

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} = : \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}}_{\text{contracción}} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N} + \dots :$$

La utilidad de este resultado radica en que, justo como en el caso $N=2$, al tomar el valor esperado en el vacío libre $|0\rangle$, del lado derecho sob sobrevivirán los términos donde todos los operadores $\hat{\varphi}_{I_n}$ han sido contraídos (puesto que los otros términos involucran productos de operadores con \hat{a} 's, que aniquilan a $|0\rangle$ hacia la derecha, y/o \hat{a}^\dagger 's, que aniquilan a $\langle 0|$ hacia la izquierda).

Por supuesto, contraer todos los $\hat{\varphi}_{I_n}$'s solo es posible si N es par, y aprendemos entonces que

$$\langle 0|T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\}|0\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ es impar} \\ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}}_{\text{contracción}} \underbrace{\hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{contracción}} \dots \hat{\varphi}_{I_{N-1}} \hat{\varphi}_{I_N} + \dots & \text{si } N \text{ es par} \end{cases}$$

$G_N^{(0)}(x_1, \dots, x_N)$

$G_2^{(0)}(x_1, x_2)$

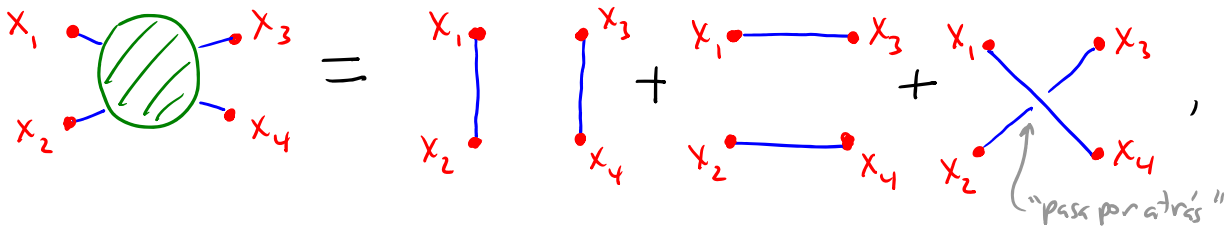
$\frac{1}{(N/2)!} \binom{N}{2} \binom{N-2}{2} \dots \binom{2}{2}$

términos con $\frac{N}{2}$ contracciones

Esto dice que cualquier $G_N^{(0)}$ es simplemente una suma sobre productos de K_F 's. P.ej., para $N=4$,

$$\underbrace{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4} \} | 0 \rangle}_{G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{propagador entre } x_1, x_2} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{amplitud de tener 1 partícula en 1/0 de los eventos } x_1, x_2, x_3, x_4} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{propagador entre } x_1, x_2} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4}}_{\text{amplitud de tener 1 partícula en 1/0 de los eventos } x_1, x_2, x_3, x_4}.$$

Este resultado se puede expresar de forma diagramática:

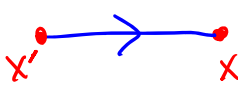


donde los puntos denotan lugares en el espaciotiempo, y las líneas representan propagadores, $x \cdot x' \equiv K_F(x-x')$.

Cada término \equiv diagrama del lado derecho califica un proceso en el espaciotiempo en el cual se crean 2 partículas libres en 2 de los puntos, y después éstas se propagan a los 2 puntos restantes, donde son aniquiladas.

Si las partículas tuvieran carga ($\Leftrightarrow \hat{\varphi}_I \neq \hat{\varphi}_I^\dagger$), entonces para distinguir entre partículas y antipartícula dibujaríamos por convención una flecha sobre cada línea en la dirección

de propagación de la partícula — que, como sabemos, es opuesta a la dirección de propagación de la antipartícula —, es decir,



$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\psi}_I(x) \hat{\psi}_I^\dagger(x') \} | 0 \rangle$$

contiene \hat{a}
contiene \hat{a}^\dagger

$$\equiv K_F(x-x')$$

A pesar de lo intuitiva que resulta esta notación diagramática, es importante notar que en cada diagrama NO estamos especificando el orden temporal en el que sucedan los eventos x_1, \dots, x_N , o la relación entre las correspondientes posiciones espaciales, ¡y menos aún estamos sugiriendo que las partículas se propagan literalmente a lo largo de las trayectorias indicadas por las líneas! Uno de estos diagramas no representa entonces directamente a 1 solo proceso específico sobre el espaciotiempo, sino que resume toda una familia de procesos posibles.

