

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots) \xrightarrow[p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1}]{i\sqrt{z}} \frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \int d^4x_2 \dots e^{ip_2 \cdot x_2} \dots \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

Vemos entonces que, al llevar a  $p_1^0$  a la capa de masa así,  
 encontramos un polo en cuyo residuo se ha reemplazado a  $\int d^4x_1 e^{ip_1 \cdot x_1} \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) \dots$  por el estado de 1 partícula saliente  $\langle \vec{p}_1 |$ .  
← por región  $x_1^0 \rightarrow +\infty$  en  $\int d^4x_1$       ← futuro remoto

L36: 05/11/18      L33: 26/04/17

De manera similar, podemos considerar, p.ej., la región de integración  $x_N^0 < \min(x_{n < N}^0) \equiv t'$  en este mismo término, donde

$$T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_{N-1}) \hat{\varphi}_H(x_N) \} = T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_{N-1}) \} \hat{\varphi}_H(x_N)$$

y tenemos por tanto ↑ insertar ↓

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots p_N) \sim \frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \int d^4x_2 \dots d^4x_N e^{ip_2 \cdot x_2} \dots e^{ip_N \cdot x_N} \cdot \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t' - x_N^0)}}{\omega + i\epsilon} \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_{N-1}) \} | \epsilon_{\vec{q}} \rangle \langle \epsilon_{\vec{q}} | \hat{\varphi}_H(x_N) | \Omega \rangle + \dots$$

$$\underbrace{\theta(t' - x_N^0)}_{\theta(t' - x_N^0)} \underbrace{\langle \epsilon_{\vec{q}} | \hat{\varphi}_H(0) | \Omega \rangle e^{i\vec{q} \cdot x_N}}_{\substack{\vec{q} = E_{\vec{q}} \\ \vec{q} = E_{\vec{q}}}}$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} dx_N^0 e^{ix_N^0 (p_N^0 + \omega + E_{\vec{q}})} \int d^3x_N e^{-i\vec{x}_N \cdot (\vec{p}_N + \vec{q})} = (2\pi)^4 \delta(p_N^0 + \omega + E_{\vec{q}}) \delta^{(3)}(\vec{p}_N + \vec{q})$$

que diverge ahora cuando  $p_N^0 \rightarrow \uparrow -E_{\vec{q}}$ .

Vemos que si tomamos  $p_N^0 \rightarrow -E_{\vec{p}_N} = -\sqrt{\vec{p}_N^2 + m^2}$  encontraremos nuevamente un polo donde logremos aislar otra vez la contribución de un estado de 1 partícula,

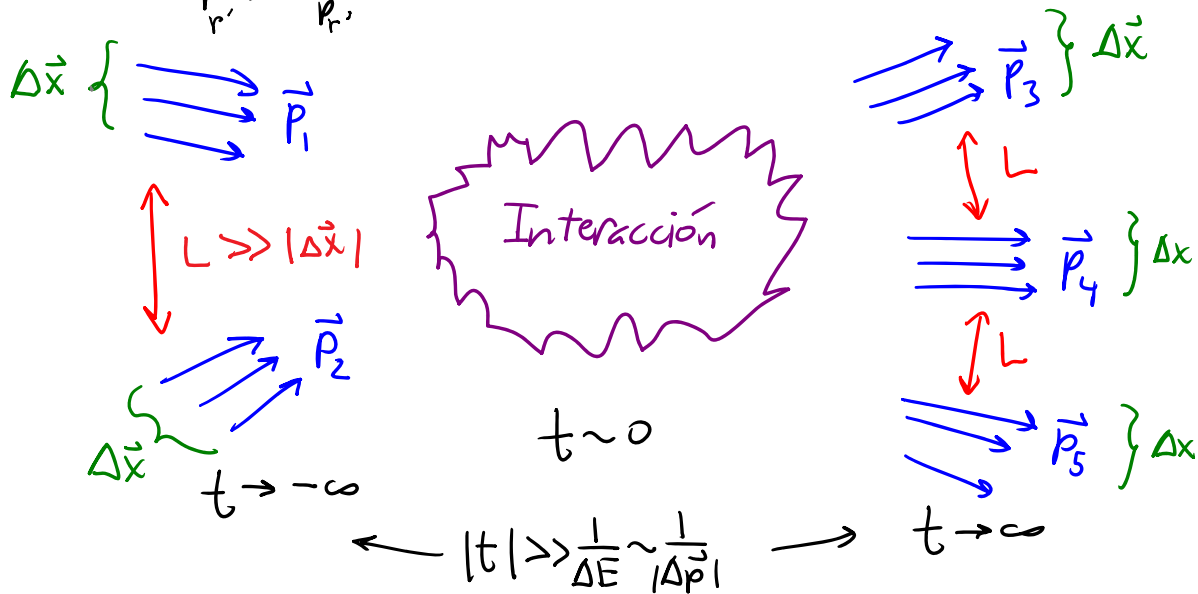
$$\tilde{G}_N(p_1 \dots p_N) \xrightarrow[\substack{p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1} \\ p_N^0 \rightarrow -E_{\vec{p}_N}}]{\frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i\sqrt{z}}{p_N^2 - m^2 + i\epsilon}} \int \mathcal{D}x_2 \dots \mathcal{D}x_{N-1} e^{ip_2 \cdot x_2} \dots e^{ip_{N-1} \cdot x_{N-1}} \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\psi}_H(x_2) \dots \hat{\psi}_H(x_{N-1}) \} | -\vec{p}_N \rangle.$$

Es decir, haciendo que  $p_N^0$  se aproxime a la capa de masa de esta manera, el efecto neto es reemplazar a  $\int \mathcal{D}x_N e^{ip_N \cdot x_N} \langle \hat{\psi}_H(x_N) | e \rangle$  por el estado de 1 partícula entrante  $| -\vec{p}_N \rangle$ . El que este estado ahora sea entrante y no saliente se debe en última instancia al hecho de que la singularidad aquí proviene de la región de integración  $x_N^0 \rightarrow -\infty$ .

