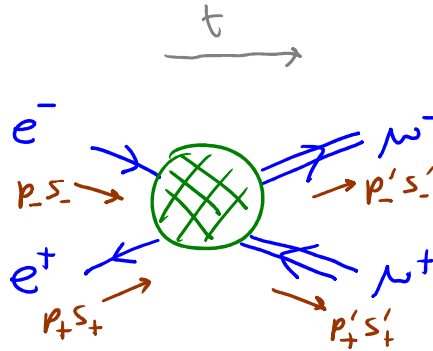
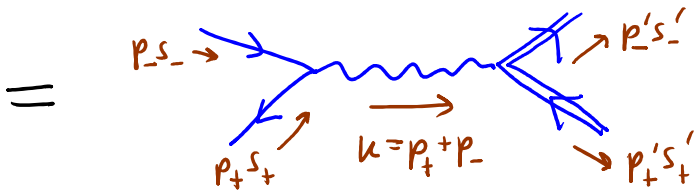


Tenemos entonces

$$i\mathcal{M}(p_+ p_- \rightarrow p'_+ p'_-) =$$



(suma sobre diagramas totalmente conexos y computado)



comenzar aquí

$\mathcal{O}(e^2)$

$+ \mathcal{O}(e^4)$

Recordar que felizmente

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \ll 1$$

$$= -\bar{v}_{p_+}^{s_+} (-ie\gamma^\mu) u_{p_-}^{s_-} \left( \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}_{p'_-}^{s'_-} (-ie\gamma^\nu) v_{p'_+}^{s'_+}$$

signo:  $\langle p'_+ p'_- | (\hat{\Psi}_{(e)} \hat{A} \hat{\Psi}_{(e)})_{y_1} (\hat{\Psi}_{(e)} \hat{A} \hat{\Psi}_{(e)})_{y_2} | p_+ p_- \rangle$

por simplicidad, en este capítulo adoptamos

la convención  $\langle p'_+ p'_- | \equiv \langle 0 | \hat{a}_{p'_+}^\dagger \hat{a}_{p'_-}^\dagger$ , que es el orden opuesto a la p. 103

$$= -\frac{ie^2}{k^2} (\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma^\mu u_{p_-}^{s_-}) (\bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\nu v_{p'_+}^{s'_+})$$

Notar que el resultado es escalar

Esto implica que

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{k^4} (\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma^\mu u_{p_-}^{s_-}) (\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma^\nu u_{p_-}^{s_-}) (\bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\mu v_{p'_+}^{s'_+}) (\bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\nu v_{p'_+}^{s'_+})$$

$\underbrace{u_{p_-}^{s_-} \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu v_{p_+}^{s_+}}_{\gamma^\mu \gamma^\nu} = \bar{u}_{p_-}^{s_-} \gamma^\nu v_{p_+}^{s_+}$ 
 $\underbrace{\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma_\mu u_{p'_-}^{s'_-}}_{\bar{v}_{p_+}^{s_+} \gamma_\mu u_{p'_-}^{s'_-}}$

p. 237

es decir,

$$|M|^2 = \frac{e^4}{k^4} \left( \bar{V}_{p_+}^{s_+} \gamma^\mu u_{p_-}^{s_-} \bar{u}_{p_-}^{s_-} \gamma^\nu v_{p_+}^{s_+} \right) \left( \bar{u}_{p'_-}^{s'_-} \gamma_\mu v_{p'_+}^{s'_+} \bar{v}_{p'_+}^{s'_+} \gamma_\nu u_{p'_-}^{s'_-} \right).$$

Ahora bien, en la situación experimental más común, los haces de partículas iniciales ( $e^+e^-$ ) No están polarizados (no tienen espín definido) y los detectores de partículas finales ( $\mu^+\mu^-$ ) son insensibles a la dirección del espín, así que nos interesa la sección eficaz promediada sobre los espines iniciales y sumada sobre los posibles espines  finales.

Recordando (de las pp. 260-261) las identidades

$$\sum_{s=1}^2 u_p^s \bar{u}_p^s = \not{p} + m_0, \quad \sum_{s=1}^2 v_p^s \bar{v}_p^s = \not{p} - m_0, \quad \leftarrow \text{estructura aquí } \mathbb{1}$$

↑ = m a orden más bajo ↓

veamos que al tomar el primer factor entre paréntesis en  $|M|^2$

y sumar sobre los espines tenemos

$$\sum_{s_+, s_- = 1}^2 \left( \bar{V}_{p_+}^{s_+} \gamma_{ab}^\mu u_{p_-}^{s_-} \bar{u}_{p_-}^{s_-} \gamma_{cd}^\nu v_{p_+}^{s_+} \right) = (\not{p}_+ - m_e)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_- + m_e)_{bc} \gamma_{cd}^\nu$$

↑ masa del electrón (e ≠ índice espinorial)

$$= \text{Tr} \left[ (\not{p}_+ - m_e) \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_- + m_e) \gamma_{cd}^\nu \right],$$

↑ traza sobre índices espinoriales

Con el resultado análogo para el segundo factor, tenemos entonces que

tenemos un espín 0 el otro      detectamos un espín y el otro

$$\begin{aligned}
 |\overline{M}|^2 &\equiv \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s_+, s_-} \right) \left( \sum_{s'_+, s'_-} \right) |M|^2 \\
 &= \frac{e^4}{4k^4} \text{Tr} \left[ (\not{p}_+ - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_+ + m_e) \gamma^\nu \right] \text{Tr} \left[ (\not{p}'_- + m_e) \gamma_\mu (\not{p}'_- - m_e) \gamma_\nu \right].
 \end{aligned}$$

$\nearrow \gamma^\rho p_{+\rho}$        $\nwarrow$  muon (no índice vectorial)

Para llegar a un resultado más explícito, necesitamos ahora ser capaces de calcular trazas de productos de 2, 3 ó 4 matrices de Dirac.

