

A partir de la definición que dimos en la p. 457, la sección eficaz diferencial (que integrada sobre cierto rango de momentos nos daría la sección eficaz a secas) está dada por

$$d\sigma = \frac{\text{tasa diferencial para los eventos de interés}}{(\text{flujo de partículas incidentes}) N_B}$$

$$\rho_H |\vec{v}_H| = \frac{N_H}{V} |\vec{v}_H|$$

Puesto que nosotros estamos trabajando con $N_H = 1 = N_B$, esto se traduce en (tomando arbitrariamente $H \rightarrow 1, B \rightarrow 2$)

$$d\sigma = \frac{d\Gamma_{i \rightarrow f} \pm d\Omega}{\frac{1}{V} |\vec{v}_1| \cdot 1} = \frac{d\Omega}{|\vec{v}_1|} \frac{|M_{i \rightarrow f}|^2}{2E_1 2E_2 V}$$

es decir,

$$d\sigma = \frac{d\Omega}{4E_1 |\vec{v}_1| m_2} |M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N)|^2$$

↑ m_2 , porque estamos considerando B en reposo

$|\vec{v}_1|$, puesto que a partir de $E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2}$, la velocidad (de grupo) de la partícula es $\vec{v}_1 = \frac{\partial E_1}{\partial \vec{p}_1} = \frac{\vec{p}_1}{E_1}$.

$$\leftrightarrow \vec{p}_1 = \frac{m_1 \vec{v}_1}{\sqrt{1 - v_1^2}}$$

Obtuvimos esta fórmula en el marco de referencia "del laboratorio", donde la partícula 2 (el 'blanco') está en reposo ($\vec{v}_2 = \frac{\vec{p}_2}{E_2} = 0$). Pero notemos que, en este marco, el factor que aparece en el denominador de $d\sigma$ se puede reescribir en la forma

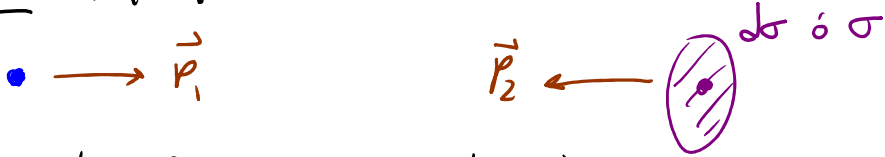
$$\begin{aligned} 4|\vec{p}_1| m_2 &= 4 \sqrt{(E_1^2 - m_1^2) m_2^2} \\ &= 4 \sqrt{[(E_1, m_2) - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2]_{\substack{\uparrow \\ E_2}}^2 - m_1^2 m_2^2} \\ &= 4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \end{aligned}$$

y esta última versión es invariante bajo Lorentz. La fórmula

$$d\sigma = d\pi'_N \frac{|M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N)|^2}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}$$

es válida entonces en cualquier marco de referencia conectado con el "marco del laboratorio" ($\vec{v}_2 = 0$) a través de un empujón en la dirección de $\vec{v}_1 = \frac{\vec{p}_1}{E_1}$, es decir, en cualquier marco de referencia donde los momentos \vec{p}_1 y \vec{p}_2 sean colineales ($\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$), porque al ser la sección eficaz $d\sigma$ (ó σ) un área transversa a este

tipo de empujones, tiene en todos estos marcos el mismo valor:



(Bajo transformaciones de Lorentz más generales, $d\sigma$ no es invariante, sino que transforma como un área transversal a la \vec{v}_i del marco de laboratorio.)

Para $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ podemos simplificar

$$\begin{aligned} \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} &= \sqrt{(E_1 E_2)^2 + (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 - 2E_1 E_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - (E_1^2 - \vec{p}_1^2)(E_2^2 - \vec{p}_2^2)} \\ &= E_1 E_2 \sqrt{\frac{\vec{p}_1^2}{E_1^2} + \frac{\vec{p}_2^2}{E_2^2} - \frac{2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{E_1 E_2}} \\ &= E_1 E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| \\ &= E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \end{aligned}$$

velocidad relativa en el marco lineal en cuestión

y obtenemos finalmente

$$d\sigma = \int \pi'_N \frac{|M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N)|^2}{4E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}$$

$$\uparrow = \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \dots \frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3 2E'_N} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N) \quad p. 460$$

