

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

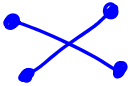
$$x \bullet \xleftarrow{p} \equiv e^{-ip \cdot x} \quad \leftrightarrow \quad x \bullet \xrightarrow{p} \equiv e^{ip \cdot x}$$

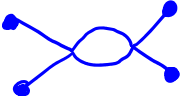
(~ amplitud de probabilidad de que 1 partícula en momento p esté en x , o viceversa - recordar que $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{+ip \cdot \vec{x}}$)


4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes de cada diagrama, e integrar $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ sobre los momentos que quedan indeterminados:

$$\begin{aligned} (\# \text{ de } \text{integrales}) &= (\# \text{ de } \text{propagadores}) - (\# \text{ de } \text{vértices}) \\ &= (\# \text{ de } \text{puntos } \text{externos}) + (\# \text{ de } \text{lazos}) - 1 \end{aligned}$$

} por propiedad de gráficas

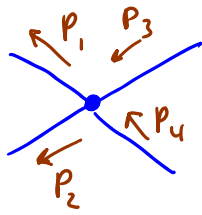
(P.ej.,  $\Rightarrow 4 - 1 = 3 = 4 + 0 - 1$, ✓)

 $\Rightarrow 6 - 2 = 4 = 4 + 1 - 1$, ✓

 $\Rightarrow 5 - 2 = 3 = 2 + 2 - 1$. ✓)

5) Dividir entre el factor de simetría s .

Siendo más cuidadosos, podemos notar que al calcular p_{ej} .



$$\propto \int d^4 y e^{i y \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}$$

p. 415: $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T d^4 y \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T d^4 y e^{i y \cdot (p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0)} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y e^{-i \vec{y} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)}$$

$$y^0 \equiv y^0(1-i\epsilon)$$

$$= (1-i\epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d^4 y^0 e^{i y^0(1-i\epsilon)(p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0)} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)$$

← real

en realidad NO obtendríamos la delta de Dirac que dijimos para la energía, $(2\pi) \delta(p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0)$ a menos que el exponente que se muestra sea imaginario puro (pues de otra manera la integral $\int_{-\infty}^{\infty} d^4 y^0$ sería divergente aún cuando $p_1^0 + p_2^0 - p_3^0 - p_4^0 \neq 0$). Debemos por tanto tomar $p_n^0 \equiv p_n^{\prime 0}(1+i\epsilon)$ con $p_n^{\prime 0} \in \mathbb{R}$, para que el exponente sea

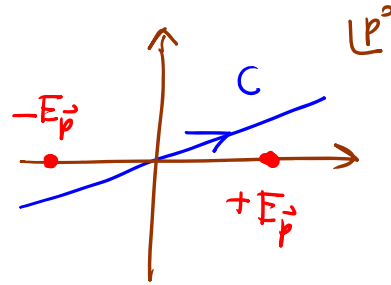
$$i y^\circ (p_1^\circ + p_2^\circ - p_3^\circ - p_4^\circ) = i y^\circ \underbrace{(p_1^\circ + p_2^\circ - p_3^\circ - p_4^\circ)}_{\text{reales}} \underbrace{(1 - i\epsilon)(1 + i\epsilon)}_{1 + \epsilon^2 \leftarrow \text{real}},$$

con lo cual SÍ obtenemos la $2\pi \delta(p_1^\circ + p_2^\circ - p_3^\circ - p_4^\circ)$ prometida.

Pero esta elección de p_n° quiere decir

que el contorno de integración sobre

la energía, $\int_C dp_n^\circ$, debe ser entonces



como se muestra en la figura, ¡que es justo la receta


que tenemos para calcular el propagador de Feynman!

Aprendemos entonces que el $-i\epsilon$ en el límite sobre

los tiempos inicial/final $\mp T$ que requerimos en las

pp. 388 y 393 va de la mano del $+i\epsilon$ en $\tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.

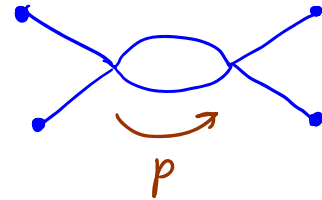
La expansión perturbativa que hemos desarrollado nos permite calcular cualquier función de correlación de la teoría interactiva como una serie de potencias en λ , que resumimos convenientemente usando diagramas de Feynman.