Para esto, notemos primero que  $(\gamma^5)^2 = +\mathbb{1}$ ,  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  p.234

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}] &= \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] \\
 &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5] \quad \text{por ciclicidad de la traza} \\
 &= (-1)^n \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}],
 \end{aligned}$$

$\uparrow$  traza sobre índices espinores

de donde podemos concluir que  $\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = 0$  para  $n$  impar.

Para  $n=2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= \text{Tr}[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\nu \gamma^\mu] = \text{Tr}[2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} - \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &= 8\eta^{\mu\nu} - \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu] = 8\eta^{\mu\nu} - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu],
 \end{aligned}$$

$\underbrace{2\eta^{\mu\nu} \text{Tr}(\mathbb{1})}_{\text{matriz } 4 \times 4}$

$\swarrow$  ciclicidad

es decir,

$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$

Para  $n=4$ , procediendo de manera similar podemos ver que

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] &= \text{Tr}[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\lambda \gamma^\rho - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\rho] \\
 &= \text{Tr}[2\eta^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\rho - \underbrace{\gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\lambda\} \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho}] \\
 &= \text{Tr}[2\eta^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\rho - \gamma^\nu 2\eta^{\mu\lambda} \gamma^\rho + \underbrace{\gamma^\nu \gamma^\lambda \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} - \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu}] \\
 &= 2\eta^{\mu\nu} \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\rho]}_{4\eta^{\lambda\rho}} - 2\eta^{\mu\lambda} \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\rho]}_{4\eta^{\nu\rho}} + 2\eta^{\mu\rho} \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\lambda]}_{4\eta^{\nu\lambda}} - \underbrace{\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu]}_{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho]} \quad \leftarrow \text{ciclicidad}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) .$$

Para otros  $n \in 2\mathbb{Z}_+$ , vemos que opera una especie de teorema de Wick: obtenemos una suma con signos alternantes sobre

las distintas maneras de 'contracer' todas las matrices de

Dirac,  $\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu}_{\equiv} \eta^{\mu\nu}$ .  $\leftarrow$  solo  $\neq 0$  si  $\mu=\nu$

Notemos por cierto que este último resultado implica que

para  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  tenemos  $\text{Tr}[\gamma^5] = 0$  (como se mostró

también en la Tarea 4).

Aunque no lo necesitamos aquí, por "Wick" es cierto además que

$$\boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^5] = -4i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}}.$$

Regresando a la cuenta, con las identidades recién

obtenidas vemos que

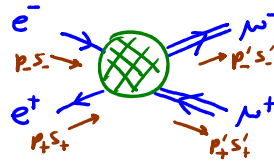
$$\begin{aligned} & \text{Tr}[(\not{p}_+ - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_- + m_e) \gamma^\nu] \\ &= \text{Tr}[\not{p}_+ \gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] - m_e \text{Tr}[\cancel{\gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu}] + m_e \text{Tr}[\cancel{\not{p}_+ \gamma^\mu \gamma^\nu}] \\ & \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\not{p}_+ \not{p}_-} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu]} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4\eta^{\mu\nu}} \\ & \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4(\eta^{\rho\mu} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{\rho\lambda} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu} \eta^{\mu\lambda})} \\ &= 4(p_+^\mu p_-^\nu - p_+ \cdot p_- \eta^{\mu\nu} + p_+^\nu p_-^\mu - m_e^2 \eta^{\mu\nu}), \end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\text{Tr}[(\not{p}'_- + m_\omega) \gamma_\mu (\not{p}'_+ - m_\omega) \gamma_\nu] = 4(p'_{-\mu} p'_{+\nu} - p'_- \cdot p'_+ \eta_{\mu\nu} + p'_{-\nu} p'_{+\mu} - m_\omega^2 \eta_{\mu\nu}),$$

por lo que

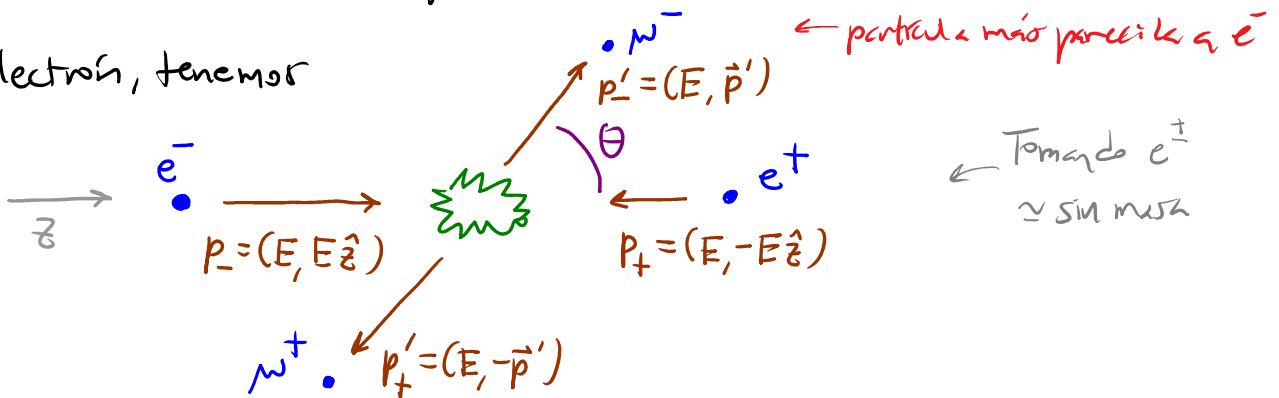
$$\begin{aligned} |\overline{M}|^2 &= \frac{e^4}{4k^4} 16 (p_+^\mu p_-^\nu - p_+ \cdot p_- \eta^{\mu\nu} + p_+^\nu p_-^\mu - m_e^2 \eta^{\mu\nu}) (p'_{-\mu} p'_{+\nu} - p'_- \cdot p'_+ \eta_{\mu\nu} + p'_{-\nu} p'_{+\mu} - m_\omega^2 \eta_{\mu\nu}) \\ &= \frac{4e^2}{k^4} (2p_+ \cdot p'_- p_- \cdot p'_+ + 2p_+ \cdot p'_+ p_- \cdot p'_- - 4p_+ \cdot p_- p'_- \cdot p'_+ + 4p_+ \cdot p_- p'_+ \cdot p'_- \\ & \quad - 2m_\omega^2 p_+ \cdot p_- + 4m_\omega^2 p_+ \cdot p_- - 2m_e^2 p'_- \cdot p'_+ + 4m_e^2 p'_- \cdot p'_+ + 4m_e^2 m_\omega^2), \end{aligned}$$