[30; 19/04/17]

Siguiendo estas mismas convenciones diagramáticas, examinemos ahora la expansión perturbativa del correlador

seguiremos llamando así para $\lambda \neq 0$ ahí donde NO es literalmente amplitud de propagación de una partícula

de 2 puntos (\equiv propagador) pero en la teoría interactuante,

$$G_2(x_1, x_2) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_{H1} \hat{\phi}_{H2} \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \exp[-i \int_{-T}^T dt \int d^3y \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}_{Iy}^4] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_{Iy}^4] \} | 0 \rangle}$$

p.393

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_2^{(n)}(x_1, x_2) \leftarrow \text{término de orden } \lambda^n$$

Consideremos primero el numerador $\equiv N_2(x_1, x_2)$. El término de $\mathcal{O}(\lambda)$ es

$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \hat{\phi}_I(x_2) \} | 0 \rangle = \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \equiv K_F(x_1 - x_2) = \text{---} x_1 \text{---} x_2 \text{---}$$

como esperábamos. El término de $\mathcal{O}(\lambda')$ es más interesante:

$$N_2^{(1)}(x_1, x_2) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \hat{\phi}_I(x_2) (-\frac{i\lambda}{4!}) \int d^4y \hat{\phi}_I(y)^4 \} | 0 \rangle$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \left[\underbrace{\hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy}}_{\text{otras maneras de contraer los } \hat{\phi}_{Iy} \text{ entre sí:}} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy} + \underbrace{\hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy}}_{\text{otras maneras de contraer } \hat{\phi}_{I1} \text{ y } \hat{\phi}_{I2} \text{ con los } \hat{\phi}_{Iy}:} \hat{\phi}_{Iy} \hat{\phi}_{Iy} \right]$$

$\frac{1}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 3$ términos iguales

$4 \cdot 3 = 12$ términos iguales

TOTAL: $3 + 12 = 15 = \frac{1}{3!} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{1}{6} 15 \cdot 6 \cdot 1$ ✓

$$= -i\lambda \int d^4y \left[\frac{1}{8} K_F(x_1 - x_2) K_F(y - y)^2 + \frac{1}{2} K_F(x_1 - y) K_F(y - y) K_F(y - x_2) \right]$$

Podemos resumir esto diagramáticamente, en la forma

$$N_2^{(1)}(x_1, x_2) = \overset{\substack{\text{generador} \\ \text{de } G_2(x_1, x_2)}}{x_1 \text{ --- } x_2} + \overset{\substack{\text{propagación de partícula libre ("partícula")}}{\text{---}}}{x_1 \text{ --- } y \text{ --- } x_2}$$

Estos dos diagramas resumen los QUINCE términos que tendríamos: solo importa la creatividad

donde hemos agregado a nuestro repertorio gráfico el

vértice de 4 patas $\equiv -i\lambda \int d^4y$ (omitindo $\frac{1}{4!}$)
↑ por φ^4

y adoptamos además la convención de que cada diagrama

lleva asociado un factor de simetría $\equiv \frac{1}{s}$, donde

s es el número de 'versiones' del diagrama que resultan equivalentes (simetrías del diagrama),

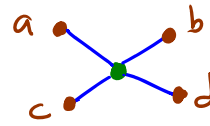
$$S \equiv \left(2 \begin{matrix} \text{por cada par de patas} \\ \text{de 1 mismo vértice} \\ \text{contraídas entre sí (c)} \end{matrix} \right) \times \left(l! \begin{matrix} \text{por cada conjunto} \\ \text{de l líneas} \\ \text{intercambiables} \end{matrix} \right) \times \left(v! \begin{matrix} \text{por cada v} \\ \text{vértices} \\ \text{intercambiables} \end{matrix} \right)$$

En efecto, para el primer diagrama esto da $s = 2 \times 2 \times 2 = 8$ ✓
 $\underbrace{\quad}_c \quad \underbrace{\quad}_l$

y para el segundo, $s = 2$. ✓
 $\underbrace{\quad}_c$

Respecto a las 2 primeras contribuciones a s, el punto es que normalmente las 4 patas de cada vértice estarán conectadas

a puntos distintos, $\hat{\varphi}_{I_a} \hat{\varphi}_{I_b} \hat{\varphi}_{I_c} \hat{\varphi}_{I_d} \hat{\varphi}_{I_y} \hat{\varphi}_{I_y} \hat{\varphi}_{I_y} \hat{\varphi}_{I_y}$, y las $4!$ diferentes



maneras de hacer las contracciones correspondientes

darán el mismo resultado, cancelándose así el factor de $\frac{1}{4!}$ que aparecía en \hat{H}_{int}^I (esta fue precisamente la razón por la que incluimos a $\frac{1}{4!}$ como factor de normalización en Z_{int}).