Es posible continuar de esta manera, reemplazando cada operador de campo  $\hat{\psi}_H(x_n)$  con una partícula en el estado entrante ( $x_n^0 \rightarrow -\infty$ ) o saliente ( $x_n^0 \rightarrow +\infty$ ), dependiendo de si buscamos el polo en  $p_n^0 \rightarrow -E_{\vec{p}_n}$  ó  $p_n^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_n}$ , respectivamente. Estrictamente hablando, en los pasos intermedios resulta necesario

utilizar paquetes de onda, para asegurarnos de que las distintas partículas presentes en los estados inicial/final no interfieran entre sí [ver p.ej. Peskin 7.2, o para otro enfoque, Greiner 9.4]. Tomando el límite en el que los paquetes de onda estén más y más localizados en espacio de momentos recuperamos la definición de los estados entrantes y salientes, respectivamente, cuyo traslape es precisamente la amplitud de dispersión o matriz S (ver pp. 105-108):

$$\tilde{G}_N(p_1 \dots p_N) \xrightarrow[p_r^0 \rightarrow -E_{p_r}]{p_r^0 \rightarrow +E_{p_r}} \frac{i\sqrt{z}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{i\sqrt{z}}{p_N^2 - m^2 + i\epsilon} \langle \underbrace{\vec{p}_{I_1} \dots \vec{p}_{I_n}}_r ; - | \underbrace{\vec{p}_{I_{n+1}} \dots \vec{p}_{I_N}}_{r'} ; + \rangle$$



Obtenemos entonces la "fórmula de reducción" de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ)

$$\langle \underbrace{p'_1 \dots p'_N}_{p_n^0 > 0} ; - | \underbrace{p_1 \dots p_N}_{p_n^0 > 0} ; + \rangle = \lim_{\substack{p_n^{1/2} \rightarrow m^2 \\ p_n^2 \rightarrow m^2}} (\sqrt{Z})^{-(N'+N)} \frac{p_1^2 - m^2}{i} \dots \frac{p_N^2 - m^2}{i} \tilde{G}_{N'+N}(p'_1, \dots, p'_N, -p_1, \dots, -p_N)$$

$$\int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \} | \Omega \rangle$$


que establece la relación NO PERTURBATIVA entre amplitudes de dispersión y funciones de correlación de  $\hat{\phi}_H$ . De hecho, es posible

reemplazar aquí a  $\hat{\phi}_H(x)$  con cualquier operador local  $\hat{O}(x)$  tal que  $\langle \hat{p} | \hat{O}(0) | \Omega \rangle \equiv \sqrt{Z_O} \neq 0$ , reemplazando también  $\sqrt{Z} \rightarrow \sqrt{Z_O}$ .

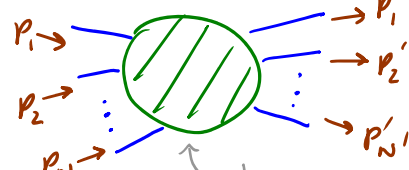
$\sim \langle \hat{p}_1 | \hat{p} \rangle + \langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 | \hat{p} \rangle + \langle \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3 | \hat{p} \rangle + \dots$ , tal como ocurre con  $\hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle$

Ahora, ¿qué significa esto en términos de diagramas de

Feynman? Hemos visto ya (p.434) que la transformada de Fourier

$G_{N'+N} \rightarrow \tilde{G}_{N'+N}$  reemplaza a los puntos externos  por

patas externas con momento definido , de modo que

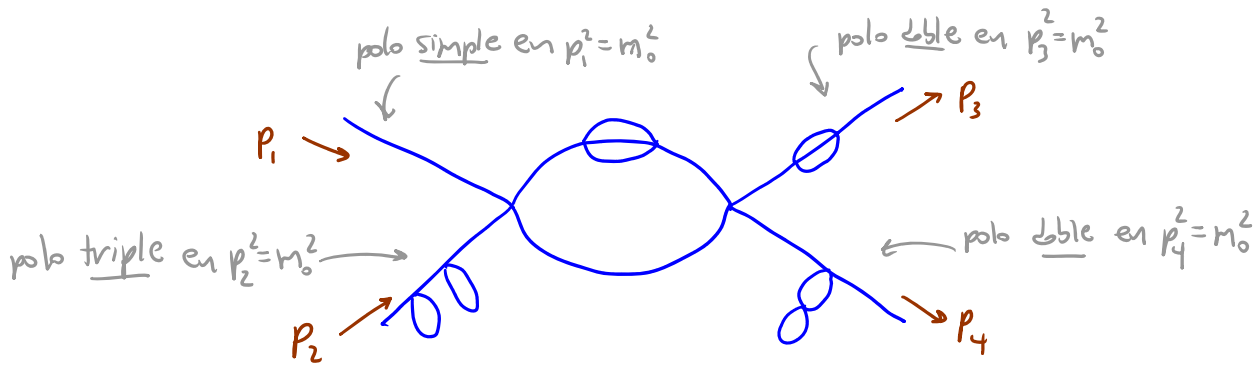
$$\tilde{G}_{N'+N}(p'_1, \dots, p'_N, -p_1, \dots, -p_N) = \underbrace{\text{fuera de la capa}}_{\text{diagramas conexos}}$$


