

satisface la ec. diferencial

$$\begin{aligned}
 i\partial_t \hat{U}_I(t, t') &= i\partial_t \left[e^{i\hat{H}_0^s t} \right] e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} + i e^{i\hat{H}_0^s t} \partial_t \left[e^{-i\hat{H}(t-t')} \right] e^{-i\hat{H}_0^s t'} \\
 &= e^{i\hat{H}_0^s t} \underbrace{(-\hat{H}_0^s + \hat{H})}_{\hat{H}_{int}^s} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} \\
 &= e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_{int}^s e^{-i\hat{H}_0^s t} e^{i\hat{H}_0^s t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^s t'} \\
 &= \hat{H}_{int}^I(t) \hat{U}_I(t, t') ,
 \end{aligned}$$

así que la ec. de Schrödinger en el cuadro de interacción es $i\partial_t |\psi(t)\rangle_I = \hat{H}_{int}^I(t) |\psi(t)\rangle_I$.

Lo importante aquí es que

$$\hat{H}_{int}^I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^s t} \left(\frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}(\vec{x})^4 \right) e^{-i\hat{H}_0^s t} = \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}_I(x)^4$$

depende solo del operador de campo en el cuadro de interacción,

así que podemos obtener \hat{U}_I puramente en términos de $\hat{\phi}_I(x)$ resolviendo la ec. diferencial

$$i \partial_t \hat{U}_I(t, t') = \hat{H}_{int}^I(t) \hat{U}_I(t, t'),$$

con condición inicial

$$\hat{U}_I(t', t') = \hat{\mathbb{1}}.$$

$$\Rightarrow \hat{U}_I(t'+\Delta t, t') \approx (\hat{\mathbb{1}} - i \hat{H}_{int}^I(t') \Delta t) \hat{\mathbb{1}},$$

$$\hat{U}_I(t'+2\Delta t, t'+\Delta t) \approx [\hat{\mathbb{1}} - i \hat{H}_{int}^I(t'+\Delta t) \Delta t] \hat{U}_I(t'+\Delta t, t'),$$

etc.

La solución parecería ser

$$\hat{U}_I(t, t') \sim \exp\left[-i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau)\right]$$

$$\equiv \hat{\mathbb{1}} - i \int_{t'}^t dt_1 \hat{H}_{int}^I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) + \dots,$$

excepto que al actuar con ∂_t sobre el tercer término y los que siguen, el factor de $\hat{H}_{int}^I(t)$ no siempre queda hasta la izquierda, que es donde lo necesitamos.

Pero podemos arreglar esto imponiendo el orden temporal,

$$\hat{U}_I(t, t') = T \left\{ \exp\left[-i \int_{t'}^t d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau)\right] \right\},$$

es decir,

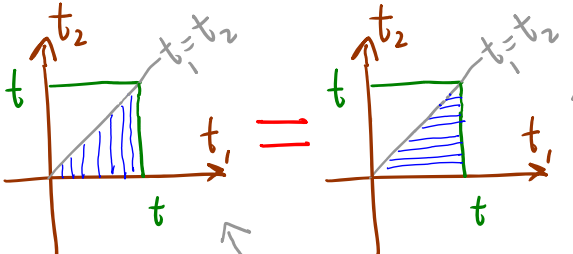
$$\hat{U}_I(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \underbrace{\int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T \{ \hat{H}_{int}^I(t_1) \dots \hat{H}_{int}^I(t_n) \}}_{n! \text{ distintos posibles \u00f3rdenes de } t_1, \dots, t_n \text{ dan el mismo resultado}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \int_{t'}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) \dots \hat{H}_{int}^I(t_n).$$

132: 28/10/22

(P.ej., para el t\u00e9rmino con $n=2$, estamos diciendo que

$$\frac{1}{2!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T \{ \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2) + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_2) \hat{H}_{int}^I(t_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{renombrar} \\ t_1 \leftrightarrow t_2 \end{array} \right\}$$


$$\int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2)$$

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2)$$

$$= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}^I(t_1) \hat{H}_{int}^I(t_2).$$

Recordando que $\hat{H}_{\text{int}}^{\text{I}}(t)$ es proporcional a λ , vemos que esta expresión para $\hat{U}_{\text{I}}(t, t')$ en términos de $\hat{\psi}_{\text{I}}(x)$ justamente tiene la forma de una serie de potencias en λ , es decir, es la expansión perturbativa que esperaríamos resulte de utilidad si el acoplamiento es débil ($\lambda \ll 1$).

