciertos casos más o menos exóticos (ver, p.ej., C. Grosche, "Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg Trace Formulae").

Por construcción, el propagador que se obtiene de nuestra integral de trayectoria coincide con el definido

por el Hamiltoniano cuántico original, $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$.
Si empezamos al revés, con un Hamiltoniano clásico
 $H_c(q, p)$, su uso en la integral de trayectoria

$$\int_{\substack{q(t')=q' \\ q(t)=q}} \mathcal{D}q(z) \mathcal{D}p(z) \exp\left[i \int_t^{t'} dz \{ \dot{q}(z)p(z) - H_c(q(z), p(z)) \} \right]$$

define una teoría cuántica, **sin necesidad de usar operadores**.

Una pregunta potencialmente confusa es entonces:
¿a cuál de todas las posibles cuantizaciones canónicas
de H_c — que difieren por ordenamiento — corresponde?

Nuestra cuenta parecería seleccionar de manera única
el Hamiltoniano en orden "estándar", $(\hat{H}_c)_e$. Pero,
de hecho, esto se debe a que hemos definido la medida
 $\mathcal{D}q(z) \mathcal{D}p(z)$ de una manera específica. Exploraremos
este punto en la Tarea 7. Como aprenderemos ahí,
**diferentes prescripciones de orden en el formalismo
canónico corresponden a definiciones ^{ligeramente} diferentes de
la medida de integración en la integral funcional.**