En un diagrama dado, cada pata externa contribuye

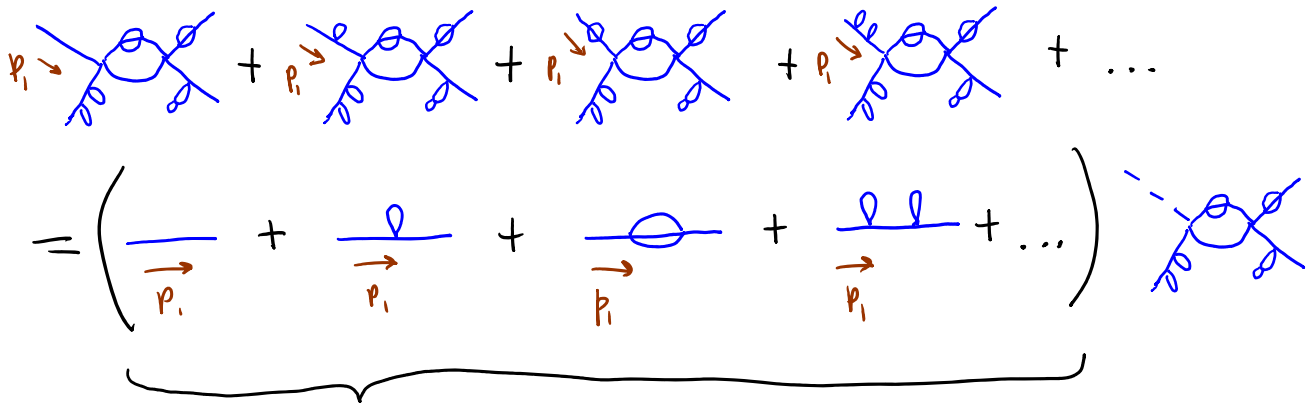
(justo como cualquier otra línea) un factor de  $\tilde{G}_2^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$ , es decir, un polo en  $p_n^2 = m_0^2$ . La fórmula de LSZ

nos pide buscar NO esto, sino los polos en  $p_n^2 = m^2 \forall n$ .

Por nuestro análisis de  $\tilde{G}_2(p)$  en las pp. 435-37, sabemos que tales polos provienen NO de un diagrama dado, como p.ej.,



sino de la suma de toda una familia de diagramas. P.ej., el polo en  $p_1^2 = m^2$  proviene de



$$\tilde{G}_2(p_1) = \text{diagram with shaded circle} = \text{diagram with 1 loop} + \text{diagram with 2 loops} + \text{diagram with 3 loops} + \dots$$

$$\stackrel{p. 436}{=} \frac{i}{p_1^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon} \xrightarrow{p_1^2 \rightarrow m^2} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Realizando el mismo tipo de suma infinita para encontrar los

polos en  $p_2^2 \rightarrow m^2$ ,  $p_3^2 \rightarrow m^2$ ,  $p_4^2 \rightarrow m^2$ , obtenemos

$$= \left( p_1 \rightarrow \text{pole} \right) \left( p_2 \rightarrow \text{pole} \right) \left( p_3 \rightarrow \text{pole} \right) \left( p_4 \rightarrow \text{pole} \right) \text{ghost diagram}$$

$$\sim \frac{iZ}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{iZ}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{iZ}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{iZ}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon}$$

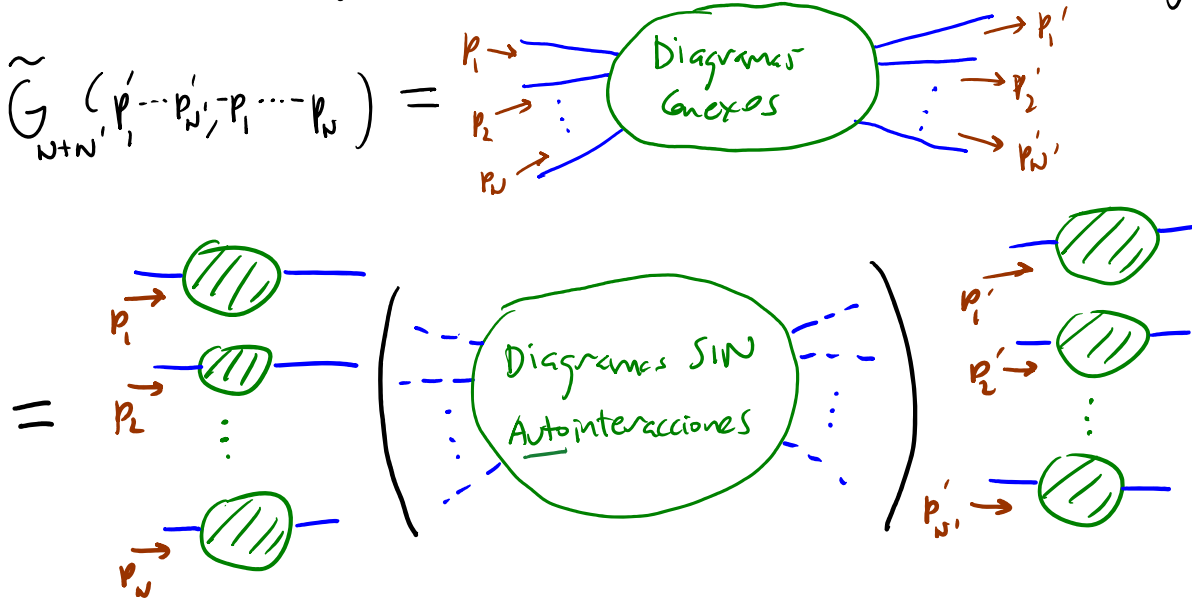
Es decir, es solo después de sumar todos estos diagramas y tomar  $p_n^2 \rightarrow m^2$  que estamos describiendo un proceso de dispersión de partículas verdaderamente físicas (a diferencia de las partículas libres asociadas a las patas externas originales  $\overline{p_n \rightarrow} = G_2^{(0)}(p_n)$ ).