Pero la cancelación es incompleta cuando los patrones no se conectan todos a puntos distintos, cosa que sucede justo cuando $c \neq 1$ ó $l \neq 1$.

La tercera contribución a s se refiere también a una cancelación incompleta, entre el factor $\frac{1}{n!}$ de la expansión en Taylor del exponencial a $\mathcal{O}(\lambda^n)$ y las maneras en que los n vértices correspondientes se pueden permutar entre sí.

32.5: 26/10/12

Usando este mismo lenguaje diagramático, podemos

calcular el término de $\mathcal{O}(\lambda^2)$ en el numerador de $G_2(x_1, x_2)$:

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) \equiv \langle 0 | T \left\{ \hat{\varphi}_I(x_1) \hat{\varphi}_I(x_2) \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 \hat{\varphi}_I(y_1) \hat{\varphi}_I(y_2) \right\} | 0 \rangle$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{(-i\lambda)^2}{1152}}$

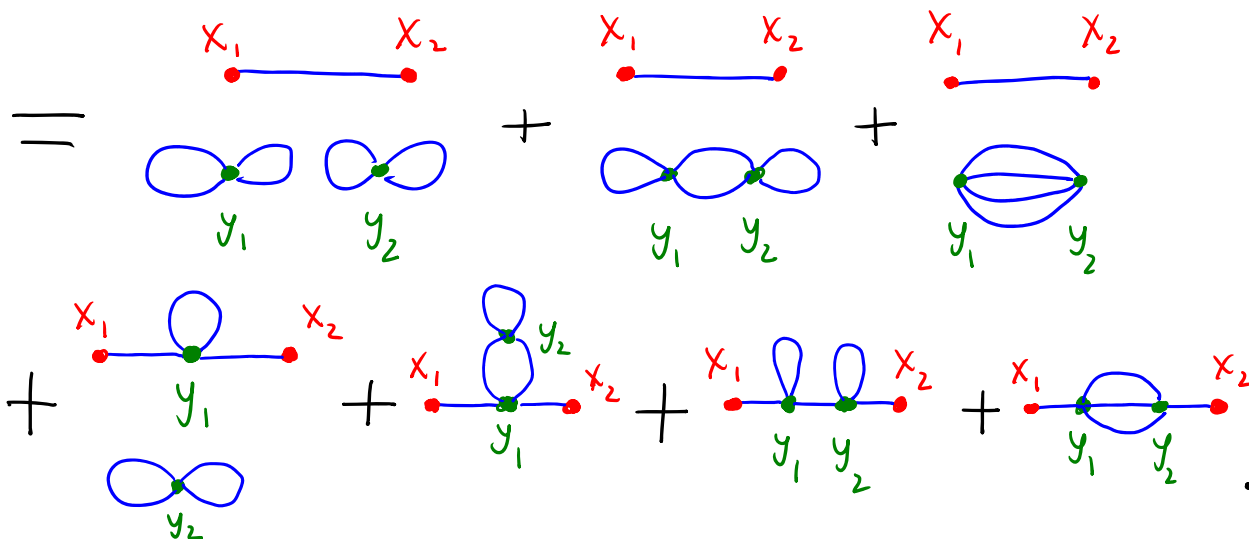
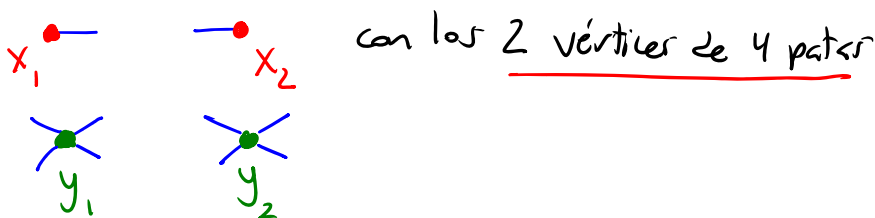
que usando el teorema de Wick se traduce en