$$|\overline{M}|^2 = \frac{8e^4}{k^4} (p_+ \cdot p'_- \cdot p_- \cdot p'_+ + p_+ \cdot p'_+ \cdot p_- \cdot p'_- + m_\mu^2 p_+ \cdot p_- + m_e^2 p'_+ \cdot p'_- + 2m_e^2 m_\mu^2)$$

Dado que  $\frac{m_e}{m_\mu} \approx \frac{1}{200}$  y debemos tener  $E_{cm} \gtrsim 2m_\mu$  para que este proceso de dispersión pueda ocurrir, podemos aproximar  $m_e \approx 0$  (el error inducido por esta aproximación es menor que el que proviene de ignorar términos de  $\mathcal{O}(e^4)$  en  $M$ ).

Evaluaremos ahora la sección eficaz en el marco del centro de masa, donde si orientamos el eje  $z$  en la dirección de movimiento del electrón, tenemos



con  $|\vec{p}'| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$ ,  $\vec{p}' \cdot \hat{z} = |\vec{p}'| \cos \theta$ , de modo que

el proceso se puede parametrizar en términos de  $E$  y  $\theta$ .

Usando  $k^2 = (p_+ + p_-)^2 = (2E)^2 + 0 = 4E^2$ ,  $p_+ \cdot p_- = E^2 - (-E^2) = 2E^2$ ,

$p_+ \cdot p'_+ = E^2 - E|\vec{p}'| \cos \theta = p_- \cdot p'_-$ ,

$p_+ \cdot p'_- = E^2 + E|\vec{p}'| \cos \theta = p_- \cdot p'_+$ ,

podemos escribir

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{(2E)^4} \left[ E^2(E - |\vec{p}'| \cos\theta)^2 + E^2(E + |\vec{p}'| \cos\theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right]$$

↓ ignoramos los 2 términos con  $m_e \approx 0$

$$= \frac{e^4}{2} \left[ 1 - 2 \frac{|\vec{p}'|}{E} \cos\theta + \underbrace{\frac{|\vec{p}'|^2}{E^2}}_{\substack{E^2 - m_\mu^2 \\ E^2}} \cos^2\theta + 1 + 2 \frac{|\vec{p}'|}{E} \cos\theta + \underbrace{\frac{|\vec{p}'|^2}{E^2}}_{\substack{E^2 - m_\mu^2 \\ E^2}} \cos^2\theta + 2 \frac{m_\mu^2}{E^2} \right]$$

p. 486

$$= e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right].$$

← naturalmente, es independiente del ángulo azimutal  $\varphi$

Usando esto en la fórmula simplificada que obtuvimos en la p. 465

para la sección eficaz diferencial  $1+2 \rightarrow 1'+2'$ , tenemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{p}'_i|}{|\vec{p}_i|} \overline{|M|^2} = \frac{1}{256\pi^2 E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \overline{|M|^2}$$

(2E)<sup>2</sup> ↗

$$\frac{|\vec{p}'|}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}$$

es decir,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{e^4}{256\pi^2} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2\theta \right].$$

Usando  $\int d\Omega = 4\pi$ ,  $\int d\Omega \cos^2\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \underbrace{d(\cos\theta)}_x \underbrace{\cos^2\theta}_{x^2} = 2\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}$ ,

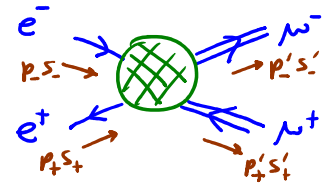
↙  
 $d\phi d\theta \sin\theta$

la sección eficaz total es entonces

$$\sigma_{CM} = \frac{e^4}{64\pi} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \frac{1}{3} \right],$$

o, sacando un factor de  $4/3$  de los corchetes,

$$\sigma_{CM} = \frac{e^4}{48\pi} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right].$$



Podemos notar que la raíz sería imaginaria para  $E_{CM} = 2E < 2m_\mu$ , donde por supuesto sabemos que  $\sigma_{CM} = 0$ .

141:18/11/22

Como segundo ejemplo, consideremos ahora el proceso de dispersión

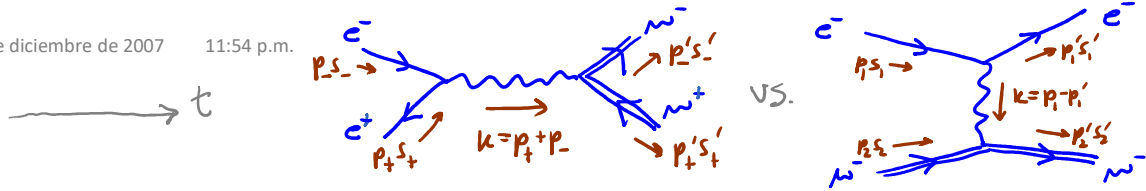
electrón-muón, es decir,  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ :

$$iM(p_1 p_2 \rightarrow p'_1 p'_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e^- & & e^- \\ \nearrow & & \nearrow \\ p_1 s_1 & \rightarrow & p'_1 s'_1 \\ \searrow & & \searrow \\ & & \mu^- \\ \mu^- & & \mu^- \\ \nearrow & & \nearrow \\ p_2 s_2 & \rightarrow & p'_2 s'_2 \\ \searrow & & \searrow \end{array} \\ + O(e^4) \end{array}$$

$$= -\frac{ie^2}{k^2} (\bar{u}_{p'_1}^{s'_1} \gamma^\mu u_{p_1}^{s_1}) (\bar{u}_{p'_2}^{s'_2} \gamma_\mu u_{p_2}^{s_2}).$$