El residuo del polo múltiple en este ejemplo con 4 patas externas es entonces

$$(iZ)^4 \text{ghost diagram}, \text{ donde solo aparece ya}$$

la porción central del diagrama original, que describe a las partículas interactuando entre sí, a diferencia de las porciones omitidas, que describen a cada partícula interactuando solo consigo misma.

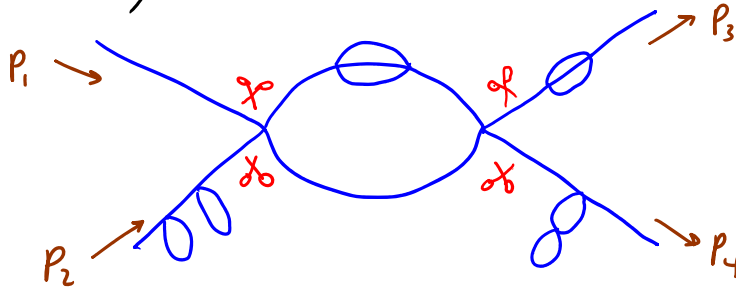
Para el caso más general  $N \rightarrow N'$  encontramos de manera análoga



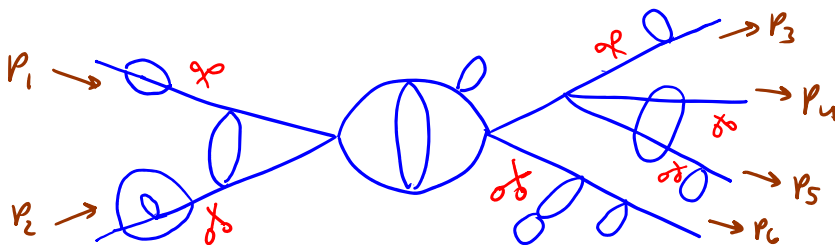
Según la fórmula LSZ, la amplitud de dispersión es  $(i\sqrt{z})^{-(N+N')}$  multiplicada por el residuo del polo de  $\tilde{G}_{N+N}$  en  $p_1^2 = \dots = p_N^2 = m^2$ ,  $p'_1{}^2 = \dots = p'_N{}^2 = m^2$ , lo cual corresponde a eliminar el factor de  $\tilde{G}_2(p_n) = \text{---} \text{---} \text{---}$  que obtuvimos arriba (después de la suma) para cada pata externa, llevar  $p_n^N, p_n'^N$  a la capa de masa  $\forall n$ , y asociar por último un factor de  $\sqrt{z}$  a cada pata (porque  $\tilde{G}_2$  incluye un factor de  $z$ ). Es decir,

$$\langle p'_1, p'_2, \dots, p'_N; - | p_1, p_2, \dots, p_N; + \rangle = \text{---} \text{---} \text{---}$$

donde "amputar" un diagrama significa eliminar las patas externas, cortando cada una de ellas en el lugar más interno posible. P.ej., en el diagrama que vimos recientemente,



habría que cortar en donde aparecen las tijeras: empezando en la punta de cada pata y caminando hacia el centro del diagrama, encontramos el último lugar donde la pata se desconecta del diagrama al convertirse 1 sola línea, y cortamos precisamente ahí, descartando incluso el propagador libre asociado a esa última línea (que por esta razón denotaremos por ahora como puntera). Otro ejemplo sería





En la práctica, por supuesto, para restringirnos a diagramas amputados lo que hacemos es simplemente NO dibujar diagramas que tengan porciones que se deban amputar. Como hemos dicho, la explicación intuitiva es que esas porciones describen procesos de "autointeracción" que corrigen a las partículas libres  $|\vec{p}_n\rangle_{\text{I}} \equiv \sqrt{2E_n} \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle$  para convertirlos en partículas físicas  $|\vec{p}_n; \pm\rangle$ , análogamente a la manera en que las burbujas de vacío expresan la diferencia entre el vacío libre  $|0\rangle$  y el verdadero vacío  $|\Omega\rangle$ .

