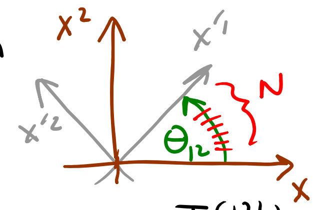
Las matrices de rotaciones/empujones se pueden reconstruir a partir de estos generadores:



p.ej.,
$$\underset{\sim}{{}^{(12)}\Lambda}(\theta_{12}) = \lim_{N\to\infty}\left(\underset{\sim}{\mathbb{1}} + i\frac{\theta_{12}}{N}\underset{\sim}{J}^{(12)}\right)^N = \exp(i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)}),$$

no infinitesimal

relación que también podemos verificar directamente:

$$\exp(\theta_{12} i\underset{\sim}{J}^{(12)}) \equiv \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} + \theta_{12}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\theta_{12}^2}{2!}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\overbrace{1-\theta^2/2!+\ldots}^{\cos\theta}&\overbrace{\theta-\theta^3/3!+\ldots}^{\mathrm{sen}\,\theta}&0\\0&-\theta+\theta^3/3!-\ldots&1-\theta^2/2!+\ldots&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \underset{\sim}{{}^{(12)}\Lambda}(\theta_{12}).$$

p.36

Dada cualquier $\underset{\sim}{\omega}$ antisimétrica, podemos descomponerla en la forma $\underset{\sim}{\omega} = -\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}\underset{\sim}{J}^{(\lambda\rho)}$,

$\frac{1}{2}$ por término repetido: p.ej. $\omega_{12}J^{(12)} = +\omega_{21}J^{(21)}$

así que los 6 generadores $\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}$ nos dan una base para el espacio de todas las posibles transformaciones de Lorentz infinitesimales. Repitiendo una misma transformación infinitesimal arbitraria un número infinito de veces, obtenemos la matriz $\underset{\sim}{\Lambda} \in SO^+(3,1)$ más general:

$SO^{+}(3,1)$ ω $\mathbb{1}$ $\underset{\sim}{\omega} \in T_{\underset{\sim}{1}} SO^{+}(3,1)$

no infinitesimal

$$\underset{\sim}{\Lambda}(\omega) = \lim_{N\to\infty}\left[\underset{\sim}{\mathbb{1}} + \frac{1}{N}\left(-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}\underset{\sim}{J}^{(\lambda\rho)}\right)\right]^N = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}\underset{\sim}{J}^{(\lambda\rho)}\right).$$

Notemos que en esta iteración aparecen en general productos $\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}\underset{\sim}{J}^{(\rho\sigma)}$ de 2 generadores distintos, p.ej.,

$$i\underset{\sim}{J}^{(12)}\, i\underset{\sim}{J}^{(13)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix},$$

ó

$$i\underset{\sim}{J}^{(13)}\, i\underset{\sim}{J}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

y que estos productos (tal como $\underset{\sim}{J}^{(12)2}$, $\underset{\sim}{J}^{(13)2}$, etc.) NO pertenecen al mismo espacio de matrices $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ con $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Pero curiosamente, el conmutador

$$\left[i\underset{\sim}{J}^{(12)}, i\underset{\sim}{J}^{(13)}\right] = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\end{pmatrix} = -i\underset{\sim}{J}^{(23)}$$

(tal como $\left[i\underset{\sim}{J}^{(12)}, i\underset{\sim}{J}^{(12)}\right] = 0$, etc.) ¡SÍ pertenece al mismo espacio!

De hecho, a partir de la definición original (p. 40)

$$iJ^{(\mu\nu)\lambda}{}_{\kappa} = -\eta^{\mu\lambda}\delta^{\nu}_{\kappa} + \eta^{\nu\lambda}\delta^{\mu}_{\kappa},$$ δ^{ν}_{λ} después de subir índice λ

se puede mostrar el resultado general (Tarea 1)

$$\boxed{[\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}, \underset{\sim}{J}^{(\rho\sigma)}] = i\left(\eta^{\mu\sigma}\underset{\sim}{J}^{(\nu\rho)} + \eta^{\nu\rho}\underset{\sim}{J}^{(\mu\sigma)} - \eta^{\mu\rho}\underset{\sim}{J}^{(\nu\sigma)} - \eta^{\nu\sigma}\underset{\sim}{J}^{(\mu\rho)}\right)} \quad (2)$$

El que los conmutadores de los generadores se puedan expresar como combinaciones lineales de los generadores no es casualidad, sino uno de los requisitos básicos para que $SO^{+}(3,1)$ sea un grupo de Lie. Por simplicidad de notación, conviene explicar esto restringiéndonos al subgrupo de rotaciones $SO(3) \subset SO^{+}(3,1)$. El punto es que, si bien, p.ej.,

$$\exp(i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)})\exp(i\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}) \neq \exp(i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)} + i\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}),$$

las 2 transformaciones del lado izquierdo son rotaciones, y así lo debe ser también su producto, que se debe poder expresar por lo tanto en la forma

$$\exp\left(i\varphi_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)} + i\varphi_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)} + i\varphi_{23}\underset{\sim}{J}^{(23)}\right)$$ para ciertos $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$.

domingo, 26 de agosto de 2007 11:15 p.m.