Podemos notar que este es el mismo diagrama que en nuestro ejemplo anterior, pero orientado de manera distinta con respecto





al eje temporal, con lo cual describe un proceso físico diferente:

lo que era un  $e^+$  entrante se convirtió en un  $e^-$  saliente, y el  $\mu^+$  saliente se convirtió en un  $\mu^-$  entrante:  $e^- e^+ \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-$ .

Al sumar sobre el espín del  $e^-$  final, tendremos así

$$\sum_{s'_1} U_{p'_1}^{s'_1} \bar{u}_{p'_1}^{s'_1} = \not{p}'_1 + m_e, \text{ a diferencia del factor}$$

$$\sum_{s_+} V_{p_+}^{s_+} \bar{V}_{p_+}^{s_+} = \not{p}_+ - m_e \text{ que tenemos antes por el } e^+ \text{ inicial.}$$

Pero reemplazando  $p_+ \rightarrow -p'_1$  momento fluye hacia afuera en lugar de adentro justamente obtendríamos el mismo

resultado, excepto por un factor de  $-1$ . Lo mismo sucede para el muón inicial en comparación con el antimuón final que teníamos antes: obtenemos el mismo resultado, salvo un factor de  $-1$ , si

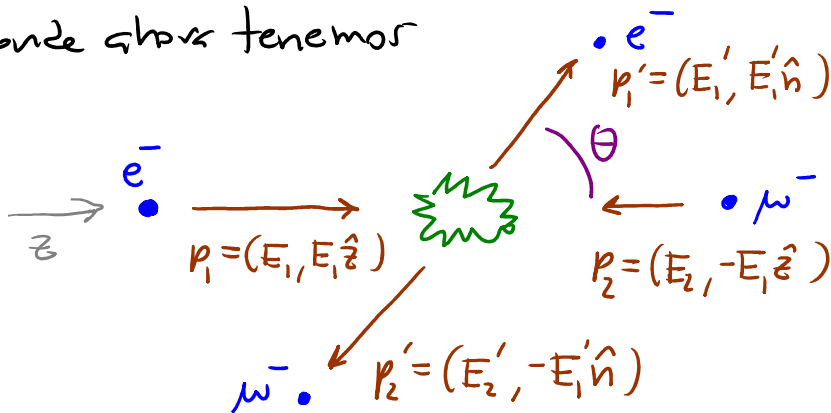
sustituimos  $p'_1 \rightarrow -p_2$ . Por otra parte, para las 2 partículas que no modificamos, necesitamos renombrar  $p_- \rightarrow p_1, p'_- \rightarrow p'_2$ . Podemos entonces simplemente traducir así nuestro resultado de la p. 486:

$$|\overline{M}|^2 = \frac{d e^4}{k^4} (p_1 \cdot p'_2 p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot p'_2 - m_\mu^2 p_1 \cdot p_1 - m_e^2 p_2 \cdot p'_2 + 2 m_e^2 m_\mu^2).$$

La relación que hemos encontrado en este ejemplo, entre

un proceso con una partícula entrante/saliente con momento  $p$  y el mismo proceso pero con esa partícula reemplazada por una antipartícula saliente/entrante con momento  $-p$ , aplica en general (con un factor de  $-1$  si la partícula en cuestión es un fermión), y se conoce como simetría de cruce ("crossing symmetry"). Se le puede entender como consecuencia de la fórmula de LSZ (p.444): con  $\hat{\varphi} \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$ ,  $p$  vs.  $-p$  decide entre  $n$  saliente y  $\bar{n}$  entrante. Es importante notar que para un  $p^\mu$  dado, solo 1 de los 2 procesos es físico, dependiendo de si  $p^0 > 0$  ó  $-p^0 > 0$ .

Regresando a la cuenta, podemos evaluar  $|\overline{M}|^2$  en el marco del centro de masa (aproximando nuevamente  $m_e \approx 0$ ), donde ahora tenemos



$$\begin{aligned} \text{con } \hat{n} \cdot \hat{z} = \cos \theta, \\ \left. \begin{aligned} E_2 &= \sqrt{E_1^2 + m_\mu^2} \\ E_2' &= \sqrt{E_1'^2 + m_\mu^2} \end{aligned} \right\} \\ E_1 + E_2 &= E_1' + E_2' \\ \Rightarrow E_1' &= E_1, E_2' = E_2. \end{aligned}$$

Podemos caracterizar el proceso usando  $E_1$  y  $\theta$ .

Dado que  $p_1 \cdot p_2 = E_1(E_2 + E_1) = p_1' \cdot p_2'$  ,  $p_1' \cdot p_2 = E_1(E_2 + E_1 \cos \theta) = p_1' \cdot p_2'$  ,  
 $p_1 \cdot p_1' = E_1^2(1 - \cos \theta)$  y  $k^2 = (p_1 - p_1')^2 = \cancel{p_1^2} - 2p_1 \cdot p_1' + \cancel{p_1'^2}$   
 $= -2E_1^2(1 - \cos \theta)$  ,

tenemos

$$|M|^2 = \frac{2e^4}{E_1^2(1 - \cos \theta)^2} \left[ (E_2 + E_1)^2 + (E_2 + E_1 \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta)^2 \right]$$

$\uparrow = \sqrt{E_1^2 + m_\mu^2}$

Y usando el hecho de que  $|\vec{p}_1'| = |\vec{p}_1|$  , concluimos que (p. 465)