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{(-i\lambda)^2}{1152} \int d^4y_1 d^4y_2 \left[\underbrace{\hat{\phi}_{IX_1} \hat{\phi}_{IX_2}}_{\text{maneras restantes de}} \underbrace{\hat{\phi}_{Iy_1} \hat{\phi}_{Iy_1}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\phi}_{Iy_1} \hat{\phi}_{Iy_1}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\phi}_{Iy_2} \hat{\phi}_{Iy_2}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\phi}_{Iy_2} \hat{\phi}_{Iy_2}}_{\text{contrar todos los campos}} \underbrace{\hat{\phi}_{Iy_2} \hat{\phi}_{Iy_2}}_{\text{contrar todos los campos}} \right]$$

945

lo cual es más fácil de expresar gráficamente como

$N_2^{(2)}(x_1, x_2) =$ suma sobre todos los diagramas topológicamente distintos que se obtienen al conectar los 2 puntos externos



los diagramas que se obtendrían intercambiando $y_1 \leftrightarrow y_2$ o rotando/reflejando No son topológicamente distintos. x_1, x_2 están fijas; pero y_1, y_2 son variables móviles.

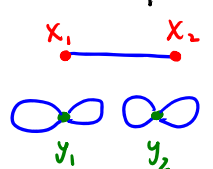
$$\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}$$

De acuerdo con nuestras convenciones, estos diagramas resumen respectivamente las siguientes expresiones analíticas:

$$N_2^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^4} \frac{1}{2!^2} \frac{1}{2!} K_F(x_1 - x_2) (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 K_F(y_1 - y_1)^2 \int d^4y_2 K_F(y_2 - y_2)^2$$

(3x3=9 términos iguales)

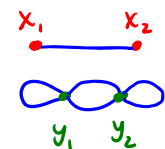
$\frac{1}{128} = \frac{9}{1152}$ ✓



$$+ \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} K_F(x_1 - x_2) (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 K_F(y_1 - y_1) K_F(y_1 - y_2) K_F(y_2 - y_2)$$

(6x6x2=72 términos iguales)

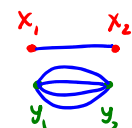
$\frac{1}{16} = \frac{72}{1152}$ ✓



$$+ \frac{1}{4!} \frac{1}{2!} K_F(x_1 - x_2) (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 K_F(y_1 - y_2)^4$$

(4! = 24 términos iguales)

$\frac{1}{48} = \frac{24}{1152}$ ✓

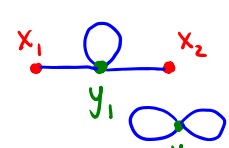


135: 04/11/22

$$+ \frac{1}{2^3} \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 K_F(x_1 - y_1) K_F(y_1 - y_1) K_F(y_1 - x_2) \int d^4y_2 K_F(y_2 - y_2)^2$$

(2x6x2x3=72 términos iguales)

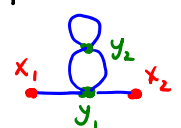
$\frac{1}{16} = \frac{72}{1152}$ ✓



$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 K_F(x_1 - y_1) K_F(y_1 - y_2) K_F(y_2 - y_2) K_F(y_2 - x_2)$$

(2x4x3x4x3 = 288 términos iguales)

$\frac{1}{4} = \frac{288}{1152}$ ✓

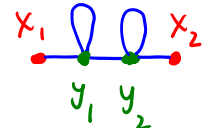


$$\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}$$

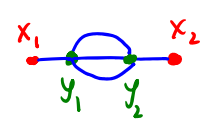
(suma continúa en la spte. página)

$$\hat{\varphi}_{IX_1} \hat{\varphi}_{IX_2} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_1} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2} \hat{\varphi}_{Iy_2}$$

$$+ \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 K_F(x_1-y_1) K_F(y_1-y_1) K_F(y_1-y_2) K_F(y_2-y_2) K_F(y_2-x_2)$$