Al hacer cuentas en la práctica, siempre es relativamente fácil obtener resultados explícitos para los diagramas "a nivel árbol" (\equiv sin lazos, como p.ej. ) , pero más allá de eso, nos encontramos genéricamente con 2 problemas:

1) En un diagrama con 1 ó más lazos, la(s) integral(es)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{ sobre los momentos}$$

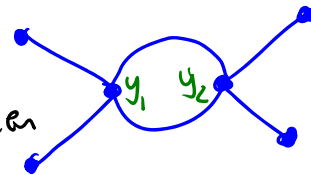
indeterminadas (^{p.421} \Rightarrow uno por cada lazo)



en general No convergen para p's grandes, $p^\mu \rightarrow \pm\infty$

En espacio de posiciones, estas

"divergencias ultravioleta" (\equiv UV) provienen



del límite de distancias pequeñas donde 2 ó más

vértices coinciden en el espaciotiempo, $y_1^\mu \rightarrow y_2^\mu$.

Si la teoría tiene la propiedad de ser "renormalizable",

estas divergencias UV se pueden eliminar ajustando

un número finito de parámetros en el lagrangiano

(masas, acoplamientos, etc., cuyos valores deducimos

de los datos experimentales). Este cambio de variables se conoce como renormalización, y lo estudiaremos en detalle en el curso de Campos II.

En teorías con partículas sin masa, como QED, por los propagadores $\propto \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$ pueden aparecer además "divergencias infrarrojas" (\equiv IR), que corresponden a bajas energías, $p^\mu \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, distancias grandes, $|y_1^\mu - y_2^\mu| \rightarrow \infty$. En Campos II veremos también cómo eliminarlas.

2) El número de diagramas que se obtienen a $\mathcal{O}(\lambda^n)$ crece muy rápidamente, típicamente $\sim n!$, de tal manera que $G_N^{(n)} \sim \lambda^n n!$, y por lo tanto la serie perturbativa no converge (Tarea 8).

A pesar de ello, para $\lambda \ll 1$ la serie es útil como "expansión asintótica": para la función de N puntos

$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ se encuentra que

$$|G_N(\lambda) - \sum_{j=0}^n \underbrace{G_N^{(j)}(\lambda)}_{\equiv \lambda^j g_N^{(j)}}| < C_{n+1} \lambda^{n+1}$$

resultado exacto \nearrow
 aproximación perturbativa hasta $O(\lambda^n)$
 \nwarrow con C_{n+1} y $g_N^{(j)}$ independientes de λ , y donde C_{n+1} crece rápidamente con n

Así que para un orden n dado, la precisión lograda con los primeros $n+1$ términos de la expansión perturbativa mejora si λ disminuye. Pero para una cte. de acoplamiento λ dada, no importa cuán pequeños (siempre que $\lambda > 0$), $C_{n+1} \lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, así que en algún momento uno NO puede ya mejorar la precisión de la respuesta aproximada calculando más términos en la serie.

Para $C_n \sim n!$ esto sucede cuando $n \sim 1/\lambda \gg 1$, así que la máxima precisión que uno puede lograr con la serie asintótica es de orden

$$C_n \lambda^n \sim \left(\frac{1}{\lambda}\right)! \lambda^{1/\lambda} \underset{\text{Stirling}}{\sim} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\lambda} e^{-1/\lambda} \lambda^{1/\lambda} = e^{-1/\lambda}$$

$\ll 1$ si $\lambda \ll 1$

Como habíamos dicho antes, esto es una indicación de que existen efectos "no perturbativos", justamente de $O(e^{-1/\lambda})$.
NO desarrollable en Taylor \nearrow

Habiendo ya aprendido a calcular funciones de correlación, nos falta todavía entender en qué forma éstas codifican la información de las amplitudes de dispersión.

LS: 07/11/22

Para ello, consideremos primero nuevamente la función de 2 puntos $G_2(x, x')$, pero analizando su estructura sin recurrir a la expresión perturbativa.