De hecho, es posible resumir la misma expansión diagramática que hemos encontrado escribiendo, en analogía con

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\psi}_{HI} \dots \hat{\psi}_{HN} \} | \Omega \rangle = \left( \langle 0 | T \{ \hat{\psi}_{\text{I}1} \dots \hat{\psi}_{\text{I}N} \exp[-i \int d^4y \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}^{\text{I}}(y)] \} | 0 \rangle \right)_{\text{parte conexa}}$$

$\hat{U}_{\text{I}}(\infty, -\infty)$

las amplitudes de dispersión en la forma

$$\langle p'_1 \dots p'_N; - | p_1 \dots p_N; + \rangle = \left( \sqrt{Z} \right)^{N+N'} \left( \langle p'_1 \dots p'_N; - | T \{ \exp[-i \int d^4y \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}^{\text{I}}(y)] \} | p_1 \dots p_N; + \rangle_{\text{I}} \right)_{\text{parte conexa y amputada}}$$

$\hat{U}_{\text{I}}(-\infty, \infty)$

autoestados de  $\hat{H}$       autoestados de  $\hat{H}_0$

ignorar correcciones al vacío      ignorar correcciones a partículas

En esta versión de la fórmula, al usar el teorema de Wick para reemplazar  $T\{\dots\} \rightarrow : \dots :$  No solo nos interesarán los términos donde todas las  $\hat{\phi}_I(y)$ 's estén contraídos entre sí, puesto que los estados inicial y final no son aquí simplemente el vacío libre  $|0\rangle$ .

P.ej., a diferencia del resultado  $\hat{\phi}_I^+(y)|0\rangle = 0$  que utilizábamos antes, tendríamos ahora  $\hat{\phi}_I^+(y)|\vec{p}\rangle \propto \hat{a}_{\vec{p}}^+$

$$\hat{\phi}_I^+(y)|\vec{p}\rangle_I = \left( \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik \cdot y} \right) (\sqrt{2E_p} \hat{a}_{\vec{p}}^+ |0\rangle)$$

↑  
proviene de  $\hat{\mathcal{L}}_{int}^I(y)$   
(↔ vértice de 4 patas)

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^+] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p})$$

$$= e^{-ip \cdot y} |0\rangle .$$

Resulta entonces natural definir un nuevo tipo de "contracción",

$$\underbrace{\hat{\phi}_I(y)|\vec{p}\rangle_I}_{\text{contracción}} \equiv e^{-ip \cdot y}, \quad \text{y de manera similar, } \underbrace{\langle \vec{p} | \hat{\phi}_I(y)}_{\text{contracción}} \equiv e^{ip \cdot y} .$$

Con esta definición, la receta para calcular cada elemento de matriz  $\langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_n | \hat{\phi}_I(y_1)^4 \dots \hat{\phi}_I(y_n)^4 | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rangle_I$  será nuevamente

Considerar todos las posibles contracciones de los  $4n+N+N'$  objetos - p.ej.  $\langle \underbrace{p'_1 p'_2 | \varphi_I(y) \varphi_I(y) \varphi_I(y) \varphi_I(y)}_{\text{diagrama}} | \underbrace{p_1 p_2} \rangle_I$ .

Con esto evidentemente recuperaremos los mismos diagramas que obtuvimos antes de  $\langle \hat{\varphi}_{I_1} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N+N'}} \hat{\varphi}_{I_y}^4 \cdots \hat{\varphi}_{I_{y_n}}^4 | \hat{\varphi}_{I_y}^4 \rangle$ .

Las fases  $e^{i p \cdot y}$  que provienen de los nuevos tipos de contracciones claramente darán, después de integrar sobre la posición del vértice correspondiente,  $\int d^4 y$ , una delta de Dirac que expresa igual que antes la conservación del cuadrimomento que fluye a través de ese vértice. Juntando todos estos elementos, es fácil verificar que la fórmula del final de la p. 448 en realidad es equivalente a nuestro resultado de la p. 446.

Al hablar de amplitudes de dispersión, es habitual definir un operador unitario  $\hat{S}$  que relacione a la base de estados entrantes con la de estados salientes,

$$|p_1 p_2 \cdots p_N; + \rangle = \hat{S} |p_1 \cdots p_N; - \rangle$$

$\hat{S}$  unitario porque preserva el producto interno

$$\left( \Rightarrow \langle p'_1 \cdots p'_N; - | = \langle p'_1 \cdots p'_N; + | (\hat{S}^\dagger)^{-1} = \langle p'_1 \cdots p'_N; + | \hat{S} \right),$$

de tal forma que los elementos de matriz de  $\hat{S}$  en cualquiera de estas 2 bases coinciden precisamente con las amplitudes de dispersión,

S de "streuung" = dispersion  
o "scattering"

$$\begin{aligned}
 \langle p'_1 \dots p'_{N'}; - | p_1 \dots p_N; + \rangle &= \langle p'_1 \dots p'_{N'}; + | \hat{S} | p_1 \dots p_N; + \rangle \\
 &= \langle p'_1 \dots p'_{N'}; - | \hat{S} | p_1 \dots p_N; - \rangle \\
 &\equiv S_{p'_1 \dots p'_{N'}; p_1 \dots p_N} \quad \text{"Matrix S"}
 \end{aligned}$$

Este lenguaje nos permite separar fácilmente

$$\hat{S} = \hat{1} + i \hat{T}$$

describe todos los posibles procesos  
no triviales de interacción entre  
las partículas

Expresa la posibilidad trivial de  
que las partículas simplemente  
"se sigan de frente" (que por  
supuesto existe solo para  $N=N'$ )