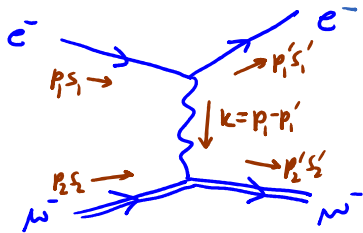
$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{p}_1'|}{|\vec{p}_1|} |M|^2$$

$\uparrow (E_1 + E_2)^2$

$$= \frac{e^4}{32\pi^2 (E_1 + E_2)^2 E_1^2} \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} \left[ (E_2 + E_1)^2 + (E_2 + E_1 \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta)^2 \right]$$

$\propto \frac{1}{k^4}$  diverge cuando  $\theta \rightarrow 0$  , porque  $k = p_1 - p_1' \rightarrow 0$

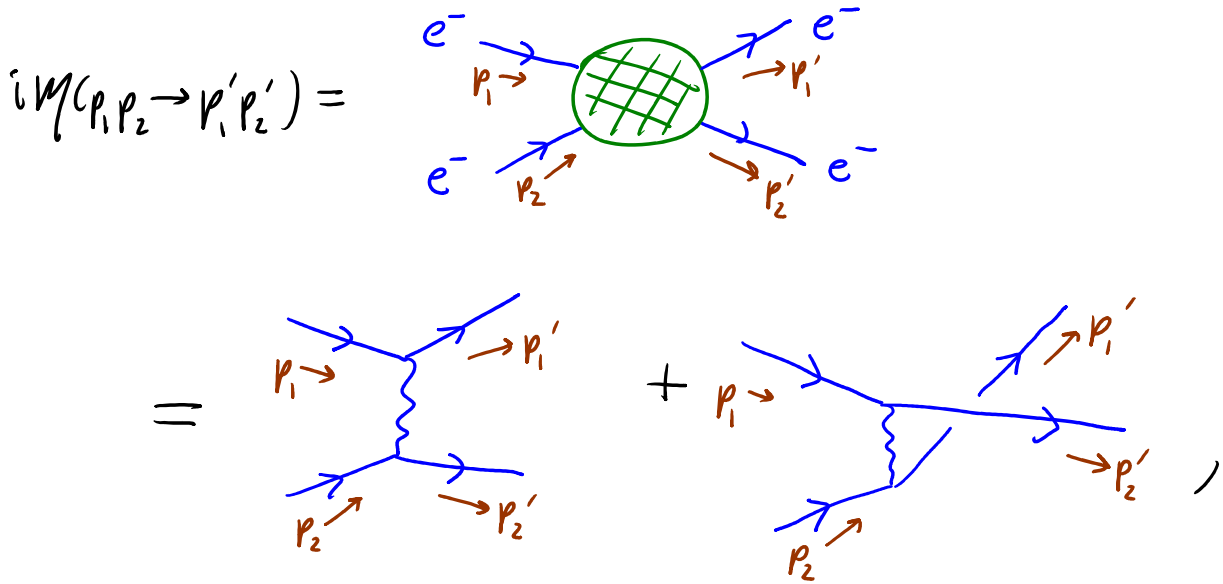
y el fotón va a la zona de masa.  $\leftarrow$  para de ser virtual a ser real



Debido a esto,  $\sigma_{TOT}$  diverge (divergencia IR), manifestación del hecho de que la interacción electromagnética es de largo alcance ( $k \rightarrow 0$  corresponde a distancia grande entre  $e^-$  y  $\mu^-$ ).

L40: 14/11/19

Para nuestro tercer ejemplo, notemos que si en el proceso anterior reemplazamos a  $\mu^-$  con un segundo  $e^-$  para considerar la 'dispersión de Moller',  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  (Tarea 6), entonces contribuyen a  $\mathcal{O}(e^2)$  no 1 sino 2 diagramas,



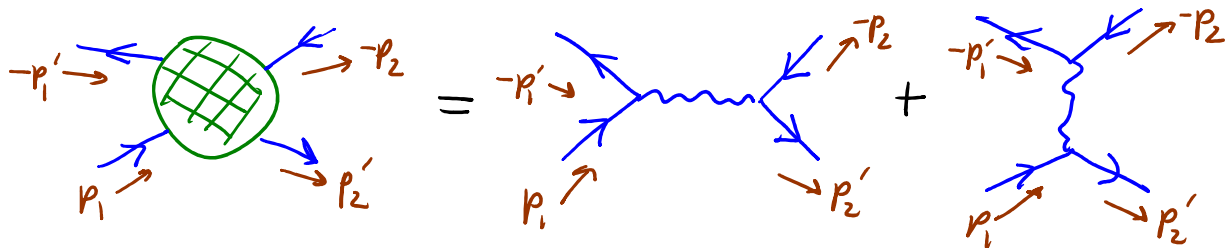
que corresponden respectivamente a las contracciones

$$\langle p'_1, p'_2 | \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_1}} \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_2}} | p_1, p_2 \rangle \quad \text{signo: -}$$

$$\langle p'_1, p'_2 | \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_1}} \overbrace{(\hat{\Psi}_e \hat{A} \hat{\Psi}_e)_{y_2}} | p_1, p_2 \rangle \quad \text{signo: +}$$

El signo menos relativo es justo lo que esperaríamos notando que los estados finales en los 2 diagramas difieren por el intercambio de 2 fermiones idénticos. Este mismo resultado aplica en cualquier proceso. (Y habiéndolo tomado en cuenta, notamos que el intercambio de fermiones entrantes No resulta en nuevas contribuciones, sino en diagramas equivalentes, que sirven para cancelar el  $\frac{1}{2!}$  de la expansión en Taylor de  $T\{\exp[-i\int d^4y \hat{\mathcal{L}}_{int}^I(y)]\}$ .)