Dado un conjunto completo de autoestados de \hat{H} y \hat{P} , $\{|E\rangle\}$, (p.ej., los estados entrantes $\{|p_1, \dots, p_N; +\rangle\}$ o salientes $\{|p_1, \dots, p_N; -\rangle\}$) podemos escribir la relación de completitud

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{E \neq \Omega} |E\rangle\langle E|.$$

estados de 1, 2, ...
partículas físicas

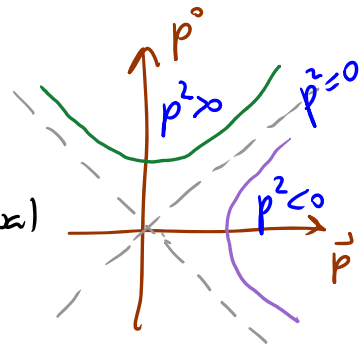
Por covariancia de Lorentz, cada estado en la suma pertenece a una familia de estados conectados entre sí por transformaciones

de Lorentz: si $\hat{P}^\omega |E\rangle = p^\omega |E\rangle$, entonces $|E'\rangle \equiv \hat{U}(\Lambda) |E\rangle$ satisface $\hat{P}^\omega |E'\rangle = p'^\omega |E'\rangle$ en $p' = \Lambda p$.

Si adoptamos la convención $E_\Omega = 0$, entonces por definición $E_E > 0 \quad \forall E \neq \Omega$. Esto implica en particular que

energía/momento total de las N partículas

el cuadrimento p^ω de $|\mathcal{E}\rangle$ debe ser tipo tiempo, $p^2 > 0$, pues de otra manera sería posible encontrar una $\hat{\Lambda}$ con la cual



$|\mathcal{E}\rangle \rightarrow |\mathcal{E}'\rangle \equiv \hat{U}(\hat{\Lambda})|\mathcal{E}\rangle$ tenga energía

$E_{\mathcal{E}'} = \Lambda^0_\omega p^\omega \leq 0$. (Suponemos aquí que no hay partículas sin masa.)

Esto nos permite a su vez deducir que en la familia de $|\mathcal{E}\rangle$ existen en particular uno o varios estados "en reposo"

$|\mathcal{E}_0\rangle$ tal que $\hat{P}|\mathcal{E}_0\rangle = 0$, $\hat{H}|\mathcal{E}_0\rangle = E_{\mathcal{E}_0}|\mathcal{E}_0\rangle$,

a partir del (de los) cual(es) ^{← pueden ser 1, 2, 3... partículas →} podemos obtener al resto

de la familia en la forma $|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle \equiv \hat{U}(\hat{L}(\vec{p}))|\mathcal{E}_0\rangle$,

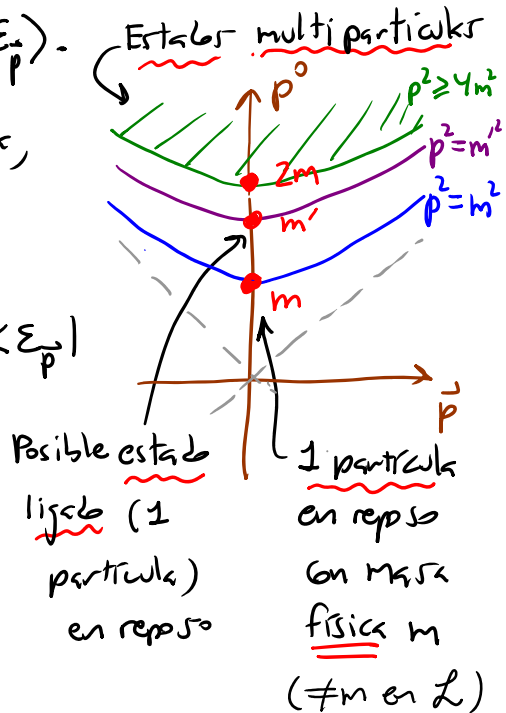
con $\hat{P}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle = \vec{p}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle$, $\hat{H}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle = \sqrt{\vec{p}^2 + E_{\mathcal{E}_0}^2}|\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle$.

Elijendo una normalización relativista, podemos entonces escribir

$$\hat{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\mathcal{E}_0 \neq \Omega} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathcal{E}_{\vec{p}}}} |\mathcal{E}_{\vec{p}}\rangle\langle\mathcal{E}_{\vec{p}}|$$

estados "en reposo" de 1 o más partículas físicas

$E_{\mathcal{E}_{\vec{p}}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m_\mathcal{E}^2}$
con $m_\mathcal{E} \equiv E_{\mathcal{E}_0}$



Para no atorarnos en la notación, conviene desglosarla más:

Base para \mathcal{H}

$$\equiv \{ | \epsilon \rangle \}$$

$$\equiv \{ | \Omega \rangle,$$

$$| \vec{p} \rangle,$$

Partículas físicas

$$| \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle,$$

(p.ej., estados entrantes)

$$| \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N \rangle$$

\vdots
 \vdots
 \vdots
 $\}$
 3N parámetros

$$\equiv \{ | \epsilon_{\vec{p}} \rangle \forall \vec{p} \}$$

estados genéricos, referidos al $| \epsilon_0 \rangle$ correspondiente

$$\hat{\vec{P}} | \epsilon_{\vec{p}} \rangle = \vec{p} | \epsilon_{\vec{p}} \rangle$$

Eigenvalores

bajo $\hat{\vec{P}}, \hat{H}$

$$\vec{p}=0, E_{\Omega}=0$$

$$\vec{p}, E_{\vec{p}}$$

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2, E_{\vec{p}}=E_{\vec{p}_1}+E_{\vec{p}_2}$$

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\dots+\vec{p}_N, E_{\vec{p}}=E_{\vec{p}_1}+\dots+E_{\vec{p}_N}$$

Lorentz

3 parámetros

$$\leftarrow | \Omega \rangle$$

$L(\vec{p})$

$$\leftarrow | \vec{0} \rangle$$

$$\leftarrow | \vec{p}'_1, -\vec{p}'_1 \rangle$$

$$\leftarrow | \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_{N-1}, -\vec{p}'_1, \dots, -\vec{p}'_{N-1} \rangle$$

3(N-1) parámetros

$$\equiv \{ | \epsilon_0 \rangle \}$$

estados en el marco del centro de masa $\hat{\vec{P}} | \epsilon_0 \rangle = 0$

bajo \hat{H}

$$E_{\Omega}=0$$

$$E_{\vec{0}}=m$$

$$E = 2\sqrt{\vec{p}'_1{}^2 + m^2} \geq 2m$$

Insertando esta descomposición de $\hat{\mathbb{1}}$ en $G_2(x, x')$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(x') \} | \Omega \rangle &= \theta(x^0 - x'^0) \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(x') | \Omega \rangle \\ &\quad + \theta(x'^0 - x^0) \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x') \hat{\varphi}_H(x) | \Omega \rangle \end{aligned}$$

\rightarrow normalmente valor esperado en el vacío (vac) es cero

$$= \theta(x^0 - x'^0) \left[\langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x') | \Omega \rangle \right]$$

amplitud de que $\hat{\varphi}_H(x)$ cree $|\varepsilon_p\rangle$ a partir de $|\Omega\rangle$

$$+ \sum_{\varepsilon_p \neq \Omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\varepsilon_p}} \left[\langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x) | \varepsilon_p \rangle \langle \varepsilon_p | \hat{\varphi}_H(x') | \Omega \rangle \right] + \theta(x'^0 - x^0) [x \leftrightarrow x']$$

p. 221

$$\langle \Omega | e^{i\hat{p} \cdot x} \hat{\varphi}_H(0) e^{-i\hat{p} \cdot x} | \varepsilon_p \rangle = \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(0) | \varepsilon_p \rangle e^{-i\hat{p} \cdot x} \Big|_{\hat{p}^0 = E_{\varepsilon_p}}$$

$$\langle \Omega | \hat{U}(\underline{L}(\hat{p})) \left[\hat{U}(\underline{L}(\hat{p}))^{-1} \hat{\varphi}_H(0) \hat{U}(\underline{L}(\hat{p})) \right] \hat{U}(\underline{L}(\hat{p}))^{-1} | \varepsilon_p \rangle$$

$\langle \Omega | \quad \hat{\varphi}_H(0) \quad | \varepsilon_p \rangle$ p. 221

es decir,

$$\begin{aligned} G_2(x, x') &= \theta(x^0 - x'^0) \sum_{\varepsilon_p \neq \Omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \Omega | \hat{\varphi}_H(0) | \varepsilon_p \rangle|^2}{2E_{\varepsilon_p}} e^{-i\hat{p} \cdot (x - x')} \Big|_{\hat{p}^0 = E_{\varepsilon_p}} \\ &\quad + \theta(x'^0 - x^0) [x \leftrightarrow x'] \end{aligned}$$

Esto se puede reescribir en la forma

en general $\neq 0$ incluso para 2, 3, ... partículas

$$G_2(x, x') = \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\theta(x^0 - x'^0)}{2E_{\epsilon_p}} e^{-ip \cdot (x - x')} + \frac{\theta(x'^0 - x^0)}{2E_{\epsilon_p}} e^{ip \cdot (x - x')} \right] |\langle \epsilon_0 | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2$$