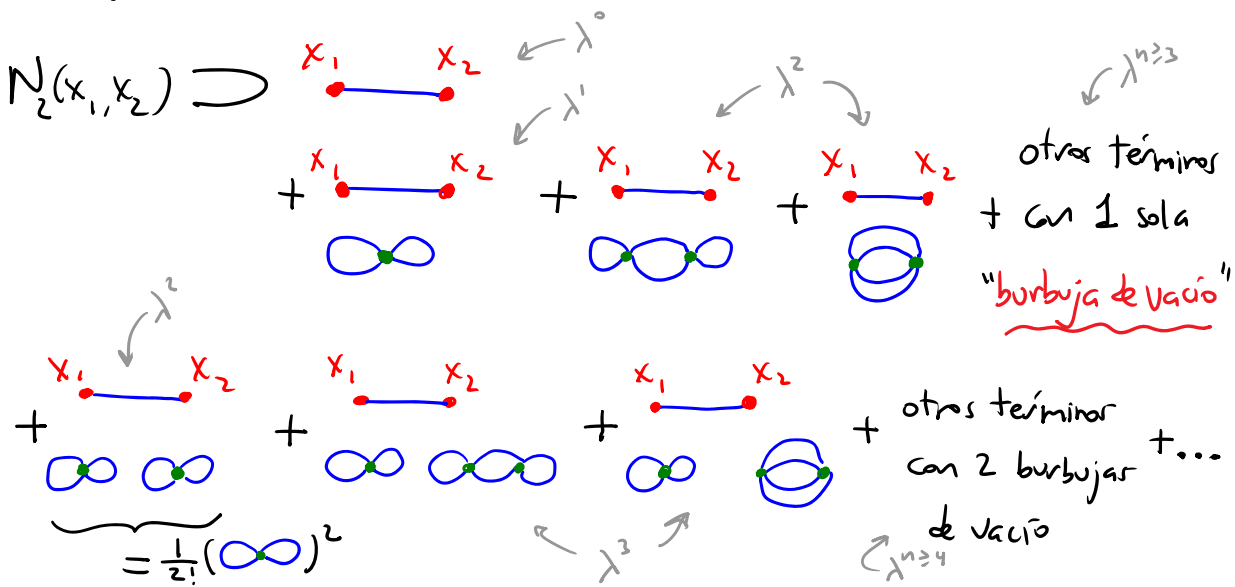
$\frac{1}{4} = \frac{288}{1152}$ ✓  (2x4x3x4x3 = 288 términos iguales)

$$+ \frac{1}{3!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 K_F(x_1-y_1) K_F(y_1-y_2)^3 K_F(y_2-x_2)$$

$\frac{1}{6} = \frac{192}{1152}$ ✓  (2x4x4x3x2 = 192 términos iguales)

Podemos verificar que hemos contabilizado un total de $9 + 72 + 24 + 72 + 288 + 288 + 192 = 945$ términos. ✓

Juntando $N_2^{(0)} + N_2^{(1)} + N_2^{(2)} + \dots$, podemos ver que el numerador incluye en particular varios términos proporcionales a $K_F(x_1, x_2)$:



Toda esta serie de términos proporcionales a $K_F(x_1-x_2)$ aparecen justo con los coeficientes numéricos necesarios para poder reescribirse como

$$\begin{aligned}
 & \overset{x_1}{\bullet} \text{---} \overset{x_2}{\bullet} \left[1 + \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right) \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2!} \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)^2 \\
 & \quad + \frac{1}{3!} \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)^3 \\
 & \quad \left. + \dots \right] \\
 & = \overset{x_1}{\bullet} \text{---} \overset{x_2}{\bullet} \exp \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Los otros términos en el numerador se pueden agrupar de manera similar, factorizando la porción que involucra a los puntos externos y sumando en una exponencial a las burbujas de vacío. P.ej.,

$$\begin{aligned}
 & \lambda^1 \text{ (diagram with loop)} + \lambda^2 \text{ (diagram with two loops)} + \lambda^3 \text{ (diagram with three loops)} + \dots \\
 & + \lambda^3 \text{ (diagram with two loops)} + \lambda^4 \text{ (diagram with two loops)} + \dots \\
 & = \text{diagram with loop} \exp \left(\text{diagram with two loops} + \text{diagram with three loops} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que el numerador de $G_2(x_1, x_2)$ se puede expresar como

$$N_2(x_1, x_2) = \underbrace{\left[\text{diagram with line} + \text{diagram with loop} + \dots \right]}_{\substack{\text{todos los diagramas "conexos"} \equiv \text{sin burbujas} \\ \text{de vacío} \\ \text{o conectados ("connected")}}} \times \exp \left(\text{diagram with two loops} + \text{diagram with three loops} + \dots \right)$$

Para completar el cálculo de $G_2(x_1, x_2)$, falta ahora determinar el denominador

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &\equiv \langle 0 | T \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(y)^4 \right] \right\} | 0 \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^n \int d^4y_1 \dots d^4y_n \underbrace{\langle 0 | T \left\{ \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(y_1)^4 \dots \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(y_n)^4 \right\} | 0 \rangle}_{\text{suma sobre todas las contracciones}} \\
 &\quad \left(\frac{1}{(2n)!} \binom{4n}{2} \binom{4n-2}{2} \dots \binom{2}{2} \text{ términos} \right)
 \end{aligned}$$

Esta expresión evidentemente produce puras burbujas de vacío,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= 1 + \text{bubble} + \text{two-bubble} + \text{three-bubble} + \dots \\
 &\quad + \text{two-bubble} \text{ two-bubble} + \text{two-bubble} \text{ three-bubble} + \dots \\
 &\quad + \dots \\
 &= \exp \left(\text{bubble} + \text{two-bubble} + \text{three-bubble} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

lo cual felizmente cancela la exponencial que obtuvimos en el numerador $N_2(x_1, x_2)$.