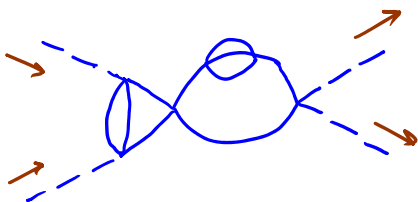
[38:11/11/22

Con esta definición, entonces, para calcular

$$\begin{aligned}
 \langle p'_1 \dots p'_{N'}; + | i \hat{T} | p_1 \dots p_N; + \rangle &\equiv \langle p'_1 \dots p'_{N'}; + | \hat{S} | p_1 \dots p_N; + \rangle - \langle p'_1 \dots p'_{N'}; + | p_1 \dots p_N; + \rangle \\
 &= \langle p'_1 \dots p'_{N'}; - | p_1 \dots p_N; + \rangle - \int_{N'} \sum_{\Pi} \prod_{I=1}^N (2\pi)^3 2p_I^0 \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\Pi(I)} - \vec{p}_I) \quad \swarrow p \cdot 10^3 \\
 &\quad \left( \text{permutaciones } \Pi: (12 \dots N) \rightarrow (\Pi(1)\Pi(2) \dots \Pi(N)) \right)
 \end{aligned}$$

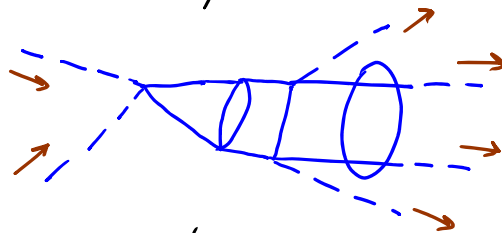
de manera perturbativa, debemos omitir los diagramas triviales donde cada partícula entrante se conecta solo con 1 partícula saliente. En la práctica, nos interesan principalmente los casos donde el número de partículas inicial es  $N=2$  (como en las colisiones usuales en los aceleradores) o  $N=1$  (que sería relevante para considerar el decaimiento de una partícula inestable). Pero con solo  $N \leq 2$  patas iniciales, los diagramas no triviales (aquellos que se incluyen en  $i\hat{T}$ ) serán todos de manera inevitable no solo conexos sino, de hecho, completamente conexos, es decir, tendrán todas sus patas externas conectadas entre sí.

P.ej.,  $N=2, N'=2$

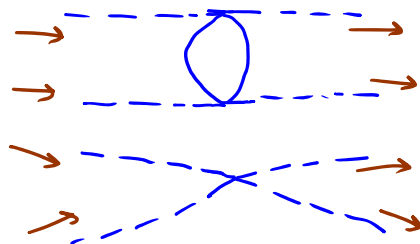


ó

$N=2, N'=4$



(pero no sucede lo mismo para, p.ej.,  $N=4, N'=4$  :



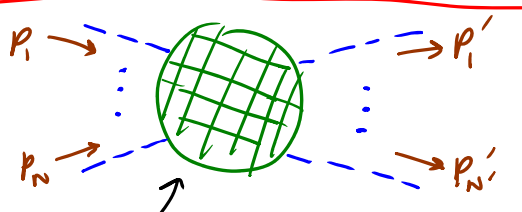
este diagrama,  
 induce en  $\langle p_1 \dots p_n | i\hat{T} | p_1 \dots p_n \rangle$ ,  
 es conexo pero  
 no completamente ).

Observando además que, por invariancia bajo translaciones, tendremos  $S_{p'_1 \dots p'_N; p_1 \dots p_N} \propto (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + \dots + p'_N - p_1 - \dots - p_N)$ , es habitual definir

$$\langle p'_1 \dots p'_N; + | i\hat{T} | p_1 \dots p_N; + \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + \dots + p'_N - p_1 - \dots - p_N) i\mathcal{M}(p_1 \dots p_N \rightarrow p'_1 \dots p'_N),$$

donde  $\mathcal{M}$  se conoce como el "elemento de matriz invariante", (o amplitud invariante), y es análoga a la amplitud de dispersión  $f(\theta, \varphi)$  de la mecánica cuántica no relativista, en cuanto a que codifica toda la información dinámica del proceso de dispersión.


Resumiendo lo visto hasta ahora, tenemos


$$i\mathcal{M}(p_1 \dots p_N \rightarrow p'_1 \dots p'_N) =$$



Suma sobre diagramas conexos y amputados

L35 = 28/04/17

con las siguientes reglas de Feynman en espacio de momentos:

1) Por cada propagador,  =  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ .  
 $\curvearrowright = m^2$  a orden más bajo

2) Por cada vértice,  =  $-i\lambda$ , imponiendo conservación del (cuadri)momento.

3) Por cada pata externa,  =  $\sqrt{z}$   
 $\curvearrowright = 1$  a orden más bajo

4) Multiplícar los factores asociados a todas las partes del diagrama, e integrar  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  sobre cada momento que quede indeterminado: 1 por cada lazo.


$$\left( \text{En } G_N(x_1, \dots, x_N) = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_N}{(2\pi)^4} \dots e^{ik_1 x_1} \dots e^{ik_N x_N} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{i}{k_N^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \right),$$

teníamos en la p. 421  $\left( \begin{matrix} \# \text{ de} \\ \text{integrales} \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} \# \text{ de} \\ \text{lazos} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} \# \text{ de puntas} \\ \text{externas} \end{matrix} \right) - 1$ ,

y al pasar a  $\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_N x_N} G_N(x_1, \dots, x_N)$