En particular, en el "marco del centro de masa", donde $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$,

$$E_1 E_2 \underbrace{\left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|}_{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \underbrace{|\vec{p}_1 E_2 - \vec{p}_2 E_1|}_{+\vec{p}_1} = |\vec{p}_1| \underbrace{(E_2 + E_1)}_{\equiv E_{CM}} \leftarrow \text{energía total en este marco}$$

Para el caso muy común de dispersión $1+2 \rightarrow 1'+2'$, podemos además simplificar la integral sobre el espacio fase invariante en este mismo marco (del centro de masa):

$$\begin{aligned} \int d\pi'_2 &= \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} (2\pi)^4 \delta(E_{CM} - E'_1 - E'_2) \delta^{(3)}(\vec{0} - \vec{p}'_1 - \vec{p}'_2) \\ &\Rightarrow \vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1 \\ &= \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 4 \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_1^2} \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_2^2}} 2\pi \delta(E_{CM} - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_2^2}), \end{aligned}$$

que pasando a coordenadas esféricas $\vec{p}'_1 \rightarrow (|\vec{p}'_1|, \theta', \phi')$,

donde $d^3 p'_1 = |\vec{p}'_1|^2 d|\vec{p}'_1| \underbrace{\sin\theta' d\theta' d\phi'}_{\equiv d\Omega'}$, se convierte en

$$\int d\pi'_2 = \int \frac{|\vec{p}'_1|^2 d|\vec{p}'_1| d\Omega'}{(2\pi)^2 4 \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_1^2} \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_2^2}} \frac{\delta(|\vec{p}'_1| - p'_{1*})}{\left| \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_1} + \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_2} \right|} \left| \frac{\partial(E_{CM} - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_1^2} - \sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m_2^2})}{\partial |\vec{p}'_1|} \right|$$

valor que hace que $E'_2 = E_{CM} - E'_1$,

lo cual se reduce a \leftarrow en valor apropiado por conservación

$$\int d\Omega'_2 = \int \frac{d\Omega'}{4(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}'_1|^2}{E'_1 E'_2} \frac{1}{\left(\frac{|\vec{p}'_1|}{E'_1} + \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_2}\right)} = \int \frac{d\Omega'}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{\underbrace{(E'_2 + E'_1)}_{E_{CM}}}$$

Juntamos estos 2 resultados en nuestra fórmula,

$$d\sigma = d\Omega'_2 \frac{|M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2)|^2}{4E_1 E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|} \quad \leftarrow \text{el cualquier marco colineal}$$

$$= \frac{d\Omega'}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{E_{CM}} \frac{|M|^2}{4|\vec{p}'_1| E_{CM}}, \quad \leftarrow \text{en el marco del centro de masa}$$

concluimos finalmente que la sección eficaz diferencial por unidad de ángulo sólido en el marco del centro de masa es

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{|\vec{p}_1|} |M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2)|^2.$$

Si además las 4 partículas tienen la misma masa m (lo cual aplica en particular si $E_{CM} \gg m_n \forall n$, porque entonces $m_n \approx 0$),

la condición $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \Rightarrow 2\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m^2} = 2\sqrt{|\vec{p}'_1|^2 + m^2}$ implica que $|\vec{p}_1| = |\vec{p}'_1|$, y obtenemos la fórmula simplificada

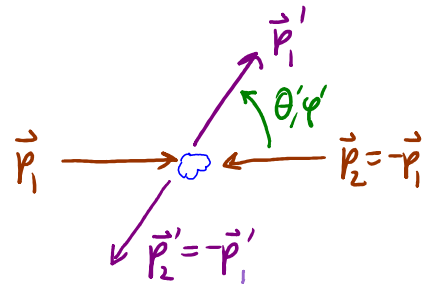
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{cm} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} .$$

Pej., en la teoría φ^4 habíamos ya determinado (en la p. 455) que

$$iM(p_1 p_2 \rightarrow p'_1 p'_2) = -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) ,$$

así que en ese caso

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{cm} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) .$$



De aquí podemos obtener la sección eficaz total integrando sobre el ángulo sólido $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$ y dividiendo entre 2 para tener en cuenta que las 2 partículas en el estado final son idénticas (por lo que al integrar sobre todos los θ', φ' estaríamos contando doble) :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \int d\Omega' \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{cm} = \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin\theta' d\theta' d\varphi'}_{4\pi} \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi E_{cm}^2} . \end{aligned}$$