Tenemos entonces

$$i\varphi_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)}+i\varphi_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}+i\varphi_{23}\underset{\sim}{J}^{(23)}$$

$$=\ln\Big[\overbrace{(\underset{\sim}{\mathbb{1}}+i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)}-\tfrac{1}{2!}\theta_{12}^2\underset{\sim}{J}^{(12)^2}+\ldots)}^{\exp(i\theta_{12}J^{(12)})}\overbrace{(\underset{\sim}{\mathbb{1}}+i\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}-\tfrac{1}{2!}\theta_{13}^2\underset{\sim}{J}^{(13)^2}+\ldots)}^{\exp(i\theta_{13}J^{(13)})}\Big]$$

$$=\ln\Big[\underset{\sim}{\mathbb{1}}+i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)}+i\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}-\tfrac{1}{2}\theta_{12}^2\underset{\sim}{J}^{(12)^2}-\tfrac{1}{2}\theta_{13}^2\underset{\sim}{J}^{(13)^2}-\theta_{12}\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(12)}\underset{\sim}{J}^{(13)}+\ldots\Big]$$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots$

$$=i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)}+i\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}\cancel{-\tfrac{1}{2}\theta_{12}^2\underset{\sim}{J}^{(12)^2}}\cancel{-\tfrac{1}{2}\theta_{13}^2\underset{\sim}{J}^{(13)^2}}-\theta_{12}\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(12)}\underset{\sim}{J}^{(13)}+\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\cancel{-\theta_{12}^2\underset{\sim}{J}^{(12)^2}}\cancel{-\theta_{13}^2\underset{\sim}{J}^{(13)^2}}-\theta_{12}\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(12)}\underset{\sim}{J}^{(13)}-\theta_{12}\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}\underset{\sim}{J}^{(12)}+\ldots\right)+\ldots$$

$$=i\theta_{12}\underset{\sim}{J}^{(12)}+i\theta_{13}\underset{\sim}{J}^{(13)}-\tfrac{1}{2}\theta_{12}\theta_{13}\left[\underset{\sim}{J}^{(12)},\underset{\sim}{J}^{(13)}\right]+\mathcal{O}(\theta^3)\quad,$$

de donde vemos que $i\left[\underset{\sim}{J}^{(12)},\underset{\sim}{J}^{(13)}\right]$ <u>debe</u> ser una combinación lineal de $\underset{\sim}{J}^{(12)}$, $\underset{\sim}{J}^{(13)}$ y $\underset{\sim}{J}^{(23)}$ (con coefs. reales).

Los términos subsecuentes también involucran conmutadores, por Baker-Campbell-Hausdorff: $\boxed{e^Ae^B=\exp\left(A+B+\tfrac{1}{2}[A,B]+\tfrac{1}{12}[A,[A,B]]+\ldots\right)}$.

L4: 15/08/22

De aquí vemos que los conmutadores entre los 3 generadores $\underset{\sim}{J}^{(12)}$, $\underset{\sim}{J}^{(13)}$, $\underset{\sim}{J}^{(23)}$ tienen la información esencial sobre la tabla de multiplicación de SO(3).

El espacio de todas las combinaciones lineales posibles de estos 3 generadores (con coeficientes no necesariamente pequeños) se conoce como el álgebra de Lie del grupo $SO(3)$, la cual se denota algunas veces como $so(3)$.

De manera similar, el espacio de todas las combinaciones lineales posibles de los 6 generadores $\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}$ se conoce como el álgebra de Lie del grupo de Lorentz $SO^+(3,1)$, y las relaciones de conmutación (2) ← p. 43 determinan la tabla de multiplicación del grupo. Cabe señalar que, como esta álgebra está relacionada con transformaciones infinitesimales, su naturaleza depende solo del componente del grupo que contiene a $\underset{\sim}{\mathbb{1}}$, de modo que las álgebras de los grupos de Lorentz restringido y completo coinciden, es decir, $so^+(3,1) = so(3,1) = o(3,1)$. ← P, T son discretos, así que no hay versión infinitesimal

Más en general, matemáticamente un álgebra de Lie es simplemente un espacio vectorial A con un "producto"

$$[\,,\,] : A \otimes A \to A \qquad (v_1, v_2) \mapsto v_3 = [v_1, v_2]$$

que tiene las mismas propiedades

que el conmutador habitual (en particular, satisface la identidad de Jacobi $[V_1,[V_2,V_3]]+[V_2,[V_3,V_1]]+[V_3,[V_1,V_2]]=0$ $\forall V_1,V_2,V_3\in A$). Dada un álgebra de Lie, existe un mapeo exponencial que determina un grupo de Lie asociado.

