

Con esta descomposición para $\hat{A}^\mu(x)$, podemos deducir que

$$[\hat{a}_{p\lambda}, \hat{a}_{p'\lambda'}^\dagger] = -\eta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$$

La aparición de $\eta_{\lambda\lambda'}$ del lado derecho (inevitable por covariancia bajo Lorentz) hace que tengamos aquí los conmutadores con el signo usual para $\lambda=i$, pero con el signo "equivocado" para $\lambda=0$. \leftarrow consecuencia de $\mathcal{L}_{Mink} \supset -\frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 \supset -\frac{1}{2}(\dot{A}^0)^2$

Definiendo al vacío $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{p\lambda}|0\rangle = 0 \quad \forall p, \lambda$, esto implica que cualquier estado con un número impar de fotones polarizados temporalmente tiene norma negativa!!

P.ej., la norma de $\hat{a}_{p_0}^\dagger|0\rangle$ es

$$\langle 0 | \hat{a}_{p_0} \hat{a}_{p_0}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \underbrace{[\hat{a}_{p_0}, \hat{a}_{p_0}^\dagger]}_{-\eta_{00} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})} | 0 \rangle = - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \langle 0 | 0 \rangle < 0.$$

Pareciera que para solucionar este problema debiéramos simplemente renombrar $\hat{a}_{p\lambda}^0 \leftrightarrow \hat{a}_{p\lambda}^{0\dagger}$, pero hacer esto no sería covariante bajo Lorentz. Además, a partir de la

densidad Hamiltoniana clásica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{M,L} &\equiv \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}_{M,L} \\
 &= -(\dot{A}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \dot{A}^0 + (\vec{A} + \vec{\nabla} A^0) \cdot \dot{\vec{A}} + \frac{1}{2} \left[-(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0)^2 + (\vec{\nabla}_\times \vec{A})^2 + (\dot{A}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2 \right] \\
 &= -(\dot{A}^0)^2 - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \dot{A}^0 + (\dot{\vec{A}})^2 + \vec{\nabla} A^0 \cdot \dot{\vec{A}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\dot{A}^0)^2 + \dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A^0 - \frac{1}{2} (\dot{\vec{A}})^2 - \dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A^0 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} A^0)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}_\times \vec{A})^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \left[(\dot{A}^0)^2 + (\vec{\nabla} A^0)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(\dot{\vec{A}})^2 + \vec{\nabla} A^0 \cdot \vec{\nabla} A^0 \right] \\
 &\quad \text{cf. KG } \frac{1}{2} (\dot{\psi}^2 + (\vec{\nabla} \psi)^2)
 \end{aligned}$$

(que ahora sí es local) se obtiene el operador Hamiltoniano

$$\hat{H}_{M,L} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(-\hat{a}_{p_0}^\dagger \hat{a}_{p_0} + \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_1} + \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_3}^\dagger \hat{a}_{p_3} \right).$$

Aquí vemos que, independientemente de si renombramos $\hat{a}_{p_0}^\dagger \leftrightarrow \hat{a}_{p_0}$ o no, ¡¡ los fotones "temporales" tienen energía negativa !!

La razón por la cual estamos obteniendo esta física absurda (probabilidades y energías negativas) es por supuesto el hecho de que no hemos impuesto aún la condición de Lorentz $\partial \cdot A = 0$ (necesaria en particular para recuperar \mathcal{L}_M). El punto es que, por no haber eliminado la redundancia antes de cuantizar, nuestro operador de campo $\hat{A}^\mu(x)$ carga con

componentes innecesarias, y como resultado de ello,
No todos los estados en nuestro espacio de Fock son físicos.
 Es importante notar aquí que para eliminar la redundancia
no podemos simplemente pedir que $\partial_\mu \hat{A}^\mu(x) = 0$,
 porque entonces tendríamos $\hat{\Pi}^0 = -\partial \cdot \hat{A} = 0$, lo cual es
 incompatible con la relación de conmutación $[\hat{A}_0, \hat{\Pi}^0] \neq 0$.
 Así que, por esta ruta donde insistimos en preservar la
 covariancia de Lorentz de manera manifiesta, nos vemos
 irremediablemente obligados a trabajar con un espacio
 de Fock redundante \mathcal{H} , que contiene estados incesarios.

Necesitamos entonces una manera de distinguir dentro de
 este espacio los estados que sí son físicos. Esto se logra
 imponiendo la condición de Lorentz a nivel de elementos
 de matriz: definiremos el subespacio de estados físicos
 $\mathcal{H}_{\text{fis}} \subset \mathcal{H}$ como el conjunto máximo de estados $|\text{fis}\rangle \in \mathcal{H}$
 que satisfacen $\langle \text{fis}' | \partial \cdot \hat{A}(x) | \text{fis} \rangle = 0 \quad \forall |\text{fis}\rangle, |\text{fis}'\rangle \in \mathcal{H}_{\text{fis}} \quad \forall x$,
 es decir, aquellos estados en los que la porción redundante

de $\hat{A}_\mu(x)$ es invisible. Es importante notar que \mathcal{H}_{fis} definido de esta manera (no solo mirando valores esperados) en verdad es un espacio vectorial: $\alpha|\text{fis}\rangle + \beta|\text{fis}'\rangle = |\text{fis}''\rangle$.