A pesar de que las burbujas de vacío se cancelan por completo completo entre el numerador y el denominador de nuestra fórmula perturbativa para calcular funciones de correlación G_n , es interesante notar que podemos encontrarles un significado físico directo: recordando de la p.393 que

$$G_0 = \underbrace{\langle \Omega | \Omega \rangle}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega 2T}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | T \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_I(y)^4 \right] \right\} | 0 \rangle$$

veremos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\equiv \langle 0 | T \left\{ \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}_I(y)^4 \right] \right\} | 0 \rangle \\ &= \exp \left(\text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \dots \right) \\ &= |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2T} \end{aligned}$$

Es decir, las "burbujas de vacío" justamente contienen información respecto a la manera en que el vacío interactuante $|\Omega\rangle$ difiere del vacío libre. Mientras que $|0\rangle$, por definición, no contiene ninguna de las "partículas" creadas por \hat{a}_p^\dagger , que son precisamente los objetos cuyos propagadores $K_F(x-x')$ denotamos con líneas en los diagramas, el verdadero

vacío $|\Omega\rangle$ puede visualizarse como una sopa burbujeante en la que estas "partículas" aparecen y desaparecen constantemente.
 L31: 2/04/17


De la ecuación anterior vemos en particular que la energía del vacío interactuante está dada por


$$E_{\Omega} = -\frac{1}{2T} \text{Im} \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right).$$

Representemos ahora al cálculo del propagador de la teoría interactuante, $G_2(x_1, x_2)$. En vista de la cancelación de las burbujas de vacío, nuestro resultado final es

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{N_2(x_1, x_2)}{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) \end{array} + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) \end{array} + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) \end{array} \\ + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) \end{array} + \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \sigma(\lambda^2) \end{array} + \dots \end{array}$$

Esto se presta también para una interpretación intuitiva: digamos desde un principio que el correlador de 2 puntos $G_2(x_1, x_2)$ codificaría algo así como la amplitud de probabilidad de empezar

con 1 partícula (o antipartícula) en x_2 y termina con con 1 partícula (o antipartícula) en x_1 , y podemos ver que en nuestro desarrollo perturbativo esto se calcula incluyendo todos los posibles procesos donde, además de la propagación libre, tomamos en cuenta que, por efecto de \hat{H}_{int}^I , las "partículas" pueden aparecer y desaparecer, siempre en grupos de 4. Es decir, el vértice de 4 patas  codifica de manera covariante todos los posibles procesos: $0 \rightarrow 4$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 0$.