Por otro lado, será inservible si la teoría es fuertemente acoplada ($\lambda \gtrsim 1$); pero esto no es muy sorprendente, ya que en ese caso el sistema no tiene por qué parecerse al caso libre ($\lambda=0$).

Más adelante entenderemos que, en realidad, aún cuando $\lambda \ll 1$ la serie perturbativa No converge; pero a pesar de ello es útil como una 'serie asintótica' que nos permite obtener respuestas aproximadas, con una precisión máxima del orden $\sim \exp(-1/\lambda) \ll 1$. En lo que resta del curso nos enfocaremos por ello en explorar las implicaciones de esta serie perturbativa, aun sabiendo desde ahora que no captura toda la física del problema — es decir, que existen efectos "no perturbativos".
← ejemplificamos al final del capítulo 2

Para ser más explícitos respecto a la aplicación de la solución perturbativa que hemos encontrado, pensemos ahora en la forma en que podríamos describir a los estados de nuestro sistema. Usando a \hat{a}_p y \hat{a}_p^\dagger que obtuvimos de $\hat{\phi}(x)$, podemos por supuesto construir un espacio de Fock de la manera habitual: definiremos $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_p|0\rangle=0 \quad \forall \vec{p}$, y después $|p\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$,
 $|p, p'\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'}^\dagger |0\rangle$,

etc., que PARECEN los estados multipartículas usuales.

En el primer capítulo del curso entendimos que, incluso cuando hablamos de partículas interactuantes, cabe suponer que existe una base para el espacio de Hilbert que tiene justo esta estructura de estados de partículas libres, en términos de los llamados estados asintóticos

$$|p_1, \dots, p_N; \pm\rangle \equiv \sqrt{2E_1} \dots \sqrt{2E_N} \hat{a}_{p_1}^{(\pm)\dagger} \dots \hat{a}_{p_N}^{(\pm)\dagger} |\underbrace{\Omega}_{\text{vacío de } \hat{H}}\rangle$$

(esta es la hipótesis de 'completitud asintótica' que discutimos en las pp. 105-111).

Para seguir adelante con nuestro estudio de la expansión perturbativa, supondremos aquí (al igual que todos los libros de texto) que los estados "multipartículas" $|p_1, p_2, \dots, p_N\rangle$ construidos con los operadores $\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger$ que provienen de $\hat{\phi}_I(x)$ nos dan también una base para el MISMO espacio de Hilbert.

Esta suposición de hecho va en contra del teorema de Haag (-Hall-Wightman), que básicamente muestra que si 2 operadores de campo están relacionados por una transformación unitaria, tal como $\hat{\phi}_H(x) = \hat{U}_I(t, 0)^{-1} \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(t, 0)$, y uno de ellos es libre, como lo es $\hat{\phi}_I$, entonces el otro también es libre. Es decir, el cuadro de interacción No puede existir !! El problema proviene de tener un número infinito de grados de libertad, y en particular, un volumen espacial infinito [ver Duncan, 10.5]. Como veremos el próximo semestre, para definir correctamente nuestra teoría hará falta domesticar a los infinitos. La deducción de la expansión perturbativa, a pesar de ser heurística, nos conducirá a una receta extremadamente útil para hacer cuentas muy precisas, que están en perfecto

acuerda con las mediciones experimentales.