Habiendo ya entendido por completo al grupo (y álgebra) de Lorentz, recordemos que la métrica de Minkowski es invariante no solo bajo Lorentz sino también bajo traslaciones

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad , \quad a^\mu \in \mathbb{R}^{3,1} .$$

espacio de Minkowski

Estas son 4 transformaciones independientes continuas. Claramente conmutan entre sí, y forman por tanto un grupo de Lie abeliano. Denotaremos P^μ a los 4 generadores correspondientes.

La transformación más general entre 2 sistemas inerciales es, como dijimos antes,

$$x^\mu \xrightarrow[(\underset{\sim}{\Lambda},\,\bar{a})]{} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

$\leftarrow$ 10 parámetros continuos independientes

El producto correspondiente es $\underbrace{(\underset{\sim}{\Lambda}_2,\bar{a}_2)}_{\bar{x}''=\underset{\sim}{\Lambda}_2\bar{x}'+\bar{a}_2}\cdot\underbrace{(\underset{\sim}{\Lambda}_1,\bar{a}_1)}_{\bar{x}'=\underset{\sim}{\Lambda}_1\bar{x}+\bar{a}_1}=\underbrace{(\underset{\sim}{\Lambda}_2\underset{\sim}{\Lambda}_1,\bar{a}_2+\underset{\sim}{\Lambda}_2\bar{a}_1)}_{\bar{x}''=\underset{\sim}{\Lambda}_2\underset{\sim}{\Lambda}_1\bar{x}+\bar{a}_2+\underset{\sim}{\Lambda}_2\bar{a}_1}$

donde vemos que las translaciones espaciotemporales y las transformaciones de Lorentz no conmutan entre sí.

Dado que existe un inverso, $(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a})^{-1} = (\underset{\sim}{\Lambda}^{-1}, -\underset{\sim}{\Lambda}^{-1}\bar{a})$, el conjunto combinado de estos 10 tipos de transformaciones constituye un nuevo grupo de Lie: el grupo de Poincaré, que denotaremos Poincaré(3,1) (también conocido como grupo de Lorentz inhomogéneo, IO(3,1), en cuyo caso a O(3,1) se le llama grupo de Lorentz homogéneo).

Una manera de deducir el álgebra de Poincaré es representar a $(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a})$ como una matriz 5×5:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Lambda} & \bar{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{índices } {}^{M}{}_{N}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}' = \underset{\sim}{\Lambda}\bar{x} + \bar{a}$$

, con $M \equiv (\mu, 4)$, $N \equiv (\nu, 4)$

En esta notación, los generadores de translaciones, definidos por

$$\underbrace{(\underset{\sim}{1}, \bar{a})}_{\begin{pmatrix} \underset{\sim}{1} & \bar{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{(\underset{\sim}{1}, \bar{0})}_{\begin{pmatrix} \underset{\sim}{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + i a^{\mu} P_{(\mu)} \quad \text{para } |a^{\mu}| << 1,$$

están representados por matrices 5×5 $\underset{\sim}{P}_{(\mu)}$, con componentes

$$i P_{(\mu)}{}^{M}{}_{N} = \delta^{M}_{\mu}\, \delta^{4}_{N} \qquad \left(\text{p.ej. } i\underset{\sim}{P}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \right).$$

A partir de esto podemos calcular (Tarea 1)

$$\boxed{\begin{aligned} &[\underset{\sim}{P}^{(\mu)}, \underset{\sim}{P}^{(\nu)}] = 0 \\ &[\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}, \underset{\sim}{P}^{(\lambda)}] = i\left(\eta^{\nu\lambda}\underset{\sim}{P}^{(\mu)} - \eta^{\mu\lambda}\underset{\sim}{P}^{(\nu)}\right) \end{aligned}} \qquad (3)$$

(donde por supuesto $P^{(\mu)} \equiv \eta^{\mu\nu} P_{(\nu)}$, de tal manera que $a^{\mu} P_{(\mu)} = a_{\mu} P^{(\mu)}$), relaciones de conmutación que junto con las de Lorentz, ec. (2), ← p. 43 definen el álgebra de Lie del grupo Poincaré(3,1).

Habiendo entendido ya por completo la estructura del grupo de Poincaré, nuestra siguiente meta es entender la manera en que actúa a nivel cuántico.