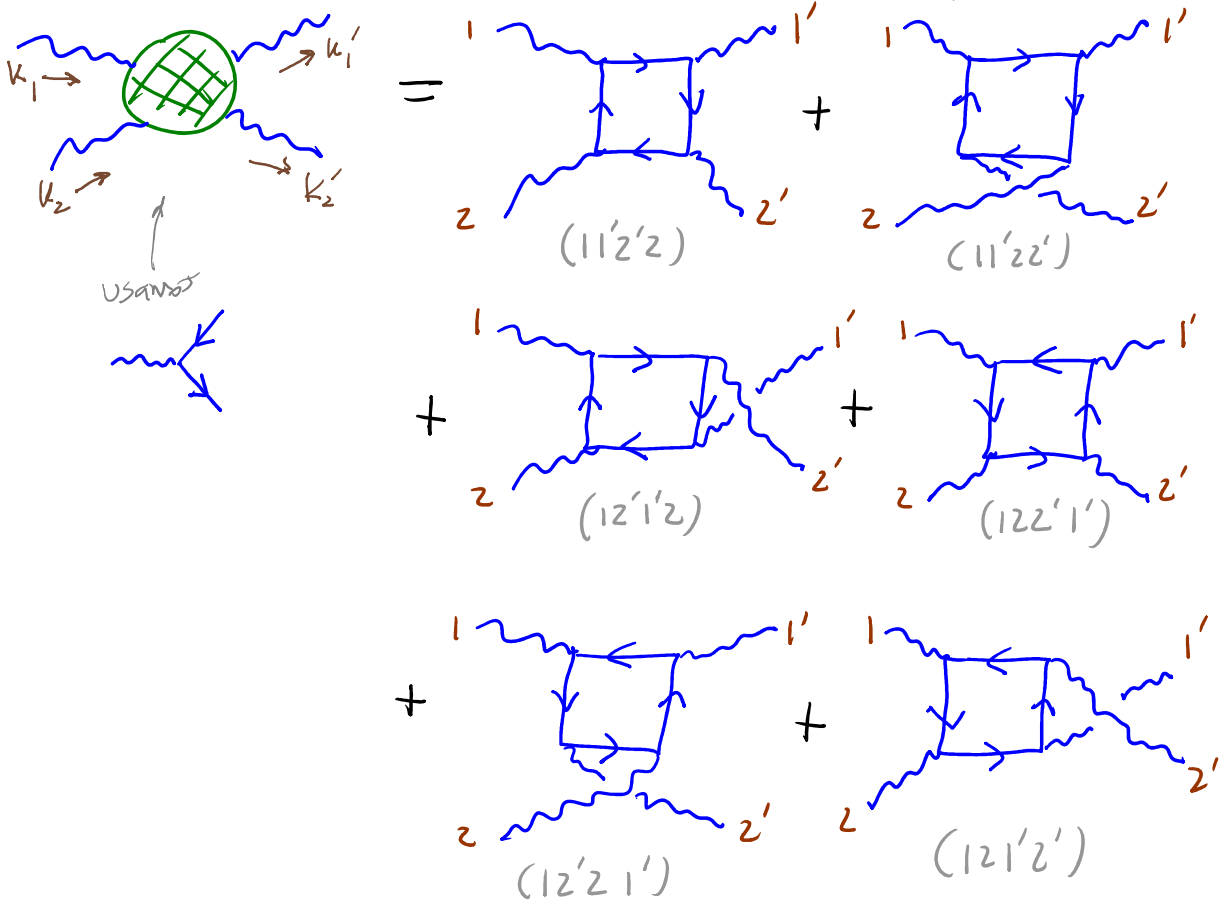
Podemos observar además que el proceso  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  está relacionado con la 'dispersión de Bhabha'  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$  (Tarea 6) por simetría de cruce, así que en



también encontraremos un signo menos relativo entre los 2 diagramas, a pesar de que No difieren entre sí por el intercambio de fermiones idénticos.

==

Otra situación donde siempre se obtiene un signo menos es en presencia de un lazo fermiónico. P.ej., en la dispersión fotón-fotón, o 'dispersión de Delbrück',  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , se tiene

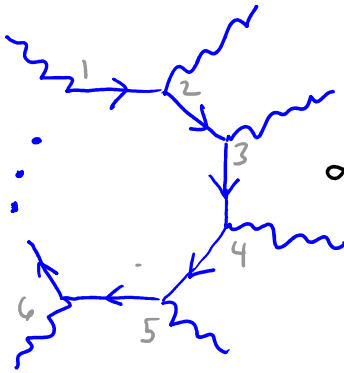


El primer diagrama corresponde a la contracción

$$\langle k_1', k_2' | (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_1} (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_2} (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_3} (\hat{\bar{\Psi}} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_4} | k_1, k_2 \rangle$$

propagador fermiónico  $P_F$  es  $\hat{\bar{\Psi}} \hat{\Psi} = -\hat{\Psi} \hat{\bar{\Psi}} \Rightarrow$  signo: -

Claramente esto mismo se repite en el resto de los diagramas, y de hecho, en cualquier lazo fermiónico:



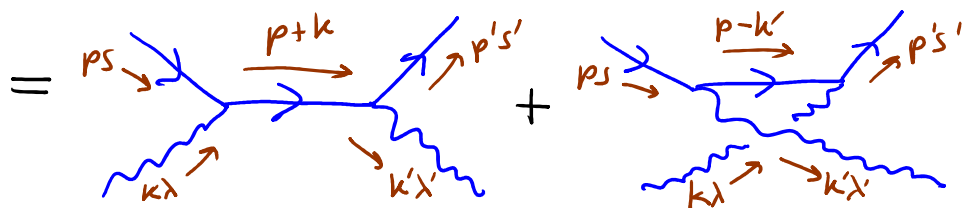
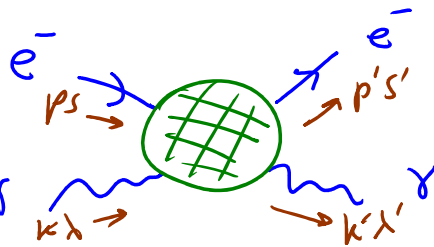
$$\propto (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_n} (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_{n-1}} \cdots (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_2} (\hat{\Psi} \hat{A} \hat{\Psi})_{y_1}$$

crusa un número impar de operadores fermiónicos para colocarse a la extrema izquierda, formando  $\hat{\Psi}_{y_1} \hat{\Psi}_{y_n} = D_F(y_1, y_n)$ .