139:14/11/22 138-17: 09/11/18

Como ya habíamos dicho, desde la perspectiva experimental son de interés no solo procesos de dispersión $|12\rangle \rightarrow |1'+\dots+N'\rangle$, sino también $|1\rangle \rightarrow |1'+\dots+N'\rangle$, que corresponden al decaimiento de una partícula inestable. En este segundo caso la cantidad física que uno necesita calcular es la tasa de decaimiento

$$\boxed{d\Gamma \equiv \frac{(\# \text{ de decaimientos})/T}{\# \text{ de partículas inestables}}} \quad (\Rightarrow [d\Gamma] = L^{-1})$$

Esta tasa se llama "parcial" o "total" dependiendo de si restringimos o no nuestra atención a decaimientos donde el estado final $|1'+\dots+N'\rangle$ es de un tipo específico dado.

A partir de la tasa de decaimiento total $\Gamma_{\text{tot}} \equiv \int d\Gamma_{\text{tot}}$, la vida media de la partícula se define como

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}} \quad (\Leftrightarrow N_{\text{sobrevivientes}}(t) = N_0 e^{-t/\tau})$$

En la p. 460 habíamos ya obtenido una fórmula para la tasa diferencial,

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i \rightarrow f \pm \delta f} &= \frac{dP_{i \rightarrow f \pm \delta f}}{T} = \frac{|\langle f|i \rangle|^2}{\langle i|i \rangle \langle f|f \rangle} \frac{dN_{f \pm \delta f}}{T} \\ &= d\pi'_N \frac{\sqrt{T}}{T} \frac{|M_{i \rightarrow f}|^2}{2E_f V}, \end{aligned}$$

donde estamos tomando en cuenta que ahora hay solo 1 partícula en el estado inicial $|i\rangle$. En el marco donde la partícula inestable está en reposo, la tasa de decaimiento diferencial (que integrada nos dará la tasa de decaimiento a secas) estaría entonces dada por

$$d\Gamma = d\pi'_N \frac{|M|^2}{2m_i}.$$

Esta fórmula es correcta (si $\Gamma \ll m_i$), pero su deducción se complica por el hecho de que una partícula inestable en realidad NO puede ser considerada como un estado asintótico (cuya definición requiere tomar $t \rightarrow -\infty$), sino que debe entenderse más correctamente como un estado intermedio en un proceso de dispersión

$l' + \dots + N' \xrightarrow{\text{resonancia}} l \rightarrow l' + \dots + N'$ (\Leftrightarrow polo fuera del eje real)

p.ej. $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$

[ver p.ej. Peskin 7.3, Srednicki 25].

L36: 03/05/17

Para poder decir algo respecto a este proceso, una buena mano de un resultado que es importante en sí misma y represente una generalización del teorema óptico habitual.

Notemos que la unitariedad del operador de dispersión

$$\hat{S} = \hat{1} + i\hat{T}, \quad \hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{1}, \quad \text{implica que}$$

$$(\hat{1} - i\hat{T}^\dagger)(\hat{1} + i\hat{T}) = \hat{1} \Rightarrow -i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) = \hat{T}^\dagger \hat{T}.$$

Tomando el elemento de matriz entre un estado inicial $|p_1 \dots p_N\rangle \equiv |i\rangle$ y un estado final $|p'_1 \dots p'_N\rangle \equiv |f\rangle$, vemos que

$$-i\langle f | \hat{T} | i \rangle + i\langle f | \hat{T}^\dagger | i \rangle = \langle f | \hat{T}^\dagger \hat{T} | i \rangle$$

no confundir
insertar
estados multipartículas

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left(\int \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}_j}} \right)$$

$$\equiv \sum_{\mathbb{I}} |\mathbb{I}\rangle\langle\mathbb{I}|$$

Es decir,

$$-i\langle f | \hat{T} | i \rangle + i\langle i | \hat{T} | f \rangle^* = \sum_{\mathbb{I}} \underbrace{\langle f | \hat{T}^\dagger | \mathbb{I} \rangle}_{\langle \mathbb{I} | \hat{T} | f \rangle^*} \langle \mathbb{I} | \hat{T} | i \rangle.$$

En términos de \mathcal{M} 's, esta ecuación dice que

6. Procesos a Nivel Árbol en Electrodinámica Cuántica

Para generalizar la expansión perturbativa al caso del campo de Dirac $\hat{\psi}(x)$, en primer lugar es importante recordar que el orden temporal se define con signos menos adicionales por cada transposición de operadores fermiónicos. P.ej.,

$$T\{\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x')\} = \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ -\hat{\psi}(x')\hat{\psi}(x) & \text{si } x^0 < x'^0 \end{cases},$$

ó

$$T\{\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_3)\hat{\psi}(x_4)\} = (-)^3 \hat{\psi}(x_3)\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_4)\hat{\psi}(x_2)$$

si $x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$.