Es importante tener claro que los estados $|p_1, \dots, p_N\rangle$ No coinciden uno a uno con los correspondientes estados entrantes $|p_1, \dots, p_N; +\rangle$ o salientes $|p_1, \dots, p_N; -\rangle$ (que a su vez sabemos que no coinciden directamente entre sí): mientras que

estos últimos son por definición eigenestados del Hamiltoniano completo \hat{H} , los estados $|p_1, \dots, p_N\rangle$ son eigenestados sólo del Hamiltoniano libre $\hat{H}_0^{\text{I}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$:
 $\hat{H}_0^{\text{I}} |0\rangle = 0$, $\hat{H}_0^{\text{I}} |p\rangle = E_p |p\rangle$, $\hat{H}_0^{\text{I}} |p, p'\rangle = (E_p + E_{p'}) |p, p'\rangle$, etc.

Notemos que la energía de estos estados es independiente del valor de λ , lo cual evidentemente No debe ser cierto para los estados asintóticos $|p_1, \dots, p_N; \pm\rangle$, que por construcción en verdad describen directamente partículas físicas.

Si $\lambda \neq 0$, vemos entonces que el espacio de Hilbert del sistema tiene no 1 sino 3 bases distintas 'tipo partículas libres'.

En particular, $|0\rangle$ No es el verdadero vacío de la teoría interactuante, es decir, el eigenestado de \hat{H} con más bajo eigenvalor, al cual denotaremos $|\Omega\rangle$.
 ¿Cuál es entonces la relación entre $|0\rangle$ y $|\Omega\rangle$?

Si $\{|\epsilon\rangle\}$ es un conjunto completo de eigenestados de \hat{H} (p.ej., los estados entrantes, o los estados salientes), entonces usando la correspondiente relación de completitud

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon\rangle\langle\epsilon| = \hat{1} \quad \text{podemos expresar}$$

$$|0\rangle = \sum_{\epsilon} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle = |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{\epsilon \neq \Omega} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle,$$

que en el caso de Schrödinger evolucionar de acuerdo con

$$e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_{\Omega}T} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{\epsilon \neq \Omega} e^{-iE_{\epsilon}T} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle.$$

Por definición, tenemos $E_{\Omega} < E_{\epsilon} \forall \epsilon \neq \Omega$, así que podemos extraer únicamente el término con $|\Omega\rangle$ del

lado derecho tomando el límite $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-i\hat{H}T} |0\rangle = e^{-iE_{\Omega}\infty(1-i\epsilon)} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{\epsilon \neq \Omega} e^{-iE_{\epsilon}\infty(1-i\epsilon)} |\epsilon\rangle\langle\epsilon|0\rangle,$$

$\uparrow \epsilon > 0$
 \nearrow 0

de donde

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_{\Omega}T} \langle\Omega|0\rangle} e^{-i\hat{H}T} |0\rangle$$

\uparrow
 desconocido

$$= \underbrace{e^{i\hat{H}_0^I \cdot 0} e^{-i\hat{H}(0-(-T))} e^{-i\hat{H}_0^I(-T)}}_{\hat{U}_I(0, -T)} |0\rangle.$$

$\downarrow = \hat{H}_0^I$
 p. 379

[3]: 22/10/18

De igual manera, a partir de

$$\langle 0 | e^{-i\hat{H}T} = \langle 0 | \Omega \rangle \langle \Omega | e^{-iE_\Omega T} + \sum_{\epsilon \neq \Omega} \langle 0 | \epsilon \rangle \langle \epsilon | e^{-iE_\epsilon T}$$

podemos deducir que

$$\langle \Omega | = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-iE_\Omega T} \langle 0 | \Omega \rangle} \underbrace{\langle 0 | e^{-i\hat{H}T}}_{\langle 0 | e^{i\hat{H}_0 T} e^{-i\hat{H}(T-0)} e^{-i\hat{H}_0 \cdot 0}} \underbrace{\langle 0 | e^{i\hat{H}_0 T} e^{-i\hat{H}(T-0)} e^{-i\hat{H}_0 \cdot 0}}_{\hat{U}_I(T,0)}$$

Esto representa un avance más en nuestro intento por traducir todos los objetos de interés de la teoría interactuante a objetos relacionados con $\hat{\phi}_I(x)$. Por otro lado, claramente no podemos con un procedimiento similar determinar a los otros eigenestados de \hat{H} , cosa que parece desafortunada.