Recordemos primero cómo se implementan las simetrías en el formalismo de la mecánica cuántica. Asociado a cada transformación T de nuestro sistema físico (o de nuestro

↑ p.ej., Poincaré $(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a})$

punto de vista con respecto a ese mismo sistema físico — transformación 'activa' vs. 'pasiva'), existe un operador lineal $\hat{U}(T) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

podríamos llamarle $\hat{T}$

$$|\psi\rangle \longmapsto |\psi'\rangle = \hat{U}(T)|\psi\rangle \equiv |\hat{U}\psi\rangle .$$

Si T es una simetría del sistema, entonces debemos tener

$$|\langle\varphi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\hat{U}\varphi|\hat{U}\psi\rangle|^2 = \underbrace{|\langle\varphi|\psi\rangle|^2}_{\text{probabilidad de transición de } |\psi\rangle \text{ a } |\varphi\rangle} \quad \forall \quad |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H},$$

lo cual se cumple si

$$\langle\hat{U}\varphi|\hat{U}\psi\rangle = \langle\varphi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle \quad \forall \quad |\varphi\rangle, |\psi\rangle,$$

es decir, si $\hat{U}$ es un operador unitario : $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$.

Una posibilidad más exótica sería que tuviéramos

$$\langle\hat{U}\varphi|\hat{U}\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^* \quad \forall \quad |\psi\rangle, |\varphi\rangle$$

Esto sólo sería posible si $\hat{U}$ fuera antilineal en lugar de lineal, es decir, si $\hat{U}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle) = \alpha^*\hat{U}|\psi\rangle + \beta^*\hat{U}|\varphi\rangle \ \forall \ |\psi\rangle, |\varphi\rangle$.

Para un operador de este tipo, la conjugación hermitiana debe definirse a través de $\langle U\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|U^\dagger\psi\rangle^* = \langle U^\dagger\psi|\varphi\rangle$ $\forall \ |\psi\rangle, |\varphi\rangle$. Dada esta definición, la condición de antiunitariedad $\underbrace{\langle \hat{U}\varphi | \hat{U}\psi \rangle}_{\langle \hat{U}^{\dagger}\hat{U}\psi | \varphi \rangle} = \langle \psi | \varphi \rangle \quad \forall\, |\psi\rangle, |\varphi\rangle$

se traduce en

$\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{\mathbb{1}}$, que coincide con la fórmula para unitariedad (aunque aquí $\dagger$ significa otra cosa).

Ahora, ¿cuál de estas 2 condiciones es relevante desde el punto de vista físico? Claramente, para cualquier transformación T que pueda reducirse de manera continua a la identidad (que es obviamente lineal y unitaria), $\hat{U}(T)$ será necesariamente lineal y unitario.

Un operador antilineal y antiunitario $\hat{U}(T)$ solo podría estar asociado entonces a una transformación T no conectada a la identidad. De hecho, el único ejemplo conocido en el mundo real involucra a la transformación de inversión temporal, $T = \mathcal{T}$.

La razón por la cual $\hat{U}(\mathcal{T})$ debe ser necesariamente antiunitario la entenderemos más adelante.

Ahora, si $|\psi'\rangle = \hat{U}(T_1)|\psi\rangle$ y $|\psi''\rangle = \hat{U}(T_2)|\psi'\rangle = \hat{U}(T_2)\hat{U}(T_1)|\psi\rangle$, esperamos tener también $|\psi''\rangle = \hat{U}(T_2T_1)|\psi\rangle$, es decir,

$$\hat{U}(T_2)\hat{U}(T_1) = \hat{U}(T_2T_1) \quad \forall \quad T_1, T_2 \in G,$$

lo cual diría que los operadores $\hat{U}(T)$ constituyen una representación del grupo de simetría G. ← misma tabla de multiplicación

Para los matemáticos, un grupo G es siempre un conjunto de elementos abstractos $\{g_\alpha\}$ que satisfacen cierta regla de multiplicación, y una representación R de G es una 'encarnación' de estos elementos como operadores lineales que actúan en un cierto espacio vectorial V
$g_\alpha \overset{R}{\longmapsto} \mathcal{O}_\alpha$ $(\mathcal{O}_\alpha : V \to V)$, de tal manera que el producto se preserva: $g_1 g_2 = g_3 \Rightarrow \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3$. (Cabe señalar que el mapeo $g_\alpha \mapsto \mathcal{O}_\alpha$ no necesariamente es uno a uno — se requiere que R sea un "homomorfismo", y no forzosamente un "isomorfismo". Caso extremo sería $g_\alpha \mapsto \mathbb{1}$, conocido como la representación "trivial".) Escogiendo una base para V, los $\mathcal{O}_\alpha$ pueden pensarse como matrices $\dim V \times \dim V$, y $\dim V$ se conoce como la dimensión de R. En resumen, una

martes, 28 de agosto de 2007 10:40 p.m.

representación es una implementación del grupo G en términos de matrices.

L4: 13/08/18

Notemos que, de acuerdo con esto, las matrices $N\times N$ que normalmente pensamos que definen p.ej. a $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(3,1)$ (con $N=2,3,4$ resp.) no son "en realidad" el grupo en sí, sino una representación del grupo, con dimensión N: la representación "fundamental". (Por supuesto, en la práctica esta distinción no es importante, porque en estos casos la representación en cuestión sí es un isomorfismo.)