$p^0 = E_{\epsilon_p}$

↑ estado de 1, 2, 3, ... partículas físicas

$$\int \frac{d^4 p}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m_\epsilon^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - x')} \quad (\text{ver pp. 21-23}),$$

↑ $m_\epsilon \equiv E_{\epsilon_0}$ energía del correspondiente estado "en reposo"

o lo que es lo mismo,

$$G_2(x, x') = \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\epsilon^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - x')} |\langle \epsilon_0 | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2$$

$$\equiv K_F(x - x'; m_\epsilon^2)$$

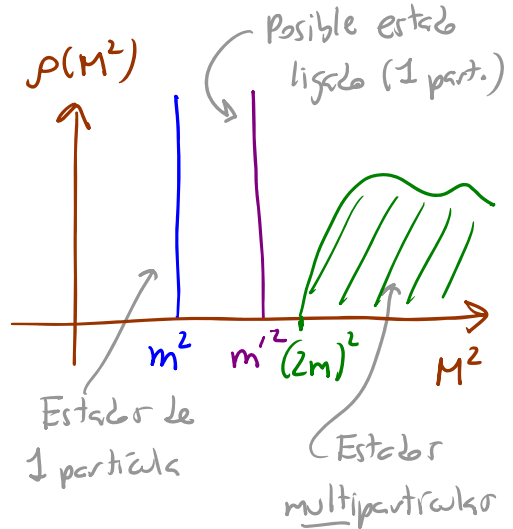
← propagador de Feynman para Klein-Gordon con masa $m_\epsilon \equiv E_{\epsilon_0}$

Definimos la "densidad espectral"

$$\rho(M^2) \equiv \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \delta(M^2 - m_\epsilon^2) |\langle \epsilon_0 | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2,$$

= probabilidad de que $\hat{\phi}_H(0)$ cree un estado con 'masa' (energía en reposo) M al actuar sobre el vacío

(se puede mostrar que $\int_0^\infty dM^2 \rho(M^2) = 1$).



Y obtenemos entonces la "representación espectral" (o de Källén-Lehmann) del propagador en la teoría interactuante,

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x) \hat{\phi}_H(x') \} | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(M^2) \rho(M^2) K_F(x-x'; M^2).$$

Vemos aquí que $G_2(x, x')$ involucra a la misma función $K_F(x-x')$ que el propagador libre $G_2^{(0)}(x, x')$, pero evaluada con las 'masas' físicas $M^2 = m_\epsilon^2 = \{m^2, m'^2\} \cup [(2m)^2, \infty)$ que figuran en el espectro del Hamiltoniano completo $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$, y que corresponden a estados creados por $\hat{\phi}_H(0)$ a partir de $|\Omega\rangle$.

Podemos notar en particular que la contribución a la densidad espectral $\rho(M^2)$ que proviene de los estados de 1 partícula $|\vec{p}\rangle$ con masa física (medible experimentalmente) m^2 está aislada del resto,

$$\rho(M^2) = \delta(M^2 - m^2) \underbrace{|\langle \vec{0} | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2}_{\substack{\text{p. 429} \\ |\langle \vec{p} | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2 \equiv Z}} + \begin{matrix} \text{ nada más hasta} \\ M^2 \geq m'^2 \approx (2m)^2 \end{matrix}$$

"cte. de renormalización del campo"

= probabilidad de que $\hat{\phi}_H(0)$ (ó $\hat{\phi}_H(x)$) cree una partícula

($\zeta=1$ en la teoría libre; $\zeta < 1$ en la teoría interactuante).

Si examinamos la contribución de estos estados al propagador interactuante expresado en espacio de momentos,

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x) \hat{\varphi}_H(0) \} | \Omega \rangle$$