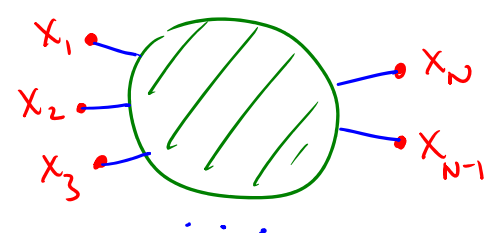


De manera similar, al calcular el correlador de N puntos

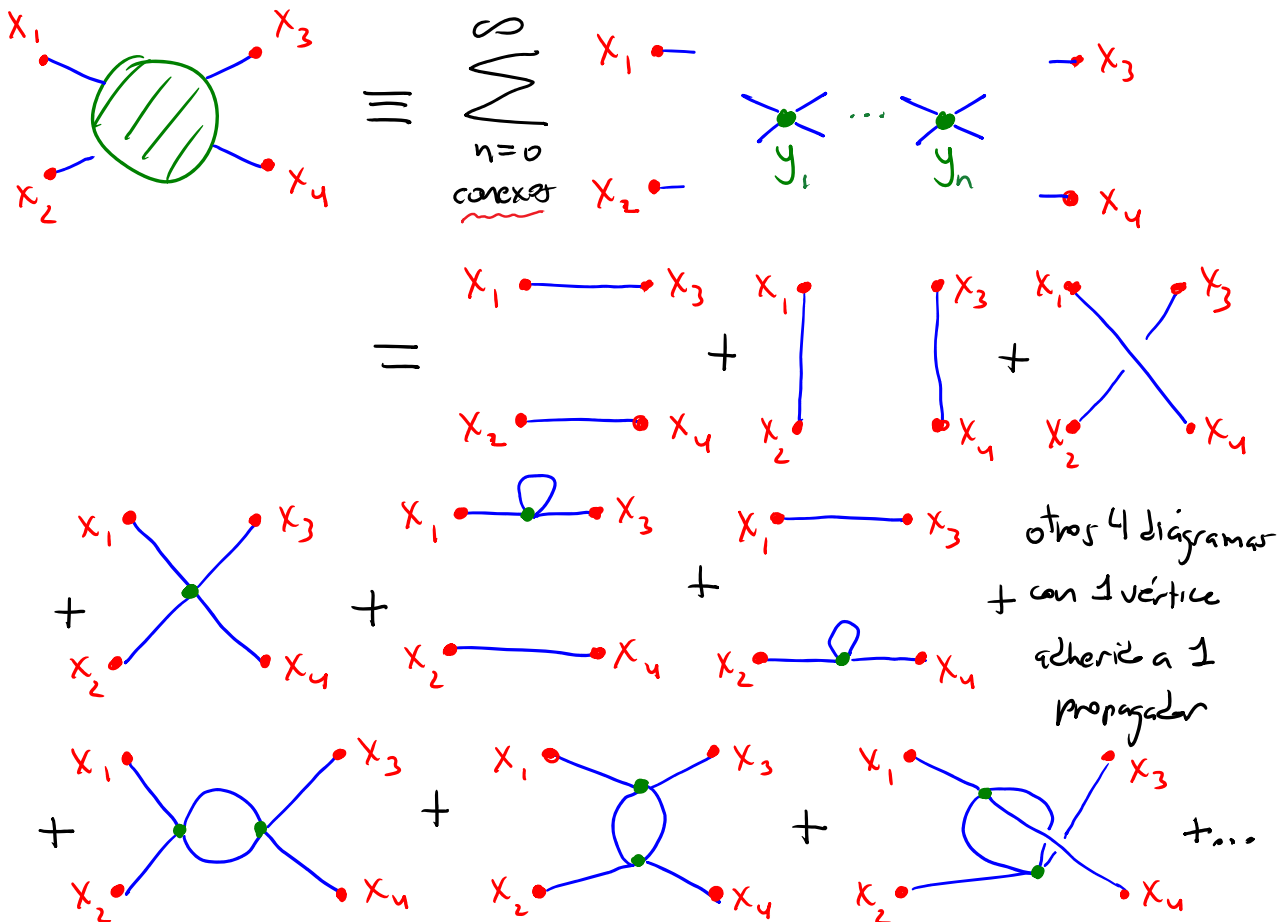
$$\begin{aligned}
 G_N(x_1, \dots, x_N) &\equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle} \\
 &\equiv \frac{N_N(x_1, \dots, x_N)}{D} ,
 \end{aligned}$$

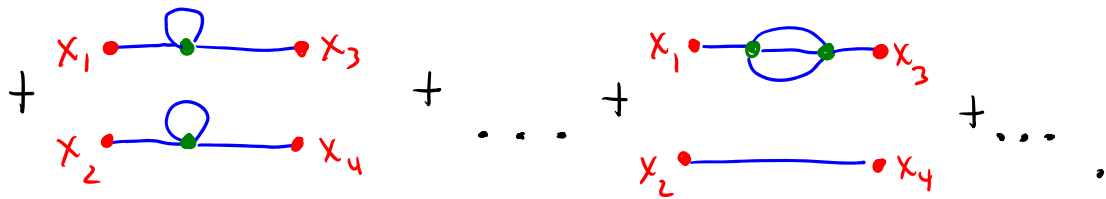
con el mismo razonamiento claramente obtendremos

$G_N(x_1, \dots, x_N) =$ Suma sobre todos los diagramas conexos
 (es decir, sin burbujas de vacío) topológicamente
 distintos con N puntas externas x_1, \dots, x_N

\equiv


Pej., la función de 4 puntos $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ está dada por





Vale la pena resaltar que, si bien en esta suma todos los diagramas son conexos (no tienen burbujas de vacío), NO todos son "completamente conexos", es decir, no necesariamente sucede que todos los puntos externos acaban estando conectados entre sí.

Estos dibujos que hemos aprendido a hacer aquí, y que nos permiten resumir la expansión perturbativa, se conocen como diagramas de Feynman.