Pero, llegados a este punto, vale la pena pensar exactamente qué cantidades son las que queremos calcular en la teoría interactuante. En el caso del campo libre, el

objeto fundamental que calculamos fue el propagador de Feynman $\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_H(x) \hat{\phi}_H(x') \} | 0 \rangle$, que, por el hecho de que $\hat{\phi}_H(x)$ creaba 1 partícula en x , representaba la amplitud de que una partícula se propague de x' a x (o una antipartícula de x a x'). En presencia de interacciones, los objetos básicos que necesitaremos serán las funciones de correlación, o funciones de Green, o correladores de N puntos:

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}_H(x_1) \dots \hat{\phi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle,$$

↑ con $\hat{\phi}_H^\dagger$ si el campo es complejo

que, con base en la intuición del caso libre, esperaríamos que tengan que ver con procesos donde $n \leq N$ partículas parten de n de los puntos x_1, \dots, x_N , y $N-n$ partículas llegan a los puntos restantes. Pero esta interpretación se complica por varias razones, principalmente porque en el caso interactuante las partículas solo se podrán definir con claridad como estados asintóticos (p.107), así que el efecto de $\hat{\phi}_H(x)$ no será precisamente crear 1 partícula en x .

Más adelante veremos exactamente cuál es la relación entre los correladores $G_N(x_1, \dots, x_N)$ y las amplitudes de dispersión

$$\langle p'_1 \dots p'_{N-n} ; - | p_1, \dots, p_n ; + \rangle \equiv S_{K'K}$$

que, por su relevancia experimental, son las principales cantidades físicas que nos interesa calcular.

Por ahora, el punto importante es que las funciones de correlación resultan contener toda la información física de una teoría de campos, de modo que, desde el punto de vista de la física teórica, "resolver la teoría" equivale a calcular $G_N(x_1, \dots, x_N) \forall N, x_1, \dots, x_N$.

Y la buena noticia es que, con los resultados que hemos obtenido en el cuadro de interacción, podemos ya deducir una receta concreta para calcular estos correladores en una expansión perturbativa.

Para determinar $G_N(x_1, \dots, x_N)$, suponjamos primero que $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_N^0$. Abreviando $\hat{\varphi}_{H_n} \equiv \hat{\varphi}_H(x_n)$, tenemos entonces

$$G_N(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_{H_1} \dots \hat{\varphi}_{H_N} \} | \Omega \rangle$$

$$= \langle \Omega | \hat{\varphi}_{H_1} \dots \hat{\varphi}_{H_N} | \Omega \rangle,$$

que, usando nuestros resultados de las pp. 380 y 388-389, podemos reescribir en la forma

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega T} \langle \Omega | 0 \rangle} \langle 0 | \hat{U}_I(T, 0)$$

$$\cdot \left[\hat{U}_I(0, t_1) \hat{\varphi}_{I_1} \hat{U}_I(t_1, 0) \right] \dots \left[\hat{U}_I(0, t_N) \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(t_N, 0) \right]$$

$$\cdot \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega T} \langle 0 | \Omega \rangle} \hat{U}_I(0, -T) | 0 \rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega 2T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2}$$

$$\cdot \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_1) \hat{\varphi}_{I_1} \hat{U}_I(t_1, t_2) \hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(t_N, -T) | 0 \rangle$$

$$= T \{ \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(T, -T) \}$$

ya que todo estaba de antemano en orden temporal.

Si hubiéramos supuesto inicialmente cualquier otro orden de los eventos, claramente tendríamos el mismo resultado, con los nombres de los puntos intercambiados.