las integrales asociadas a las patas externas se eliminan, excepto

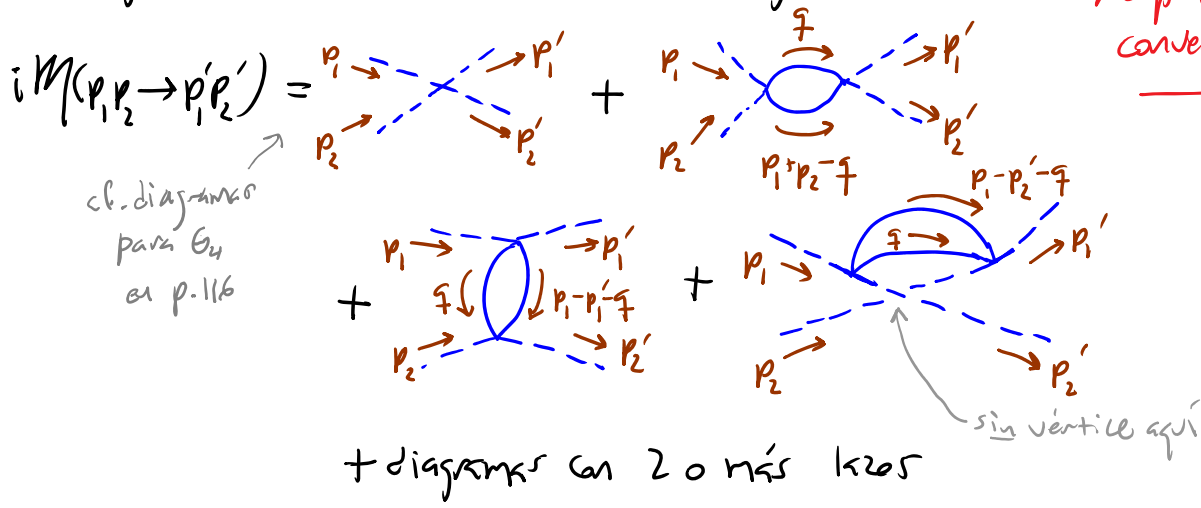
1 por la conservación de momento. Quedan así, p.ej.,

0 integrales en , y 1 en .)

5) Dividir entre el factor de simetría  $s$ .

[37.17: 07/11/18 (20 min extra)]

Un ejemplo de la aplicación de estas reglas sería



$$= -i\lambda(\sqrt{z})^4 + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 z^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

$$+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 z^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - p'_1 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

$$+ \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 z^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 - p'_2 - q)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

= 1 a orden más bajo en lambda

+ términos con 2 o más integrales

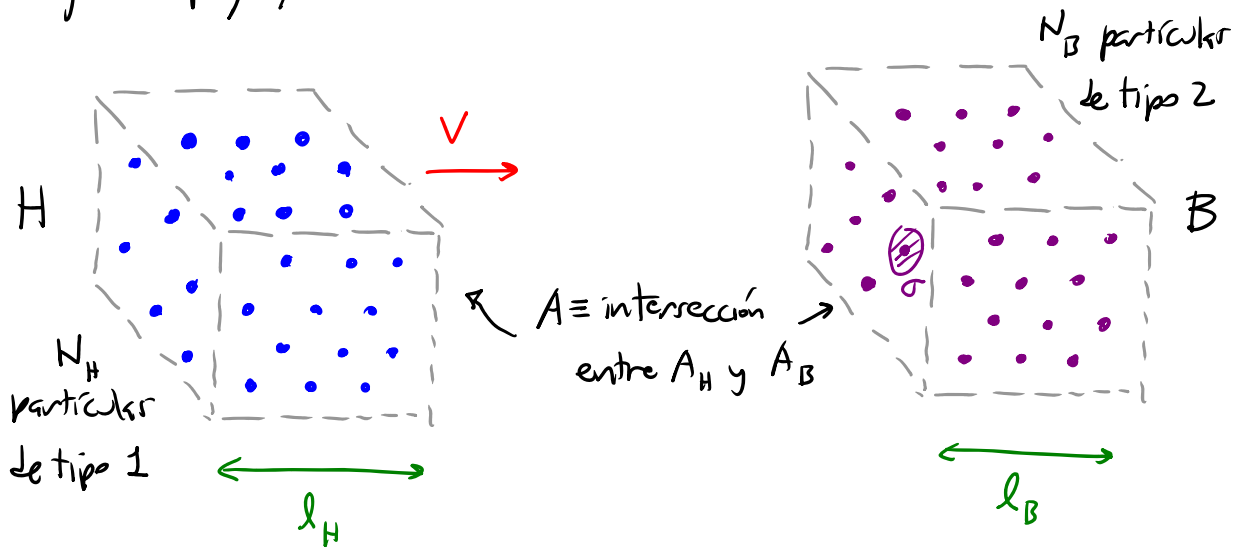
$= -i\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2).$

lambda en verdad controla la intensidad con la cual interactúan las partículas físicas

Ahora bien, los resultados experimentales para un proceso de dispersión 2 partículas  $\rightarrow$  N partículas se expresan no directamente en términos de  $M(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, \dots, p'_N)$ , sino de la "sección eficaz" que mide el área efectiva que una de las



partículas entrantes le presenta a la otra, para el proceso en cuestión. Más concretamente, pensemos en una situación experimental típica, donde un haz  $H$  de partículas incide sobre un "blanco"  $B$  de partículas (posiblemente de un segundo tipo), con velocidad relativa  $v$



de tal manera que se producen un cierto número de colisiones binarias, cada una potencialmente con un resultado final distinto. En este contexto, la sección eficaz  $\sigma$  asociada a un cierto tipo de eventos de dispersión específicos se define expresando el número  $N_E$  de estos eventos en la forma

$$N_E = N_H N_B \frac{\sigma}{A} = (\rho_H l_H A) (\rho_B l_B A) \frac{\sigma}{A}$$

p.ej.,  $p+e \rightarrow p+e+\gamma$   
ó  $n+\nu_e$   
etc

← número/volumen

(donde  $\rho_H, \rho_B$  son densidades de número), es decir,

$$\sigma \equiv \frac{N_E}{\rho_H l_H \rho_B l_B A} \quad (\text{definición simétrica bajo } H \leftrightarrow B).$$