Como hemos visto, su utilidad es doble: son una excelente herramienta de visualización y

de cálculo - la receta que nos permite asignar una expresión analítica a cada diagrama se llama las reglas de Feynman.

[33.5: 29/10/18

Hasta ahora hemos hablado de estas reglas en espacio de posiciones. Resumiendo lo que hemos aprendido, y omitiendo desde ahora en adelante los colores que habíamos usado para



distinguir entre puntos externos e internos, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría φ^4 en espacio de posición son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con N puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas. ← topológicamente distintos

1) Por cada propagador, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x' \end{array} \equiv K_F(x-x')$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).

2) Por cada vértice, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ | \\ y \end{array} \equiv -i\lambda \int d^4y$$

(amplitud de probabilidad de que 1 partícula se convierta en 3, ó 2 en 2, ó 3 en 1, ó 0 en 4, ó 4 en 0).

3) Por cada punto externo, asignar un factor de

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \equiv 1$$


(~ amplitud de probabilidad de que la partícula que está en x esté en x).

4) Multiplicar los factores asociados a todas las partes.

5) Dividir entre el factor de simetría

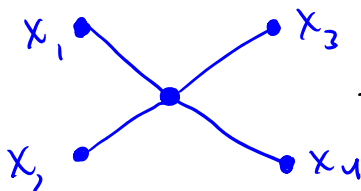
$$S \equiv \left(2 \begin{array}{l} \text{por cada par de patas} \\ \text{de 1 mismo vértice} \\ \text{contraídas entre sí (c)} \end{array} \right) \times \left(l! \begin{array}{l} \text{por cada conjunto} \\ \text{de } l \text{ líneas} \\ \text{intercambiables} \end{array} \right) \times \left(v! \begin{array}{l} \text{por cada } v \\ \text{vértices} \\ \text{intercambiables} \end{array} \right)$$

Frecuentemente es más fácil trabajar en espacio de momentos (sobre todo más adelante, cuando aprendamos a calcular amplitudes de dispersión). Usando

$$K_F(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x'-x)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (= K_F(x-x'))$$


$$\equiv \tilde{K}_F(p) \equiv \overrightarrow{p} = \overleftarrow{-p}$$

podemos reescribir la expresión analítica para cualquier diagrama en términos de variables de momento. P.ej.



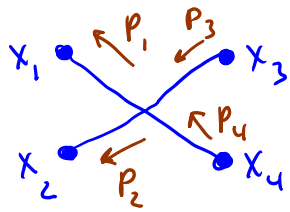
$$= -i\lambda \int d^4 y K_F(x_1-y) K_F(x_2-y) K_F(y-x_3) K_F(y-x_4)$$

$$= -i\lambda \int d^4 y \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip_1 \cdot (x_1-y)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_2 \cdot (x_2-y)}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_3 \cdot (y-x_3)}}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i e^{-ip_4 \cdot (y-x_4)}}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d^4 y e^{iy \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)} \frac{i e^{-ip_1 \cdot x_1}}{p_1^2 - m^2} \frac{i e^{-ip_2 \cdot x_2}}{p_2^2 - m^2} \frac{i e^{ip_3 \cdot x_3}}{p_3^2 - m^2} \frac{i e^{ip_4 \cdot x_4}}{p_4^2 - m^2}$$

+iε

expresión que podemos resumir diagramáticamente como



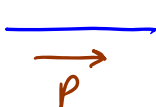
$$= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \left[\left(\frac{4}{i\pi} \frac{i}{p_I^2 - m^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} e^{+ip_3 \cdot x_3} e^{+ip_4 \cdot x_4} \right]$$

propagadores \tilde{K}_F
 ya no hay $\int d^4 y$
 ni $\int d^4 p_4$
 exponentes asociados a puntos externos
 $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$

Más en general, las reglas de Feynman para calcular funciones de correlación en la teoría ϕ^4 en espacio de momentos son:

0) Dibujar todos los diagramas conexos con N puntos externos, usando propagadores libres y vértices de 4 patas


1) Por cada propagador, asignar un factor de



$$\equiv \tilde{K}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

(amplitud de probabilidad de propagación libre).

2) Por cada vértice, asignar un factor de



$$\equiv -i\lambda$$

, imponiendo a mano la conservación del cuadrimomento que fluye a través del vértice

(amplitud de probabilidad de que ocurra un proceso con $0 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, \text{ ó } 4 \rightarrow 0$ partículas).