Pero, en el último renglón, la forma del resultado ya no depende de este orden, porque el verdadero orden está determinado por T , así que hemos mostrado que

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega 2T}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} \hat{U}_I(T, -T) \} | 0 \rangle.$$

Observando que en el caso particular $N=0$ esto es

$$G_0 \equiv \underbrace{\langle \Omega | \Omega \rangle}_{=1} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega 2T}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | \hat{U}_I(T, -T) | 0 \rangle,$$

es decir, $\langle 0 | \hat{U}_I(T, -T) | 0 \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-iE_\Omega 2T}$,

podemos dividir G_N/G_0 para concluir finalmente que

$$\langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}_H(x_1) \dots \hat{\varphi}_H(x_N) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T \hat{H}_{int}^I(t)] \} | 0 \rangle}$$

Para obtener este resultado no hemos hecho todavía ninguna aproximación (más allá de utilizar el cuadro de interacción).

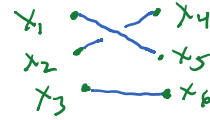
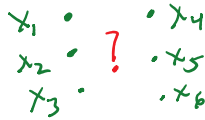
Pero la expresión del lado derecho sugiere cómo hacer un desarrollo perturbativo: dado que $\hat{H}_{\text{int}}^I \propto \lambda$, la expansión en Taylor de los exponentiales nos dará una serie de potencias en λ , que podremos truncar a un cierto orden dependiendo del grado de precisión que deseemos.

La fórmula de la página anterior tiene del lado derecho una expresión que solamente involucra a $\hat{\varphi}_I(x)$ y a $|0\rangle$, así que con ella hemos logrado reducir el problema de determinar las funciones de correlación $G_N(x_1, \dots, x_N)$ de la teoría interactuante al ejercicio, mucho más sencillo, de calcular los objetos análogos en la teoría libre,

← LIBRE: orden λ^0 en la serie de Taylor

$$G_{N'}^{(0)}(x_1, \dots, x_{N'}) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_I(x_1) \dots \hat{\varphi}_I(x_{N'}) \} | 0 \rangle \quad \forall N'.$$

Pero hay una buena razón por la cual hasta ahora no nos habíamos tomado la molestia de hablar de estas funciones de correlación en la teoría libre: las partículas en ese caso



no pueden hacer otra cosa más que propagarse, y como reflejo de ello, todas las $G_N^{(0)}(x_1, \dots, x_N)$ pueden determinarse directamente a partir de la función de correlación de 2 puntos $G_2^{(0)}(x_1, x_2)$, que como sabemos es justamente el propagador de Feynman libre (p.198),

$$G_2^{(0)}(x_1, x_2) \equiv \langle 0 | T \left\{ \hat{\varphi}_I(x_1) \hat{\varphi}_I(x_2) \right\} | 0 \rangle = \underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}}_{\equiv K_F(x_1 - x_2)}$$

131.5 = 24/10/18 (-55 min por consejos)

Para entender la relación entre $G_{N>2}^{(0)}$ y $G_2^{(0)} = K_F$, conviene separar las porciones de frecuencia positiva y negativa del operador de campo en el cuadro de interacción,

$$\hat{\varphi}_I(x) = \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p}_{\equiv \hat{\varphi}_I^+(x) \text{ no confundir con } \dagger} + \underbrace{\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger}_{\equiv \hat{\varphi}_I^-(x) (= \hat{\varphi}_I^+(x)^\dagger)}$$

porque sabemos que $\hat{\varphi}_I^+(x)|0\rangle = 0$ y $\langle 0|\hat{\varphi}_I^-(x) = 0 \quad \forall x$.

$$K_F(x_1-x_2)$$

Cuando calculamos $G_2^{(0)}(x_1-x_2) = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \hat{\phi}_I(x_2) \} | 0 \rangle$ en la p. 146, la observación clave fue que al desarrollar $T \{ \hat{\phi}_I(x_1) \hat{\phi}_I(x_2) \}$ obtendremos 4 términos $(\hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^+, \hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^-, \hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^+, \hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^-)$, y 3 de ellos están automáticamente en orden normal (\hat{a}^+ 's a la izquierda de las \hat{a} 's, o lo que es lo mismo, los $\hat{\phi}_I^-$'s a la izquierda de los $\hat{\phi}_I^+$'s), así que se anulan al tomar su valor esperado en el vacío libre $|0\rangle$.