El orden normal se define de manera análoga, y para el

operador de campo en el cuadro de interacción, tenemos entonces

$$T\{\hat{\psi}_I(x_1)\hat{\psi}_I(x_2)\} = \theta(x_1^0 - x_2^0) \left[\hat{\psi}_{I1}^- \hat{\psi}_{I2}^- + \hat{\psi}_{I1}^+ \hat{\psi}_{I2}^+ + \hat{\psi}_{I1}^- \hat{\psi}_{I2}^+ - \hat{\psi}_{I2}^- \hat{\psi}_{I1}^+ + \underbrace{\{\hat{\psi}_{I1}^+, \hat{\psi}_{I2}^-\}}_{\text{anticomutador}} \right]$$

$$= : \hat{\psi}_{I1} \hat{\psi}_{I2} :$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) \left[-(\hat{\psi}_{I1} \leftrightarrow \hat{\psi}_{I2}) \right].$$

$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s e^{-ip \cdot x_1}$

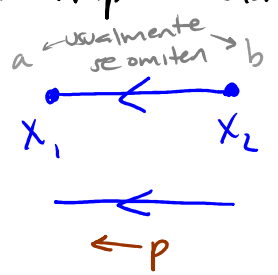
Reagrupando términos, esto dice que

$$\begin{aligned}
T\{\hat{\psi}_{\mathbf{I}}(x_1)\hat{\psi}_{\mathbf{I}}(x_2)\} &= \theta(x_1^0-x_2^0) : \hat{\psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\psi}_{\mathbf{I}2} : + \theta(x_2^0-x_1^0) : \underbrace{-\hat{\psi}_{\mathbf{I}2} \hat{\psi}_{\mathbf{I}1}}_{: \hat{\psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\psi}_{\mathbf{I}2} :} : \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{: \hat{\psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\psi}_{\mathbf{I}2} :} \\
&+ \theta(x_1^0-x_2^0) \{\hat{\psi}_{\mathbf{I}1}^+, \hat{\psi}_{\mathbf{I}2}^-\} - \theta(x_2^0-x_1^0) \{\hat{\psi}_{\mathbf{I}2}^+, \hat{\psi}_{\mathbf{I}1}^-\} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \hat{\psi}_{\mathbf{I}}(x_1) \hat{\psi}_{\mathbf{I}}(x_2)} \\
&= \langle 0 | T\{\hat{\psi}_{\mathbf{I}}(x_1) \hat{\psi}_{\mathbf{I}}(x_2)\} | 0 \rangle \\
&\stackrel{p.222}{=} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot (x_1 - x_2)} \underbrace{\frac{i(p+m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}}_{\frac{i}{p - m_0} = \tilde{D}_F(p) \neq \tilde{D}_F(-p)} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{D_F(x_1 - x_2) \neq D_F(x_2 - x_1)}
\end{aligned}$$

O, en resumen,

$$T\{\hat{\psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\psi}_{\mathbf{I}2}\} = : \hat{\psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\psi}_{\mathbf{I}2} + \underbrace{\hat{\psi}_{\mathbf{I}1} \hat{\psi}_{\mathbf{I}2}} : .$$

En los diagramas, representaremos al propagador libre como una línea con una flecha en la dirección en que se propagará la partícula (dirección que, como sabemos, es contraria a la de la antipartícula). Es decir,



$\hat{a} + \hat{b}^+$ aniquila partícula
 $\hat{a}^+ + \hat{b}$ crea partícula

$$\equiv D_F(x_1 - x_2) = \langle 0 | T \{ \hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2} \} | 0 \rangle,$$

con índices espinoriales ab asociados a los extremos

$$\equiv \tilde{D}_F(p).$$

Dado que En los libros, normalmente $S_F(x_1 - x_2), \tilde{S}_F(p)$

$$T \{ \hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2} \} = : \hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2} :, \quad T \{ \hat{\bar{\Psi}}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \} = : \hat{\bar{\Psi}}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} :,$$

anticomutan

no hay contracciones posibles entre $\hat{\Psi}_I$ y $\hat{\Psi}_I$ ó $\hat{\bar{\Psi}}_I$ y $\hat{\bar{\Psi}}_I$