\uparrow función solo de p^2 (por Lorentz) $G_2(x, x') = G_2(x-x')$ en $x'=0$

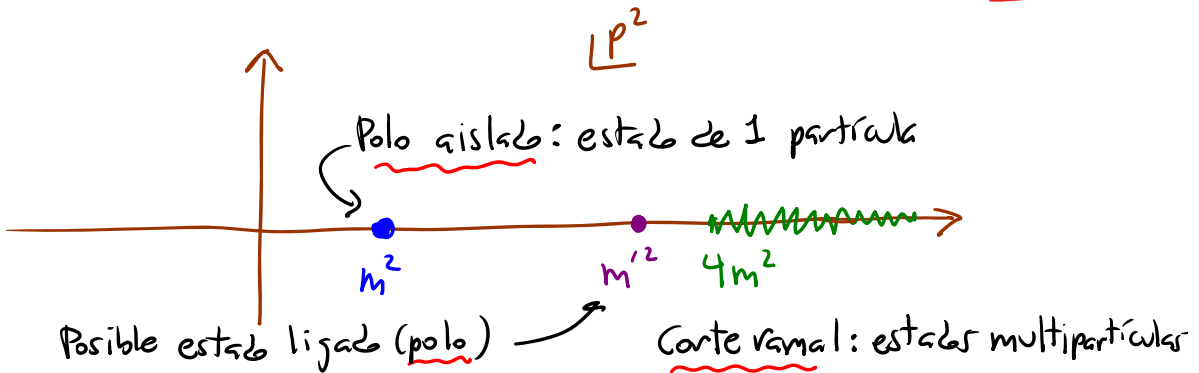
$$\stackrel{P.431}{=} \int d^4x e^{ip \cdot x} \int_0^\infty d(M^2) K_F(x; M^2) \rho(M^2)$$

$$= \int_0^\infty d(M^2) \underbrace{\tilde{K}_F(p; M^2)}_{\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}} \rho(M^2)$$

$\int_0^\infty d(M^2 - m^2) \zeta + \text{vaca hasta } M^2 \approx (2m)^2$
 \uparrow masa física

$$= \frac{i\zeta}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty d(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \rho(M^2)$$

vemos que los estados de 1 partícula aparecen como un polo:



La lección principal aquí es que buscando este polo en $\tilde{G}_2(p)$ podemos determinar la masa física m^2 de las partículas asociadas al campo interactuante $\hat{\phi}(x)$. Esta masa, medible experimentalmente, representa directamente el eigenvalor del Hamiltoniano completo \hat{H} en el eigenestado $|0\rangle$ que describe a 1 partícula en reposo (o, más en general, el eigenvalor del Casimir $\hat{P}^2 \equiv \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu$ en la rep $\{|p\rangle\}$).

L35: 31/10/16 (tómala repisón)

El valor de m^2 , la masa física de las partículas, recibe una contribución de las interacciones, y por tanto en general DIFIERE de la 'masa desnuda' que figura en el Hamiltoniano libre \hat{H}_0 , y que a partir de ahora denotaremos m_0^2 :

$$\hat{H}_0 = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \hat{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2 \right) \leftrightarrow \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2.$$

Es decir, en la teoría libre encontramos que

$$\tilde{G}_2(p) = \tilde{G}_2^{(0)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \text{ y de aquí deducimos}$$

que $m^2 = m_0^2$ (y $Z = 1$); pero para $\lambda \neq 0$ el polo de $\tilde{G}_2(p)$ en general estará situado en $p^2 = m^2 \neq m_0^2$ (y tendrá residuo $Z < 1$).

L33: 24/09/17

Nuestra discusión de la estructura analítica del propagador $\tilde{G}_2(p)$ ha sido hasta ahora no perturbativa (y portanto válida para λ arbitrario); pero es interesante ver cómo estos resultados se manifiestan en la expansión en diagramas de Feynman (que, como sabemos, solo es útil para $\lambda \ll 1$). Según las reglas de Feynman en espacio de momentos (p.420),

$$G_2(x, x') = \text{diagrama con un punto } x \text{ y un punto } x' \text{ conectados por una línea azul que pasa por un círculo verde sombreado.}$$

↪ suma sobre todos los diagramas conexos

con $\text{línea azul con } p \text{ hacia la derecha} \equiv \tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}$, $\text{X} \equiv -i\lambda$,

↪ ojo

y $\text{línea azul con } p \text{ hacia la izquierda} \equiv e^{-ip \cdot x}$, así que

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} G_2(x, 0)$$

↪ per puntos externos p.421

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \int d^4p' e^{-ip' \cdot x} \text{diagrama con } p' \text{ y } p' \text{ hacia la izquierda y } 1 \text{ hacia la derecha}$$

↪ incluye $\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}$

↪ $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p')$

(Si hiciéramos una doble transformada de Fourier, sólo obtendríamos una condición adicional de conservación de momento: $\tilde{G}_2(p_1, p_2) \propto \delta^{(4)}(p_1 - p_2)$)

$$= \text{diagrama con un círculo verde sombreado y dos líneas azules que entran desde la izquierda con momento } p \text{ hacia la izquierda.}$$

↪ suma sobre diagramas conexos con 2 pines externos con momento definido.