==

Nuestro último ejemplo será el proceso de 'dispersión de Compton',  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ :

$i\mathcal{M}(pk \rightarrow p'k') =$



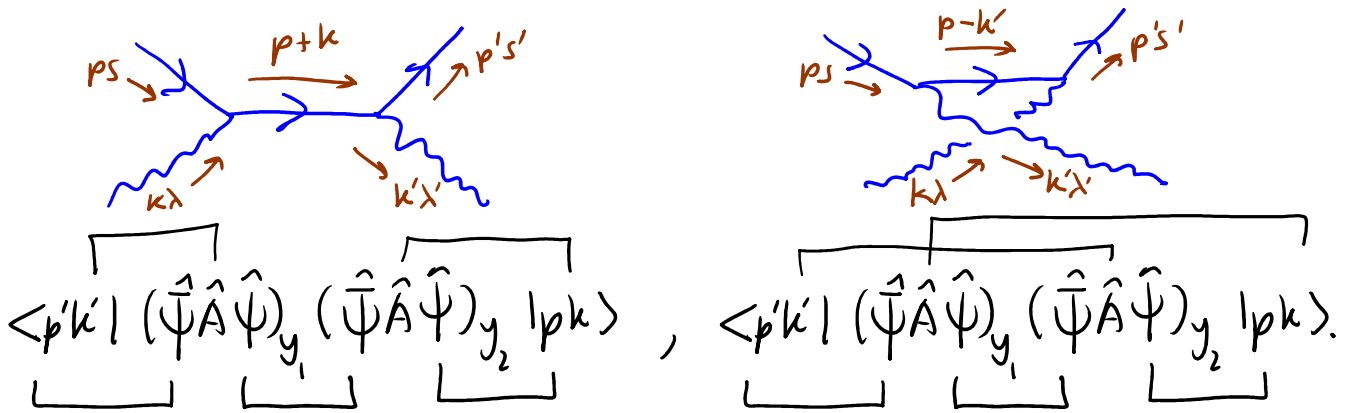
2 nove de des

que se traduce en

$$iM(p, k \rightarrow p', k') = + \bar{u}_{p'}^{s'} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u_p^s (\epsilon_{k\lambda})_\nu (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_\mu$$

$$+ \bar{u}_{p'}^{s'} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u_p^s (\epsilon_{k\lambda})_\mu (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_\nu$$

donde el signo de los 2 diagramas queda determinado por



Factorizando los espinores y los vectores de polarización que aparecen en ambos términos, tenemos

$$iM = -ie^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_\mu (\epsilon_{k\lambda})_\nu \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u_p^s$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cancel{p^2 + 2p \cdot k + k^2 - m^2}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\cancel{p^2 - 2p \cdot k' + k'^2 - m^2}}$

Usando  $\underbrace{(\not{p} + m)}_{p_\rho \gamma^\rho} \gamma^\nu u_p^s = (-\gamma^\nu \not{p} + \underbrace{p_\rho \{\gamma^\rho, \gamma^\nu\}}_{2\eta^{\rho\nu}} + \gamma^\nu m) u_p^s$

$$= 2p^\nu u_p^s - \underbrace{\gamma^\nu (\not{p} - m)}_{=0} u_p^s \quad \text{ec. de Dirac}$$



podemos reescribir

$$iM = -ie^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)_{\mu} (\epsilon_{k\lambda})_{\nu} \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \frac{2\gamma^{\mu\nu} \not{p}' + \gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\nu}}{2p \cdot k} + \frac{2\gamma^{\nu\mu} \not{p} - \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu}}{-2p \cdot k'} \right] u_p^s.$$

Con esto podemos calcular  $|M|^2$ , promediar sobre el espín  $s$  del electrón inicial, y sumar sobre el espín  $s'$  del electrón final, como aprendimos a hacer desde nuestro primer ejemplo.

La novedad en este proceso es que tenemos además partículas externas de fotones. Al igual que para los electrones, supondremos que el experimento se realiza con fotones no polarizados, así que promediaremos sobre la helicidad  $\lambda$  del fotón inicial y sumaremos sobre la helicidad  $\lambda'$  del fotón final.

Antes de hacer esto, nos conviene recordar que el formalismo debe ser invariante bajo transformaciones de norma,

$$\hat{A}_{\mu}(x) \simeq \hat{A}'_{\mu}(x) = \hat{A}_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \hat{\Theta}(x),$$

que, como vimos en las pp. 307-8, corresponde en espacio de momentos

$$\hat{A}^{\mu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left( e^{-ik \cdot x} \hat{a}_{k\lambda} \epsilon_{k\lambda}^{\mu} + e^{ik \cdot x} \hat{a}_{k\lambda}^{\dagger} \epsilon_{k\lambda}^{\mu*} \right)$$

$$a \quad \boxed{\epsilon_{k\lambda}^{\mu} \simeq \epsilon'_{k\lambda}{}^{\mu} = \epsilon_{k\lambda}^{\mu} + c k^{\mu}},$$

con  $C$  una constante arbitraria. Si escribimos nuestra amplitud en la forma

$$i\mathcal{M}(pk \rightarrow p'k') \equiv (\epsilon_{\mu\nu}^*)_{\rho} (\epsilon_{\mu\nu})_{\nu} \underbrace{iM^{\mu\nu}(k', k; p, p')}_{\text{diagramas sin incluir los factores asociados a las patas externas de fotón}}$$

diagramas sin incluir los factores asociados a las patas externas de fotón

entonces por invariancia de norma debemos tener

$$\boxed{k'_{\mu} M^{\mu\nu}(k', k) = 0 = k_{\nu} M^{\mu\nu}(k', k)} \quad \text{Identidad de Ward}$$