(o, en otras palabras, podemos definir

$$\underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\Psi}_{I2}} = 0 = \underbrace{\hat{\bar{\Psi}}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2}}).$$

Con estas convenciones, el teorema de Wick se escribe igual

que antes: suma sobre cualquier número de contracciones

$$T \{ \hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots \} = : \hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots + \underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots}_{\dots} + \underbrace{\hat{\Psi}_{I1} \hat{\bar{\Psi}}_{I2} \hat{\bar{\Psi}}_{I3} \hat{\Psi}_{I4} \dots}_{\dots} + \dots : ,$$

donde debemos tener presente los posibles signos fermiónicos,

como p.ej.,
$$: \underbrace{\hat{\Psi}_{I_1} \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_3} \hat{\Psi}_{I_4} \dots}_{\text{signos}} : = - \underset{\uparrow}{D_F(x_1-x_3)} : \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_4} \dots : ,$$

$$: \hat{\Psi}_{I_1} \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_3} \hat{\Psi}_{I_4} \dots : = - : \hat{\Psi}_{I_1} \hat{\Psi}_{I_2} \hat{\Psi}_{I_4} \hat{\Psi}_{I_3} \dots : = - \underset{\uparrow}{D_F(x_1-x_2)} \underset{\uparrow}{D_F(x_4-x_3)} : \dots :$$

Con el teorema de Wick podemos, como antes, calcular cualquier función de correlación en la teoría interactiva.

Al considerar amplitudes de dispersión a partir de

la fórmula que presentamos en la p.448,

partícula n ó antipartícula \bar{n}

$$\langle p'_1, n'_1, s'_1, \dots, p'_N, n'_N, s'_N ; - | p_1, n_1, s_1, \dots, p_N, n_N, s_N ; + \rangle = \sqrt{z'_1} \dots \sqrt{z'_N} \sqrt{z_1} \dots \sqrt{z_N}$$

↑ etiquetas asociadas al espín λ (p.276)

$$\times \left(\int_{\mathbb{I}} \langle p'_1, n'_1, s'_1, \dots, p'_N, n'_N, s'_N | T \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{int}^{\pm}(y) \right] \right\} | p_1, n_1, s_1, \dots, p_N, n_N, s_N \rangle_{\mathbb{I}} \right)_{\text{parte conexa y amputada}}$$

encontramos factores adicionales en las patas externas:

a diferencia de $\hat{\Psi}_{\mathbb{I}}^{\pm}(y) | \vec{p} \rangle = e^{-ip \cdot y} | 0 \rangle$, tenemos aquí

$$\hat{\Psi}_{\mathbb{I}}^{\pm}(y) | \vec{p}, n, s \rangle = \left(\int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} u_{\vec{p}'}^{s'} e^{-ip' \cdot y} \right) \left(\sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} | 0 \rangle \right)$$

↑ partícula

→ $\{ \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'}, \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta^{ss'}$

es decir,
$$\hat{\Psi}_{\mathbb{I}}^{\pm}(y) | \vec{p}, n, s \rangle = e^{-ip \cdot y} \underset{\uparrow}{u_{\vec{p}}^s} | 0 \rangle ,$$

así que definimos la contracción

$$\underbrace{\hat{\Psi}_I(y) | \vec{p}ns \rangle}_{e^{-i\hat{a}\cdot y} + e^{i\hat{b}\cdot y}} \equiv e^{-ip\cdot y} u_{\vec{p}}^s.$$

$$e^{-i\hat{a}\cdot y} + e^{i\hat{b}\cdot y}$$

Al integrar sobre la posición del vértice, $\int d^4y$, la fase contribuye como antes a dar una delta de Dirac que impone la conservación del (cuanti)momento que fluye a través de ese vértice, pero el espínor $u_{\vec{p}}^s$ permanece como un factor que debe asociarse a la parte externa que describe a una partícula entrante. De manera similar,

$$\underbrace{\langle \vec{p}ns | \hat{\Psi}(y)}_{e^{i\hat{a}\cdot y} + e^{-i\hat{b}\cdot y}} \equiv e^{ip\cdot y} \bar{u}_{\vec{p}}^s \quad \text{factor asociado a parte externa de partícula saliente,}$$