↪ en lugar de puntos externos

Si denotamos

$$\text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} \equiv -i \Delta m^2(p^2),$$

veamos que tenemos una serie geométrica:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(p) &= \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} \\ &= \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} \textcircled{\text{I1P}} \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[(-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right] + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left[(-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left\{ 1 + \left[(-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right] + \left[(-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right]^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{1}{1 - (-i\Delta m^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}} \right\}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon}$$

← Serie converge solo si
 $\left| \frac{\Delta m^2}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right| < 1$, lo cual
esperamos como
frecuencia de $\Delta m^2 \propto \lambda$.

•
← NO hay polo en $p^2 = m_0^2$

Comparando con el resultado exacto según la representación espectral de Källén-Lehmann (KL), p. 432,

$$\tilde{G}_2(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots,$$

vemos que la masa física m^2 es por definición el valor quizado de p^2 que resuelve la ecuación

$$\left[p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) \right]_{p^2=m^2} = 0 \iff m^2 = m_0^2 + \Delta m^2(m^2).$$

437: 09/11/22

Intuitivamente, esto nos dice que

$$-i\Delta m^2 = \text{---} \textcircled{\text{IIP}} \text{---} = \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{OO}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \dots$$

codifica la diferencia entre la "partícula libre" $\hat{a}_p^\dagger |0\rangle$ y el estado $|\vec{p}\rangle$ (entrante=saliente) que en verdad representa a 1 partícula física en la teoría con $\lambda \neq 0$. La partícula física puede visualizarse como hecha de una especie de nube de "partículas virtuales" que constantemente aparecen y desaparecen.

$-i\Delta m^2$ se conoce como su "autoenergía". Además, dado que

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon} \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) [1 - \Delta m^2(m^2)]}$$

$$\Delta m^2(m^2) + \frac{d\Delta m^2(p^2)}{d(p^2)} \Big|_{p^2=m^2} (p^2 - m^2) + \dots \quad \uparrow \equiv \frac{d\Delta m^2}{d(p^2)}$$

$$\tilde{G}_2(p^2) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

podemos deducir también que la constante de renormalización del campo

$$Z \equiv |\langle \vec{p} | \hat{\phi}_H(0) | \Omega \rangle|^2 = \frac{1}{1 - \Delta m^2(m^2)}$$

Con estas fórmulas podemos calcular m^2 y Z de manera perturbativa. Notando que

$$i\Delta m^2(p^2) = \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda)} + \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \underbrace{\text{loop}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \dots$$

claramente tendremos $m^2 = m_0^2 + \mathcal{O}(\lambda)$ y $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda)$.

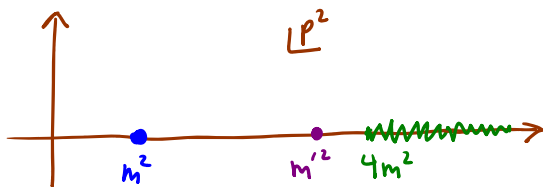
Con KL sabemos además que el propagador interactuante

$$\tilde{G}_2(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x) \hat{\phi}_H(0) \} | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Delta m^2(p^2) + i\epsilon}$$

contiene para $p^2 \geq 4m^2$ información sobre estados multipartículas,

lo cual no es sorprendente en vista de la forma de los diagramas

$$\text{que se incluyen en } i\Delta m^2(p^2) = \underbrace{\text{loop} + \text{loop} + \text{loop} + \dots}_{\text{diagrams}}$$



cundo $p^2 \geq (2m)^2$, las partículas intermedias pueden ser reales en lugar de "virtuales"