Y evidentemente tendríamos este mismo resultado con cualquier

número de fotones externos:  $(k_n)_{\mu_n} M^{\mu_1 \mu_2 \dots}(k_1, k_2, \dots) = 0 \quad \forall n.$

[42: 21/11/22]

En nuestro caso particular, podemos verificar que la identidad de Ward en verdad se cumple. P.ej., si en  $i\mathcal{M}(pk \rightarrow p'k')$

reemplazamos  $(\epsilon_{\mu\nu})_{\nu} \rightarrow k_{\nu}$ , nos queda una expresión

$$\propto \bar{u}_{p'}^s \left[ \frac{2\gamma^{\mu} k \cdot p + \gamma^{\mu} \cancel{k} \cancel{k}}{2p \cdot k} + \frac{2\cancel{k} p^{\mu} - \cancel{k} \cancel{k}' \gamma^{\mu}}{-2p \cdot k'} \right] u_p^s$$

$\rightarrow \cancel{k} \cancel{k} = k_{\rho} k_{\lambda} \frac{1}{2} \{\gamma^{\rho}, \gamma^{\lambda}\} = k_{\rho} k_{\lambda} \eta^{\rho\lambda} = k^2 = 0$

$\rightarrow \cancel{k} \cancel{k}' \stackrel{p+k=p'+k'}{=} (\cancel{p} + \cancel{k}' - \cancel{p}) \cancel{k}'$

es decir,

$$\propto \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \frac{2\gamma^\mu k \cdot p}{2p \cdot k} + \frac{2k \cdot p^\mu - \cancel{p'} \cancel{k}' \gamma^\mu + \cancel{p} \cancel{k}' \gamma^\mu}{-2p \cdot k'} \right] u_p^s$$

→  $\cancel{p}'$  actuando hacia la izquierda sobre  $\bar{u}_{p'}^{s'}$  puede reemplazarse con  $m$ , por la ec. de Dirac

$$\bar{u}_{p'}^{s'} (\cancel{p}' - m) = 0$$

$$\cancel{p} \cancel{k}' \gamma^\mu = p_\rho k'_\sigma (\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} - \gamma^\sigma \gamma^\rho) \gamma^\mu$$

$$= 2p \cdot k' \gamma^\mu - \cancel{k}' \cancel{p} \gamma^\mu$$

$$= 2p \cdot k' \gamma^\mu - \cancel{k}'_\rho (\{\gamma^\rho, \gamma^\mu\} - \gamma^\mu \gamma^\rho)$$

$$= 2p \cdot k' \gamma^\mu - 2\cancel{k}' \cdot p^\mu + \cancel{k}' \gamma^\mu \cancel{p}$$

$\cancel{p}$  actuando sobre  $u_p^s$  hacia la derecha puede reemplazarse con  $m$ , por la

$$\text{ec. de Dirac } (\cancel{p} - m) u_p^s = 0$$

$$= \bar{u}_{p'}^{s'} \left[ \gamma^\mu + \frac{-m \cancel{k}' \gamma^\mu + 2p \cdot k' \gamma^\mu - 2\cancel{k}' \cdot p^\mu + \cancel{k}' \gamma^\mu m + 2k \cdot p^\mu}{-2p \cdot k'} \right] u_p^s$$

se cancelan

$$= \left( \frac{p^\mu}{p \cdot k'} \right) \bar{u}_{p'}^{s'} [\cancel{k}' - \cancel{k}] u_p^s \stackrel{p+k=p'+k'}{\propto} \bar{u}_{p'}^{s'} [\cancel{p} - \cancel{p}'] u_p^s$$

$$\stackrel{\text{Dirac}}{=} \bar{u}_{p'}^{s'} [m - m] u_p^s = 0. \checkmark$$

Este resultado expresa que el fotón se acopla a una corriente conservada.

Vale la pena resaltar que, en general, en la expansión perturbativa la identidad de Ward se satisface no en cada diagrama por separado, sino solo después de haber realizado la suma de diagramas hasta un orden dado.

Habiendo entendido esto, podemos ver que al tomar

$$|M|^2 = \left| (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k\lambda})^\nu M_{\mu\nu}(k',k) \right|^2$$

y suman sobre las 2 posibles polarizaciones de los fotones (transversales, por tratarse de fotones reales), tendremos

$$\sum_{\lambda',\lambda=1}^2 |M|^2 = \sum_{\lambda'=1}^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k'\lambda'})^\rho \sum_{\lambda=1}^2 (\epsilon_{k\lambda})^\nu (\epsilon_{k\lambda}^*)^\sigma M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}^*$$

$$\stackrel{p. 348}{=} P^{\mu\rho}(\vec{k}') \stackrel{p. 351}{=} -\eta^{\mu\rho} + \frac{k'^0 (k'^\mu \delta_0^\rho) - k'^\mu k'^\rho - k'^2 \delta_0^\mu \delta_0^\rho}{|\vec{k}'|^2}$$

matriz que proyecta sobre 3 vectores ortogonales a  $\vec{k}'$

por la identidad de Ward se anula al multiplicar por  $M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}^*$

así que en este contexto podemos reemplazar

$$P^{\mu\rho}(\vec{k}') = \sum_{\lambda'=1}^2 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k'\lambda'})^\rho \rightarrow -\eta^{\mu\rho} = \sum_{\lambda'=0}^3 (\epsilon_{k'\lambda'}^*)^\mu (\epsilon_{k'\lambda'})^\rho$$