$$\underbrace{\hat{\bar{\Psi}}(y) | \vec{p}\bar{n}s \rangle}_{e^{i\hat{a}\cdot y} + e^{-i\hat{b}\cdot y}} \equiv e^{-ip\cdot y} \bar{v}_{\vec{p}}^s \quad \text{parte externa de antipartícula entrante,}$$

$$\underbrace{\langle \vec{p}\bar{n}s | \hat{\bar{\Psi}}(y)}_{e^{-i\hat{a}\cdot y} + e^{i\hat{b}\cdot y}} \equiv e^{ip\cdot y} v_{\vec{p}}^s \quad \text{parte externa de antipartícula saliente.}$$

Para QED, necesitamos además de a $\hat{\Psi}(x)$ al campo vectorial $\hat{A}_\mu(x)$. En la norma de Lorentz, $\partial \cdot A = 0$, usamos

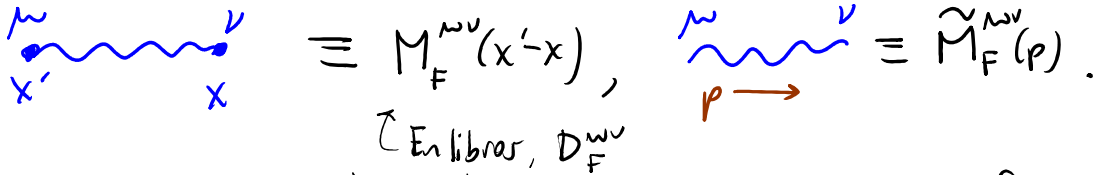
$$\mathcal{L}_{M_L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} J(\partial \cdot A)^2,$$

y eligiendo $J=1$ ("norma de Feynman"), sabemos que el propagador libre está dado por la expresión covariante (p. 352, 59)

$$M_F^{\mu\nu}(x'-x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{A}_I^\mu(x') \hat{A}_I^\nu(x) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \underbrace{\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}}_{\tilde{M}_F^{\mu\nu}(p)}$$

$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \epsilon_{p\lambda}^\mu + c.h.)$
 $\lambda = 0, 1, 2, 3$

Es habitual denotar



Para el caso donde los estados asintóticos incluyen fotones, definiremos las contracciones

$$\hat{A}^\mu(y) | \vec{p} \lambda \rangle \equiv e^{-ip \cdot y} \epsilon_{p\lambda}^\mu$$

\leftarrow parte externa para fotón entrante,
 necesariamente con polarización transversal: $\lambda = 1, 2$

$$\langle \vec{p} \lambda | \hat{A}^\mu(y) \equiv e^{ip \cdot y} \epsilon_{p\lambda}^{\mu*}$$

\leftarrow parte externa para fotón saliente.

$e^{-i\vec{a} \cdot \vec{e}} + e^{i\vec{a} \cdot \vec{e}^*}$

El último ingrediente que nos falta es el vértice de interacción. Dado que

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu \psi)}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\mathcal{L}_{M,L}(\partial_\mu A_\nu)}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{\mathcal{L}_{int}(A_\mu, \psi)}_{-g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}$$

veamos que

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int} = g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

← carga eléctrica

J^μ corriente de Noether
corriente en ec. de Maxwell

de modo que en la expansión perturbativa de

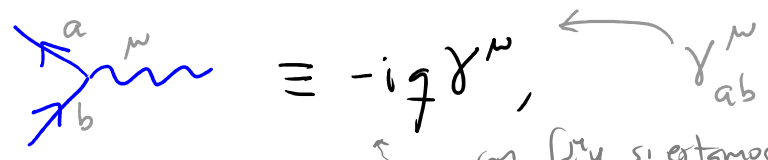
$$\hat{U}_I(-\infty, \infty) = T \left\{ \exp \left[-i \int d^4y \hat{\mathcal{H}}_{int}^\pm(y) \right] \right\}$$

No hay campos repetidos
⇒ no hay prefactor numérico

$\hat{\psi}_\pm \gamma^\mu \hat{\psi}_\pm \hat{A}_{\pm\mu}$
 ← crea/aniquila fotón
 ← aniquila fermión (o crea anti fermión)
 ← crea fermión (o aniquila anti fermión)

obtendremos un vértice de 3 patas,

asociado a un factor analítico que en espacio de momentos es simplemente lo que resta de $-i\hat{\mathcal{H}}_{int}^\pm$ tras omitir los campos:



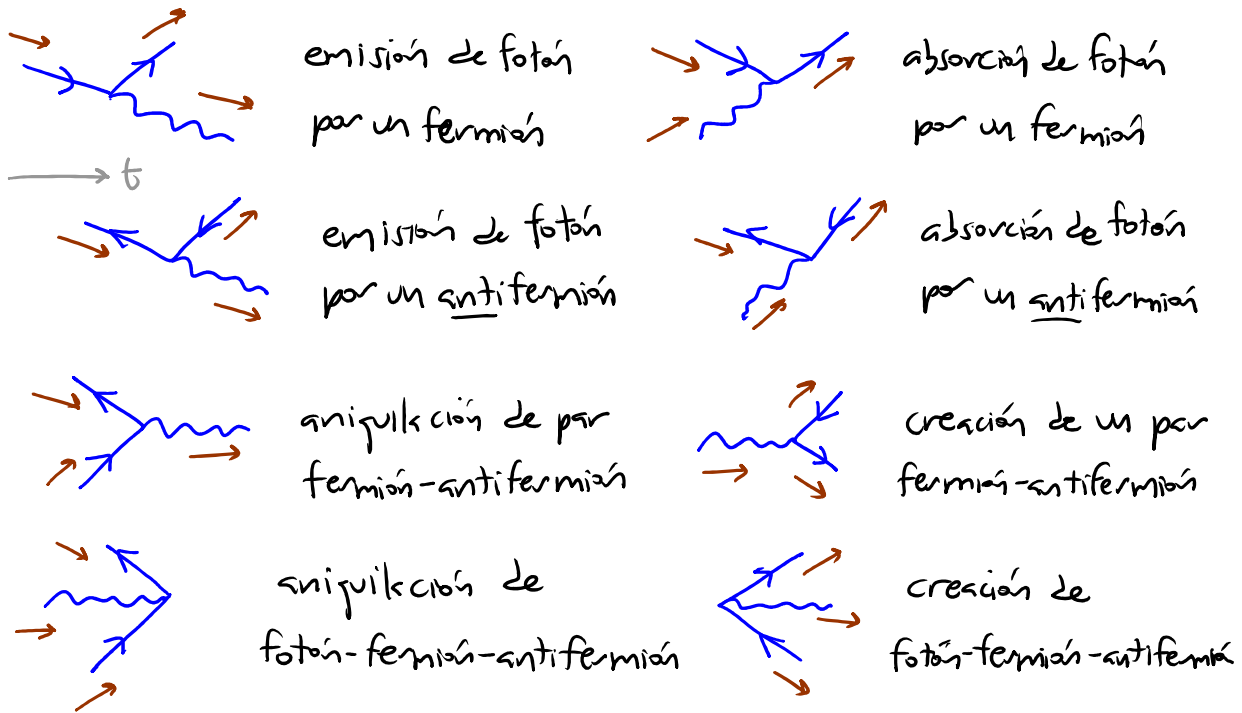
donde g es entonces la constante de acoplamiento de QED,
 ← en $\int d^4y$ si estamos en espacio de posiciones

$g = e = -|e|$ para el electrón/positrón, muón/antimuón o tauón/antitauón.

En Campos II veremos que, justo como $m_0^2 \neq m^2$, en realidad la carga

desnuda g_0 que aparece en el vértice difiere de la carga física g
 ← acoplamiento entre "partículas"
 ← acoplamiento entre partículas g
 por correcciones cuánticas, pero $g_0 = g$ a orden más bajo.

Dependiendo de cómo estén orientadas sus patas con respecto a la dirección del tiempo, este vértice puede describir a cualquiera de 8 procesos físicos:



Una buena noticia es que en QED, a nivel ya de los diagramas convexos (como en amplitudes de dispersión), No hay factores de simetría: las 3 patas del vértice se refieren a operadores distintos (por lo cual no incluimos un factor de $1/3!$ en la normalización de \mathcal{L}_{int}), y en ausencia de burbujas de vacío no habrá vértices intercambiables.