La lógica de esta definición es que naturalmente  $N_E$  será proporcional a  $\rho_H, l_H, \rho_B, l_B, A$ , así que nos interesa normalizar nuestro conteo de eventos dividiendo entre todas estas cantidades (lo cual implica que  $[\sigma] = L^2$ ), para obtener un resultado dependiente solo de la física en cuestión, y no de los detalles del experimento.

Si las partículas H se desplazan con velocidad  $v$ , entonces avanzan la distancia  $l_H$  en un tiempo  $t = l_H/v$ , y podemos reexpresar

$$\sigma = \frac{N_E}{\rho_H (vt) \rho_B l_B A} = \frac{N_E/t}{(\rho_H v) (\rho_B l_B A)} = \frac{\text{tasa de eventos de interés}}{(\text{flujo de partículas H}) N_B}.$$

← número/tiempo · (área transversal)

Quisiéramos ahora expresar  $\sigma$  en términos de la amplitud

$$\langle \underbrace{p'_1 \dots p'_N}_{\equiv f} ; - | \underbrace{p_1 p_2}_{\equiv i} ; + \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N) i \mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p'_1 \dots p'_N).$$

La probabilidad de este proceso está dada por

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{|\langle f|i \rangle|^2}{\langle i|i \rangle \langle f|f \rangle}.$$

Siendo más cuidadosos, habría que usar aquí paquetes de ondas [ver, p.ej., Peskin 4.5]; pero obtendremos el mismo resultado final con un argumento simplificado.

Recordando la normalización que adoptamos para nuestros estados de 1 partícula (p. 76),

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})}_{\int d^3x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}} \implies \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2E_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})}_V, \quad \begin{array}{l} V \text{ volumen} \\ \text{del espacio} \end{array}$$

y dado que  $\langle f|i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) i\mathcal{M}_{i \rightarrow f}$ ,

tenemos

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N)]^2 |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2}{(2E_1 V)(2E_2 V)(2E'_1 V) \dots (2E'_N V)}$$


$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) |\mathcal{M}_{i \rightarrow f}|^2 (2E_1 V)^{-1} \dots (2E'_N V)^{-1}$$

$\underbrace{VT}$ : el proceso de dispersión ocurre en un cubo de volumen  $V=L^3$ , y tiene una duración  $T$ .

$P_{i \rightarrow f}$  representa la probabilidad de que el proceso de dispersión tenga como resultado final un conjunto de  $N$  partículas con momentos definidos con total precisión.

En el mundo real, por supuesto, utilizamos detectores que cuentan el número de partículas dentro de un cierto range de momentos, así que en realidad queremos calcular

$$dP_{i \rightarrow f \pm \delta f} \equiv P_{i \rightarrow f} \cdot dN_{f \pm \delta f}$$

$\leftarrow$  número de estados finales  
 en el rango " $f \pm \delta f$ " especificado  
 por 

Podemos determinar  $dN_{f \pm \delta f}$  notando que, en el espacio dentro de una caja de volumen  $V=L^3$ , los momentos están discretizados (debido a las condiciones de frontera impuestas en las paredes de la caja),  $\vec{p}' = \frac{2\pi}{L} \vec{n}'$  con  $\vec{n}' \in \mathbb{Z}^3$ . De modo que, para contar los estados, simplemente hay que sumar sobre los  $\vec{n}'$  involucrados,  $\sum_{\vec{n}'}$ , lo cual en el límite continuo corresponde a

integran sobre  $\vec{p}'$  con la medida de integración

$$\sum_{\vec{n}'} \rightarrow \int \frac{d^3 p'}{(2\pi/L)^3} = V \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}.$$

La probabilidad diferencial para el proceso de dispersión donde la partícula final  $n$  está en la región  $d^3 p'_n$  alrededor del valor  $\vec{p}'_n$  es entonces

$$\begin{aligned} dP_{i \rightarrow f \pm \delta f} &= P_{i \rightarrow f} dN_{f \pm \delta f} \\ &= \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N) V T |M_{i \rightarrow f}|^2 (2E_1 V)^{-1} (2E_2 V)^{-1} (2E'_1 V)^{-1} \dots (2E'_N V)^{-1} \right] \\ &\quad \cdot \left[ \sqrt{\frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3}} \dots \sqrt{\frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3}} \right], \end{aligned}$$

(que integrada sobre un cierto rango finito de los  $\vec{p}'_n$  nos dará una probabilidad a secas) y la tasa diferencial correspondiente es

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i \rightarrow f \pm \delta f} &\equiv \frac{dP_{i \rightarrow f \pm \delta f}}{T} \\ &= \underbrace{\frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \dots \frac{d^3 p'_N}{(2\pi)^3 2E'_N} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_2 - p'_1 - \dots - p'_N)}_{\equiv d\pi'_N \text{ "espacio fase invariante"}} \frac{V T}{T} \frac{|M_{i \rightarrow f}|^2}{2E_1 V 2E_2 V} \end{aligned}$$