Usando esto, podemos escribir

$$T \{ \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} \} = \theta(x_1^0 - x_2^0) \left(\underbrace{\hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^- + \hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^+}_{\text{en orden normal}} + \hat{\phi}_{I1}^- \hat{\phi}_{I2}^+ + \hat{\phi}_{I1}^+ \hat{\phi}_{I2}^- \right)$$

\hat{a} \hat{a}^+

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) (1 \leftrightarrow 2)$$

$$=: \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2} : (\theta(x_1^0 - x_2^0) + \theta(x_2^0 - x_1^0)) + \theta(x_1^0 - x_2^0) [\hat{\phi}_{I1}^+, \hat{\phi}_{I2}^-] + \theta(x_2^0 - x_1^0) [\hat{\phi}_{I2}^+, \hat{\phi}_{I1}^-]$$

↑
se anulará si tomamos valor esperado en $|0\rangle$

$\equiv \hat{\phi}_{I1} \hat{\phi}_{I2}$ "Contracción"
 $= K_F(x_1-x_2)$ propagador
 da resultado si tomamos $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$

Hemos mostrado entonces que

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}\} = \underbrace{:\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}:} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}} : .$$

podemos meter la contracción al orden normal, porque es solo un número

La generalización de esta conexión entre el orden temporal y el orden normal al caso de un producto de N operadores de campo se conoce como el teorema de Wick,

$$\begin{aligned} T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} &= :\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}: \quad \leftarrow \text{término sin contracciones} \\ &+ :\underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N}} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N}} + \dots : \\ &\quad \leftarrow \binom{N}{2} \text{ términos con 1 contracción} \\ &+ :\underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4} \hat{\varphi}_{I_5} \dots \hat{\varphi}_{I_N}} + \dots : \\ &\quad \leftarrow \frac{1}{2} \binom{N}{2} \binom{N-2}{2} \text{ términos con 2 contracciones} \\ &+ \dots \\ &\quad \leftarrow \text{términos con 3 ó más contracciones} \end{aligned}$$

Esto nos sirve porque G_N involucra el orden temporal, pero con el orden normal es más fácil calcular el valor esperado en $|0\rangle$.

L34: 31/10/22

(El teorema se puede expresar más compactamente en la forma

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} = \exp\left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}_I(x)} K_F(x-y) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}_I(y)}\right] : \hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N} :,$$

donde, por definición, al desarrollar el exponencial en Taylor reproduciremos todas las posibles contracciones.)

Para demostrar el teorema de Wick, procedemos por inducción: hemos visto ya que funciona para $N=2$, y suponiendo que es correcto para $N-1$ operadores de campo, tenemos

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} = \hat{\varphi}_{I_1} T\{\hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N}\} \quad \leftarrow \text{suponiendo, sin perder generalidad, que } x_1^0 > x_2^0, x_3^0, \dots, x_N^0$$

$$\stackrel{\text{Wick}(N-1)}{=} \hat{\varphi}_{I_1} : \hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N} : + \hat{\varphi}_{I_1} \left(: \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \dots \hat{\varphi}_{I_N} : + \dots \right)$$

↑ todas las contracciones

El primer término aquí es

$$(\hat{\varphi}_{I_1}^- + \hat{\varphi}_{I_1}^+) : \hat{\varphi}_{I_2} \dots \hat{\varphi}_{I_N} : = : \hat{\varphi}_{I_1}^- \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- : + \underbrace{[\hat{\varphi}_{I_1}^+, : \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- :] + [\hat{\varphi}_{I_1}^+, : \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^+ :] + \dots + [\hat{\varphi}_{I_1}^+, : \hat{\varphi}_{I_2}^+ \dots \hat{\varphi}_{I_N}^+ :]}_{2^{N-1} \text{ términos}}$$