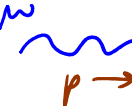
Uo: 16/11/20

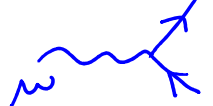
L37: 05/05/17

Resumiendo, las reglas de Feynman en espacio de momentos

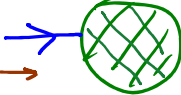
para amplitudes de dispersión en QED son:

0) Sumar sobre todos los diagramas convexos y amputados.

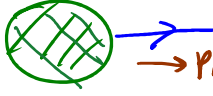
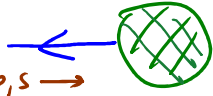
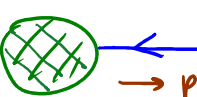
1) Propagadores:  $\equiv \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$,  $\equiv \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$
 ↖ $= m^2$ a orden más bajo

2) Vértice:  $\equiv -ig \gamma_0^\mu$, imponiendo conservación de momento
 ↖ $= g$ a orden más bajo

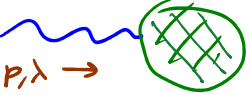
3) Partes externas (que, de ahora en adelante, por simplicidad ya no dibujaremos como líneas punteadas):

 $\equiv \sqrt{Z_2} u_p^s$ fermión entrante (p.ej. electrón)
 ↖ factor de renormalización del fermión = 1 a orden más bajo

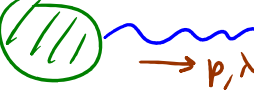
$$\left(\langle \Omega | \hat{\Psi}_H(0) | \vec{p}, s \rangle \equiv \sqrt{Z_2} u_p^s \leftrightarrow \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\Psi}_H(x) \hat{\Psi}_H^\dagger(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \right)$$

 $\equiv \sqrt{Z_2} \bar{u}_p^s$ fermión saliente
 $\equiv \sqrt{Z_2} \bar{v}_p^s$ antifermión entrante (p.ej., antielectrón)
 $\equiv \sqrt{Z_2} v_p^s$ antifermión saliente

← si fields en parte externa apunta hacia afuera del diagrama, tenemos espinor conjugado de Dirac

 $\equiv \sqrt{Z_3} \epsilon_{\vec{p}\lambda}^\mu$ fotón entrante
 ↖ factor de renormalización del fotón = 1 a orden más bajo

$$\left(\langle \Omega | \hat{A}_H^\mu(0) | \vec{p}, \lambda \rangle \equiv \sqrt{Z_3} \epsilon_{\vec{p}\lambda}^\mu \leftrightarrow \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{A}_H^\mu(x) \hat{A}_H^\nu(0) \} | \Omega \rangle = \frac{-i Z_3 \eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} + \dots \right)$$

 $\equiv \sqrt{Z_3} \epsilon_{\vec{p}\lambda}^{\mu*}$ fotón saliente

4) Multipliquen partes e integrar $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ sobre momentos indeterminados (uno por cada lazo).

5) Determinar el signo del diagrama (al sumar los distintos diagramas, los signos relativos son importantes).

29.17: 12/11/18

Como ejemplo, analicemos el proceso de dispersión $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$.
 ¡como en LEP!

Un caso así involucra a 2 distintos campos de Dirac, $\Psi_{(e)}$ y $\Psi_{(\mu)}$,
 no es subíndice vectorial
 no es subíndice espinorial
 con diferentes masas pero ambas acoplan al mismo campo electromagnético A_μ , con la misma carga $q = e = -|e|$:

$$\mathcal{L}_{QED}^{(e,\mu)} = \bar{\Psi}_{(e)} (i\not{\partial} - m_{e0}) \Psi_{(e)} + \bar{\Psi}_{(\mu)} (i\not{\partial} - m_{\mu 0}) \Psi_{(\mu)} - \frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2 - e_0 \bar{\Psi}_{(e)} \gamma^\mu \Psi_{(e)} A_\mu - e_0 \bar{\Psi}_{(\mu)} \gamma^\mu \Psi_{(\mu)} A_\mu .$$

términos tipo $\bar{\Psi}_{(e)} \gamma^\mu \Psi_{(\mu)} A_\mu$ también serían constantes; pero no figuran en QED

Para los diagramas, conviene entonces distinguir de alguna forma entre los propagadores del electrón \rightarrow y del muón \Rightarrow .

Y tenemos también 2 vértices  , que

se refieren a procesos físicos distintos, pero están asociados al mismo factor analítico $-ie_0 \gamma^\mu$.

$\uparrow = e$ a orden más bajo