Cuando el grupo G del cual tenemos una representación es un grupo de Lie, considerando elementos $T\in G$ cerca de la identidad obtenemos también una representación del álgebra de Lie correspondiente:

generadores

representación de los generadores

$$\hat{U}(\underbrace{\mathbb{1}+i\epsilon^a Y^a}_{T(\epsilon)}) = \hat{\mathbb{1}} + i\epsilon^a \hat{Y}^a,$$

parámetros $\epsilon^a \ll 1$

es decir, $|\psi\rangle \xrightarrow{T(\epsilon)} |\psi'\rangle \equiv |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle$

con $|\delta\psi\rangle$ lineal en ϵ^a $\quad |\delta\psi\rangle \equiv \epsilon^a \hat{Y}^a |\psi\rangle$

$$[Y^a, Y^b] = i f^{ab}_{\ \ c} Y^c \longleftrightarrow [\hat{Y}^a, \hat{Y}^b] = i f^{ab}_{\ \ c} \hat{Y}^c$$

constantes de estructura

martes, 28 de agosto de 2007 11:19 p.m.

Iterando la transformación infinitesimal, obtenemos la versión finita

$$\hat{U}(\underbrace{\exp(i\alpha^a Y^a)}_{\equiv T(\alpha)}) = \exp(i\alpha^a \hat{Y}^a).$$

parámetros finitos

Si los parámetros α^a son reales, entonces el requisito de que $\hat{U}$ sea un operador unitario equivale a pedir que los generadores $\hat{Y}^a$ sean operadores hermitianos (como correspondería a observables). En este caso, se puede ver a partir de las relaciones de conmutación que las constantes de estructura $f^{ab}_{\ c}$ deben ser reales.

Aplicando todo esto al caso del grupo de Poincaré, vemos que a nivel cuántico tendremos

cf. $J^{(\mu\nu)}_{\ \lambda\rho} \leftrightarrow \underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}$

6 generadores de Lorentz $\hat{J}^{\mu\nu}$ $\equiv$ momento 'angular'

\+ 4 generadores de traslaciones $\hat{P}^\mu$ $\equiv$ energía-momento

definidos como operadores sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que satisfacen las reglas de conmutación (2) y (3). A partir de
p.43 p.48
esta representación del álgebra de Poincaré, querremos construir una representación del grupo, y asegurarnos de que sea unitaria.

5: 17/08/22

Para que no nos perdamos con las definiciones matemáticas, recordemos que en mecánica cuántica no relativista habíamos aprendido ya que existe una partícula que se llama el "electrón", asociada a un espacio de Hilbert

"espín" arriba/abajo

$$\mathcal{H}_e = \{\text{combinaciones de } |\vec{p}, \uparrow\rangle, |\vec{p}, \downarrow\rangle \ \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^3\}$$

$j_z = \pm\frac{1}{2}$

Una primera pregunta es ¿porqué consideramos a $|\vec{0}, \uparrow\rangle$ y $|\vec{0}, \downarrow\rangle$ como 2 diferentes estados internos de una misma partícula, en lugar de hablar de 2 distintas partículas?

La respuesta: ¡porque podemos transformar $|\vec{0}, \uparrow\rangle$ en $|\vec{0}, \downarrow\rangle$ con solo girar la cabeza (aplicar una rotación)!

Más en general, cuando el electrón, ahora relativista, visto desde un marco inercial S, está en un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_e$ (p.ej., $|\vec{p}, \downarrow\rangle$), sabemos que visto desde otro marco $S' = (\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a}) \cdot S$ se encontrará en algún estado correspondiente $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}_e$.

Esto define un operador (unitario) $\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a}) : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle$.

El conjunto de dichos operadores $\forall\,(\hat{\Lambda},\bar{a})$ por supuesto preservará el producto de Poincaré(3,1), así que $\mathcal{H}_e$ "porta" una representación de este grupo de simetrías.

Cualquier tipo de partícula dará lugar de igual modo a una rep. de Poincaré. En este curso, por tanto, estamos utilizando esta misma conexión, pero en sentido inverso: queremos averiguar, en completa generalidad, cuáles tipos de partículas pudieran existir (en $\mathbb{R}^{3,1}$), y para ello nos proponemos responder la pregunta matemática de cuáles son las distintas representaciones (unitarias) de Poincaré (3,1). Enfocando el problema así,

L4: 08/02/17

el grupo de simetría aparece como ingrediente primario (y lo seguirá siendo cuando examinemos partículas con simetrías "internas" (= no espaciotemporales) como pej. el $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ del Modelo Estándar).

Por supuesto, la pregunta de cuáles tipos de partículas realmente existen en la naturaleza solo puede responderse con la ayuda de datos experimentales.