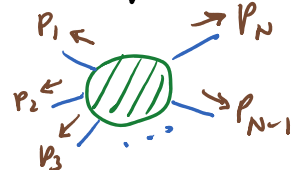
Habiendo entendido ya la manera en que las partículas físicas aparecen en $\tilde{G}_2(p)$, podemos encontrar de modo similar polos que corresponden a partículas físicas en

el correlador de N puntos en espacio de momentos,

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) \equiv \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{ip_1 \cdot x_1} \dots e^{ip_N \cdot x_N} \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle$$

fuera de la capa de masa

notar signos



$\propto (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_N)$

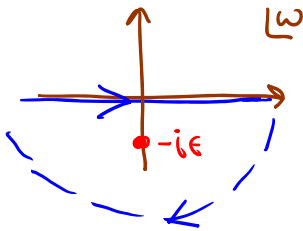
$G_N(x_1, \dots, x_N)$

depende solo de diferencias
 $x_1 - x_2, x_1 - x_3, \dots, x_1 - x_N$

Para mostrar esto, consideremos primero la región de la

integral $\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1^0 d^4x_2^0 \dots d^4x_N^0$ donde $x_1^0 > \max(x_{n>1}^0) \equiv t$:
restringe a $\int_t^{\infty} d^4x_1^0$

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) = \int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \left[\theta(x_1^0 - t) \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle \right.$$



$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega(x_1^0 - t)}}{\omega + i\epsilon} + \theta(t - x_1^0) \dots \right]$$

ignorar

Insertar (p. 428)

$$\hat{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{\epsilon_{\vec{q}} \neq \Omega} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\epsilon_{\vec{q}}}} |\epsilon_{\vec{q}}\rangle \langle \epsilon_{\vec{q}}|$$

$$= \sum_{\epsilon_{\vec{q}} \neq \Omega} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\epsilon_{\vec{q}}}} \int d^4x_1 \dots e^{ip_1 \cdot x_1} \dots \left[\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\epsilon} e^{-i\omega(x_1^0 - t)} \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) | \epsilon_{\vec{q}} \rangle \right.$$

$$\left. \times \langle \epsilon_{\vec{q}} | T \{ \hat{\varphi}_H(x_2) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle + \dots \right] \langle \Omega | \hat{\varphi}_H(x_1) | \epsilon_{\vec{q}} \rangle e^{-iq \cdot x_1} \Big|_{\vec{q} = \vec{p}_1}^{\omega = E_{\epsilon_{\vec{q}}}}$$

(ver p. 429)

La integral sobre x_1^μ se descompone entonces en

$$\int d^4x_1 e^{ix_1^0(p_1^0 - \omega - E_{\epsilon_{\vec{q}}})} \int d^3x_1 e^{-i\vec{x}_1 \cdot (\vec{p}_1 - \vec{q})} = (2\pi) \delta(p_1^0 - \omega - E_{\epsilon_{\vec{q}}}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{q}),$$

Usando estas deltas de Dirac para eliminar las integrales sobre \vec{q} y ω , tenemos

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots, p_N) = \sum_{\epsilon_0 \neq \Omega} \frac{1}{2E_{\epsilon_0}} \int d^4x_2 \dots e^{ip_2 \cdot x_2} \dots \frac{i e^{i(p_1^0 - E_{\epsilon_0})t}}{p_1^0 - E_{\epsilon_0} + i\epsilon}$$

$$\cdot \langle \Omega | \hat{\phi}_H(0) | \epsilon_0 \rangle \langle \epsilon_0 | T \{ \hat{\phi}_H(x_2) \dots \} | \Omega \rangle$$

+ ...
 ↖ otros órdenes temporales

El término en la suma que corresponde al estado de 1 partícula, $|\epsilon_0\rangle = |\vec{0}\rangle$, contribuye aquí nuevamente un polo aislado:

$$\tilde{G}_N(p_1, \dots) = \int d^4x_2 \dots e^{ip_2 \cdot x_2} \dots \frac{i e^{i(p_1^0 - E_{\vec{p}_1})t}}{2E_{\vec{p}_1} p_1^0 - E_{\vec{p}_1} + i\epsilon} \langle \Omega | \hat{\phi}_H(0) | \vec{0} \rangle \langle \vec{p}_1 | T \{ \hat{\phi}_H(x_2) \dots \} | \Omega \rangle$$

↖ $\equiv \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2}$

$$\underbrace{\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{(p_1^0 + E_{\vec{p}_1})}{2E_{\vec{p}_1}} e^{i(p_1^0 - E_{\vec{p}_1})t}}_{\rightarrow 1 \text{ si } p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1}} \underbrace{\sqrt{2}}_{p.431}$$

+ ...
 ↖ términos de estados multiparticulares y de otros órdenes temporales

Si $p_1^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_1}$ ($\Rightarrow p_1^2 \rightarrow m^2$ $\forall p_1^0 > 0$) este término diverge y da por tanto la contribución dominante a la función de correlación (singularidad que proviene de la región $x_1^0 \rightarrow +\infty$):