↑ \hat{a}^+ ↑ \hat{a}

El primero de los 2^{N-1} conmutadores es 2^{N-1} términos

$$\hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \equiv \theta(x_1^0 - x_2^0) [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_2}^-] + \theta(x_2^0 - x_1^0) [\hat{\varphi}_{I_2}^+, \hat{\varphi}_{I_1}^-]$$

$$[\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-] = [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_2}^-] \hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_2}^- [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-]$$

interpretar como $\hat{\varphi}_{I_2}^- (\hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-)$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \quad (\text{ya que habremos supuesto desde un pplo. que } x_1^0 > x_2^0)$$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_2}^- [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_3}^-] \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- [\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-]$$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^- \quad (\text{porque } x_1^0 > x_3^0)$$

=

∴ continuando hasta pasar $\hat{\varphi}_{I_1}^+$ por enfrente de $\hat{\varphi}_{I_2}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-$

$$= \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \hat{\varphi}_{I_4}^- \dots \hat{\varphi}_{I_N}^-$$

+ otros $N-4$ términos con 1 $\hat{\varphi}_{I_n}^-$ reemplazado por $\hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_n}^-$.

Lo mismo sucede con los otros $2^{N-1} - 1$ conmutadores,

salvo que $[\hat{\varphi}_{I_1}^+, \hat{\varphi}_{I_n}^+] = 0$, así es que la contracción $\hat{\varphi}_{I_1}^+ \hat{\varphi}_{I_n}^-$

solo aparece al pasar a $\hat{\varphi}_{I_1}^+$ por enfrente de $\hat{\varphi}_{I_n}^-$

(no de $\hat{\varphi}_{I_n}^+$):

$$\hat{\varphi}_{I_1} : \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_N} : = : \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_N} :$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{...}}$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^- \hat{\varphi}_{I_2}^+}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N} \hat{\varphi}_{I_2}^+}_{\text{...}}$$

+ términos en solo $\hat{\varphi}_{I_3}^+$, o solo $\hat{\varphi}_{I_4}^+ \cdots$ o solo $\hat{\varphi}_{I_N}^+$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_4}^- \hat{\varphi}_{I_5}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_N}^- \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^+}_{\text{...}}$$

+ términos en solo $\hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_4}^+$ u otras parejas de $\hat{\varphi}_{I_n}^+$

+ términos con 3, 4, ... o N-3 $\hat{\varphi}_{I_n}^+$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_N}^+}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_N} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^+}_{\text{...}}$$

$$= : \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^- + \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^- + \cdots + \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^- \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N} :$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}^-}_{\text{...}} + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^- \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^- \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{...}}$$

$$+ \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^+ \hat{\varphi}_{I_N}^+}_{\text{...}} + \cdots + \cdots + \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2}^+ \hat{\varphi}_{I_3}^+ \cdots \hat{\varphi}_{I_{N-1}}^+ \hat{\varphi}_{I_N}}_{\text{...}}$$

Después de calcular estos conmutadores podemos reconstituir

los campos $\hat{\varphi}_{I_n}$ con $n \geq 2$, y vemos entonces que

$$\hat{\varphi}_{I_1} : \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} : = : \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} : + \underbrace{: \hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} :}_{\text{otros términos con 1}} + \text{contracción que involucra a } \hat{\varphi}_{I_1} .$$

Faltaría ahora ver qué sucede cuando incorporamos a $\hat{\varphi}_{I_1}$ en alguno de los términos que ya tienen $k \geq 1$ contracciones. Pero las contracciones son números, así que por el mismo argumento,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{I_1} : \underbrace{\hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}}_{k \text{ contracciones}} : &= : \hat{\varphi}_{I_1} \underbrace{\hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}}_{k \text{ contracciones que no involucran a } \hat{\varphi}_{I_1}} : \\ &+ : \underbrace{\hat{\varphi}_{I_1} \hat{\varphi}_{I_2} \hat{\varphi}_{I_3} \hat{\varphi}_{I_4} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}}_{k+1 \text{ contracciones que sí involucran a } \hat{\varphi}_{I_1}} : \end{aligned}$$

En conjunto obtenemos entonces el resultado deseado

$$T\{\hat{\varphi}_{I_1} \cdots \hat{\varphi}_{I_n}\} = : \hat{\varphi}_{I_1} \cdots \hat{\varphi}_{I_n} : + \text{todas las contracciones} : \quad \checkmark$$