Como dijimos antes, las propias matrices $\underset{\sim}{\Lambda}(\omega)$ son simplemente una representación específica de $SO^+(3,1)$ — conocida como la representación vectorial (que actúa sobre el espacio de Minkowski). Esta representación no es unitaria, puesto que los generadores de empujones $\underset{\sim}{J}^{(0i)}$ no son matrices hermitianas. De hecho, es un resultado matemático general que los grupos no compactos (como es el caso del grupo de Lorentz) no tienen ninguna representación unitaria (no trivial) de dimensión finita.

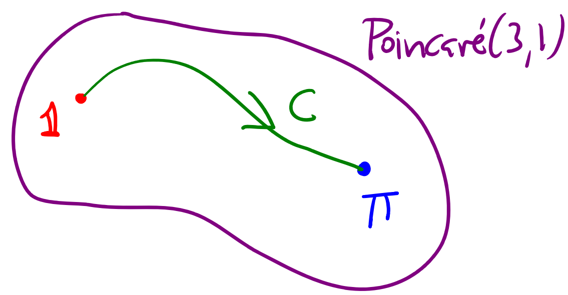
dim infinita

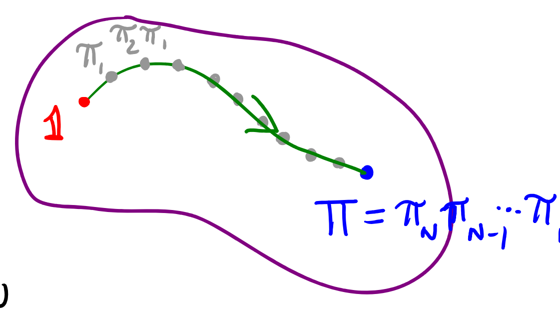
Por ahora nos interesa construir representaciones unitarias de Poincaré(3,1), puesto que son estas las que actuarán sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de un sistema de partícula(s) en $\mathbb{R}^{3,1}$. Esta construcción involucra en primer lugar la identificación de un espacio de estados $\{|\psi\rangle\}$, y la especificación de la manera en que los generadores de Poincaré $\hat{J}^{\mu\nu}$, $\hat{P}^{\mu}$ actúan sobre ellos, incorporando las relaciones de conmutación (2) p.43 y (3) p.48, y asegurándonos de que $\hat{J}^{\mu\nu}$, $\hat{P}^{\mu}$ sean hermitianos.

Una vez que hayamos definido $\hat{J}^{\mu\nu}$ y $\hat{P}^{\mu}$, sabremos ya cómo se representan las transformaciones de Poincaré infinitesimales:

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{1} + \underbrace{\underset{\sim}{\omega}}_{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}},\ \bar{a} = \bar{\epsilon}) = \hat{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu} + i\,\epsilon^{\mu}\hat{P}_{\mu}$$

Para obtener $\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a})$ con $(\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a}) \equiv \Pi$ finitos, podemos escoger una trayectoria C en Poincaré(3,1) que conecte a la identidad con la transformación Π, subdividirla en N pedazos (con $N \to \infty$) que correspondan a actuar sucesivamente con transformaciones $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_N$



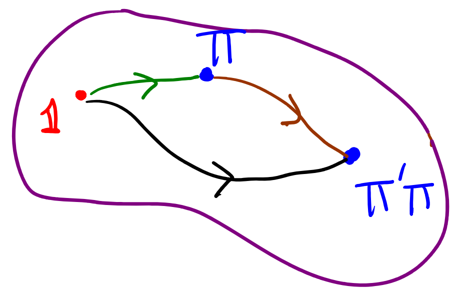


y definir

$$\hat{U}(\Pi) = \lim_{N\to\infty} \hat{U}(\pi_N \pi_{N-1} \cdots \pi_1) \equiv \lim_{N\to\infty} \hat{U}(\pi_N)\hat{U}(\pi_{N-1})\cdots\hat{U}(\pi_1)$$

Pero hay una sutileza aquí: debemos preguntarnos si $\hat{U}(\Pi)$ pudiera depender del camino C que elegimos.

Porque si fuera así, entonces no estaría garantizado que



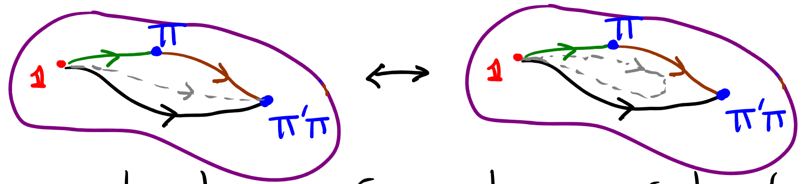
$$\hat{U}(\Pi')\,\hat{U}(\Pi) = \hat{U}(\Pi'\Pi) \quad \forall\ \Pi', \Pi$$

es decir, que $\hat{U}$ sea en verdad una representación del grupo de Poincaré. Recordemos que en la p. 51 obtuvimos este requisito argumentando que, si $|\psi'\rangle \equiv \hat{U}(\Pi)|\psi\rangle$ y $|\psi''\rangle \equiv \hat{U}(\Pi')|\psi'\rangle$, entonces el estado $\hat{U}(\Pi'\Pi)|\psi\rangle$ debe coincidir con el estado $|\psi''\rangle = \hat{U}(\Pi')\hat{U}(\Pi)|\psi\rangle$. Esto sin duda se cumple si las $\hat{U}$'s forman una representación; pero la sutileza es que 2 distintos kets describen al mismo estado físico si difieren por una fase, así que cabe la posibilidad de que en general tengamos

$$\hat{U}(\Pi')\,\hat{U}(\Pi) = e^{i\phi(\Pi',\Pi)}\,\hat{U}(\Pi'\Pi), \qquad (4)$$

lo cual se conoce como una representación proyectiva.

Ahora, se puede mostrar que $\phi(\Pi',\Pi)=0$ si las trayectorias $\mathbb{1}\to\Pi\to\Pi'\Pi$ y $\mathbb{1}\to\Pi'\Pi$ se pueden deformar



continúamente una en la otra, así que la representación no podrá ser proyectiva si el grupo en cuestión es simplemente conexo (= cualquier lazo se puede encoger de manera continua hasta desaparecer). Pero el grupo de Poincaré no lo es, por culpa de su subgrupo de rotaciones $SO(3)$, y tiene por tanto representaciones proyectivas. La buena noticia es que Poincaré(3,1) (al igual que $SO(3)$) resulta ser "doblemente conexo": existen lazos no contraíbles, pero al recorrer cualquiera de ellos 2 veces se obtiene un lazo contraíble (cosa que los matemáticos resumen diciendo que el "primer grupo de homotopía" de Poincaré(3,1), $SO^+(3,1)$ y $SO(3)$ es $\mathbb{Z}_2 \equiv \{+1,-1\}$), y esto restringe las posibles fases a solo $e^{i\phi} = \pm 1$.

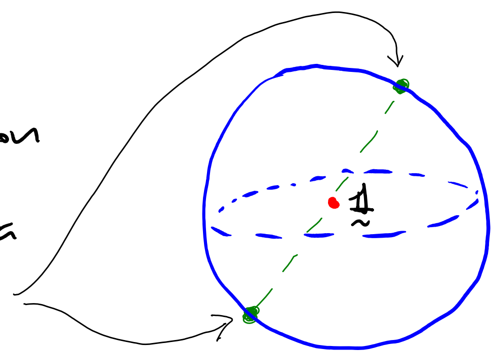
= cualquier trayectoria entre 2 puntos se puede deformar continuamente a cualquier otra entre los mismos puntos

[Los detalles de toda esta historia se pueden encontrar, p.ej., en Weinberg Sec. 2.7 y Apéndice B del mismo capítulo.]

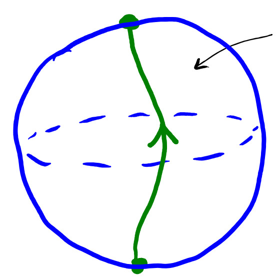
¿Por qué $SO(3)$ es doblemente conexo?

Una rotación está caracterizada por un eje $\check{n} \in \mathbb{R}^3$ (con $|\check{n}|=1$) y un ángulo $0 \leq \theta \leq \pi$, donde debemos tomar en cuenta que $(\check{n},0) \simeq (\check{n}',0)$ y $(\check{n},\pi) \simeq (-\check{n},\pi)$. Formando la combinación $\vec{\theta} \equiv \theta\check{n}$, podemos representar $SO(3)$ como la bola 3-dimensional

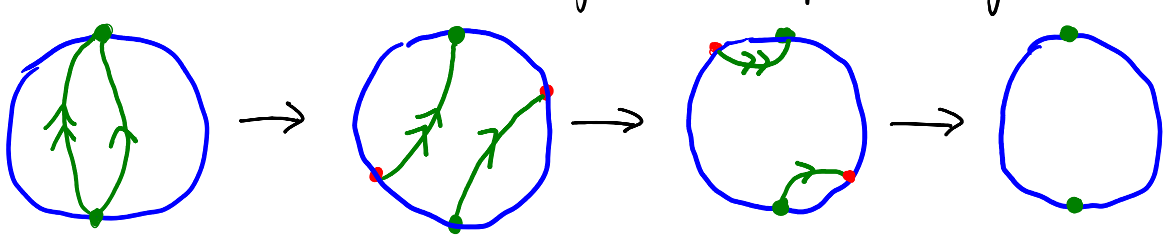
$B^3(\pi) \equiv \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{\theta}| \leq \pi\}$, con puntos opuestos en la frontera (2-esfera S^2) identificados:



Vemos así fácilmente que un lazo que va de, p.ej. el polo sur al polo norte NO se puede encoger, así que $SO(3)$ efectivamente NO es simplemente conexo. Pero un lazo que recorre 2 veces esta misma trayectoria SÍ puede encogerse:



esta es una rotación por 2π



Resulta entonces ser el caso que Poincaré(3,1) tiene 2 tipos cualitativamente distintos de representaciones:

I) Reps 'fieles', con $\exp(i\phi)=+1$ en (4), $\forall\ \Pi\Pi'$.

En particular, $\hat{U}\left({}^{(ij)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta_{ij}=2\pi)\right)=+\hat{1}$ ← Rep/estados con "espín entero"

II) Reps proyectivas, con $\exp(i\phi)=+1$ en (4) si la trayectoria asociada a $\hat{U}^{-1}(\Pi'\Pi)\,\hat{U}(\Pi')\,\hat{U}(\Pi)$ es contraíble, y $\exp(i\phi)=-1$ si no lo es.

En particular, $\hat{U}\left({}^{(ij)}\underset{\sim}{\Lambda}(\theta_{ij}=2\pi)\right)=-\hat{1}$ ← Rep/estados con "espín semientero"

Notar que NO podemos formar una superposición del tipo $|I\rangle+|II\rangle$, porque el estado resultante no transformaría ni como I) ni como II). Esta prohibición es un ejemplo de lo que se conoce como una "regla de superselección".

Una manera alternativa pero equivalente de tomar en cuenta la igualdad física $|\psi\rangle\simeq e^{i\phi}|\psi\rangle$ es afirmar que el 'verdadero' grupo de simetría no es $SO(3)$ ó $SO^{+}(3,1)$, sino su correspondiente "grupo de recubrimiento universal" (o cubriente (covering group)), $SU(2)$ ó $SL(2\,\mathbb{C})$, respectivamente, que es un grupo con la misma álgebra de Lie (⟷ mismos generadores) pero con la distinción de que sí es simplemente conexo, y no tiene por tanto reps proyectivas. La relación precisa entre los grupos originales y sus recubrimientos es (ver Tarea 1)

← bola de p. 57a, SIN identificada

$$SO(3) = \underbrace{SU(2)/\mathbb{Z}_2} \quad y \quad SO^+(3,1) = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

$\{+1,-1\}$

"clase lateral" (coset)

Espacio cociente: $G/H \equiv \{g \in G, \text{ con } g \simeq gh \ \forall\, h \in H\}$,

es grupo solo si H es un subgrupo "normal" (="invariante") de G, es decir, si $ghg^{-1} \in H \ \forall\, h \in H, g \in G$

Desde esta perspectiva, tanto I) como II) describen reps fieles (= no proyectivas) del grupo de simetría, y el que en el caso II) se encuentre $\hat{U} = -\hat{\mathbb{1}}$ para rotaciones por 2π es posible simplemente porque en $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$ una rotación por 2π NO es la identidad. Nada de esto cambia las consecuencias físicas.

Regresemos ahora a la idea de construir explícitamente reps unitarias del grupo de Poincaré. Si en un cierto sistema de referencia S tenemos generadores $\hat{P}^{\mu}, \hat{J}^{\mu\nu}$ que actúan sobre estados $\{|\psi\rangle\}$, entonces después de hacer una transformación infinitesimal $\pi \equiv (\underset{\sim}{\mathbb{1}} + \underset{\sim}{\omega}, \bar{\epsilon})$ tenemos

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi_\pi\rangle \equiv \hat{U}(\underset{\sim}{\mathbb{1}} + \underset{\sim}{\omega}, \bar{\epsilon})|\psi\rangle$$
$$= \left(\hat{\mathbb{1}} + i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\right)|\psi\rangle$$
$$= |\psi\rangle + \underbrace{\left(i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\right)|\psi\rangle}_{\equiv |\delta\psi\rangle},$$

donde queda claro que el estado $|\delta\psi\rangle$ producido al actuar con los generadores sobre $|\psi\rangle$ representa el cambio $\delta|\psi\rangle$ en el estado original bajo la transformación infinitesimal en cuestión (p.ej. $\hat{J}^{12}|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle$ invariante bajo ${}^{(12)}\Lambda(\theta)$).

Si ahora contemplamos a esta misma transformación desde un nuevo sistema de referencia S', relacionado con S a través de la transformación finita $\Pi \equiv (\underset{\sim}{\Lambda}, \bar{a})$, tenemos

$$|\psi\rangle' \equiv \hat{U}(\Pi)|\psi\rangle \longrightarrow |\psi_\pi\rangle' \equiv \hat{U}(\Pi)|\psi_\pi\rangle$$
$$= \hat{U}(\Pi)\left(\hat{\mathbb{1}} + i\epsilon \hat{P}_\mu - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\right)|\psi\rangle$$
$$= |\psi\rangle' + \underbrace{\hat{U}(\Pi)\left(i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}\right)\underbrace{|\psi\rangle}_{\hat{U}^{-1}(\pi)|\psi'\rangle}}_{\equiv |\delta\psi'\rangle}$$