L29: 17/10/18

Descomponiendo a $\partial \cdot \hat{A}(x)$ en sus porciones de frecuencias positiva y negativa,

$$\partial \cdot \hat{A}(x) = \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} p_\mu \epsilon_{p\lambda}^\mu}_{\equiv [\partial \cdot \hat{A}(x)]_+} + \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger p_\mu \epsilon_{p\lambda}^{\mu*}}_{\equiv [\partial \cdot \hat{A}(x)]_- = [\partial \cdot \hat{A}(x)]_+^\dagger}$$

veamos que la condición

$$\langle \text{fis}' | \partial \cdot \hat{A} | \text{fis} \rangle = \langle \text{fis}' | ([\partial \cdot \hat{A}]_+ + [\partial \cdot \hat{A}]_-) | \text{fis} \rangle = 0 \quad \forall |\text{fis}\rangle, |\text{fis}'\rangle$$

operadores de
aniquilación

operadores de
creación

equivale a definir \mathcal{H}_{fis} a través de

$$[\partial \cdot \hat{A}(x)]_+ | \text{fis} \rangle = 0 \quad \forall x$$

Condición de
Gupta-Bleuler

Recordando que $p_\mu \epsilon_{p1}^\mu = 0 = p_\mu \epsilon_{p2}^\mu$, $p_\mu \epsilon_{p0}^\mu = 1 = -p_\mu \epsilon_{p3}^\mu$,

p. 360

podemos deducir que

$$\begin{aligned}
 (\partial \cdot \hat{A}(x))_+ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \underbrace{\hat{a}_{p\lambda} p \cdot \epsilon_{p\lambda}}_{\hat{a}_{p0} p \cdot \epsilon_{p0} + \hat{a}_{p1} p \cdot \epsilon_{p1} + \hat{a}_{p2} p \cdot \epsilon_{p2} + \hat{a}_{p3} p \cdot \epsilon_{p3}} \\
 &= \hat{a}_{p0} - \hat{a}_{p3}
 \end{aligned}$$

así que en espacio de momento la condición de Gupta-Bleuler se traduce en

$$(\hat{a}_{p0} - \hat{a}_{p3}) |f\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$$

(a pesar de que, en \mathcal{H} completo, $\hat{a}_{p0} \neq \hat{a}_{p3}$
 $\leftrightarrow \partial \cdot \hat{A} \neq 0$)

$$\underbrace{\quad}_{\equiv \hat{L}_p}$$

$$(\Rightarrow \langle f | \hat{L}_p^\dagger = 0 \quad \forall \vec{p}) .$$

Esta es entonces la manera en que podemos "fijar la norma de Lorentz" después de cuantizar. Pero recordemos que, aún a nivel clásico, la condición de Lorentz no elimina toda la redundancia (p. 355). ¿Cómo se manifiesta esto a nivel cuántico? El punto es que cualquier estado del tipo

$$\hat{L}_p^\dagger |\text{algo}\rangle = (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger) |\text{algo}\rangle$$

es automáticamente ortogonal a todos los estados físicos,

$$\langle \text{fís} | (\hat{L}_p^\dagger |\text{algo}\rangle) = (\langle \text{fís} | \hat{L}_p^\dagger) |\text{algo}\rangle = 0 \quad \forall |\text{fís}\rangle.$$

Estados en \mathcal{H} que tienen esta forma se conocen por tanto como estados espurios. Si un estado es espurio y físico entonces es en particular ortogonal a sí mismo, es decir,

$$\text{tiene norma cero: } (\langle \text{algo} | \hat{L}_p^\dagger) (\hat{L}_p^\dagger |\text{algo}\rangle) = 0.$$

|fís⟩

Llamamos a estos estados nulos. Claramente estos estados, a pesar de ser físicos, no pintan: el estado $|\text{fís}\rangle + |\text{nulo}\rangle$ tiene exactamente el mismo traslape que $|\text{fís}\rangle$ con todos los estados físicos.

Así que, siendo más precisos, nuestro verdadero espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{fís}}$ consiste de estados físicos sujetos a la relación de equivalencia

$$|\text{fís}\rangle \simeq |\text{fís}'\rangle \quad \text{si} \quad |\text{fís}'\rangle = |\text{fís}\rangle + |\text{nulo}\rangle.$$

(Formalmente, $\mathcal{H}_{\text{fís}} \equiv \mathcal{H}_{\text{fís}} / \simeq$ es entonces el conjunto de clases de equivalencia $[|\text{fís}\rangle] \equiv \{|\text{fís}'\rangle \mid |\text{fís}'\rangle \simeq |\text{fís}\rangle\}$.)

L28: 07/04/17

Es posible mostrar que esta equivalencia corresponde justamente a la invariancia de norma remanente

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \theta(x) \text{ con } \theta(x) \text{ tal que } \partial^2 \theta(x) = 0$$

[ver, p.ej., Greiner Sec 7.4, ejercicio 7.2]. Es decir,

$|\text{fís}'\rangle = |\text{fís}\rangle + |n_{\text{ulo}}\rangle$ es una transformación de norma implementada a nivel cuántico.

Llegados a este punto, el método de Gupta-Bleuler nos ha permitido eliminar la redundancia por completo a nivel cuántico, así que no debemos tener ya problemas ni de probabilidades ni de energías negativas, ¡porque estaríamos en serios aprietos! Felizmente,

i) En un estado físico, $\hat{a}_{p_0}^{\dagger}$ solo puede aparecer en una combinación del tipo $(\hat{a}_{p_0}^{\dagger} - \hat{a}_{p_3}^{\dagger})^N |0\rangle$, ← arbitrario porque solo así se satisface la condición de Gupta-Bleuler:

$$\hat{L}_p (\hat{a}_{p_0}^{\dagger} - \hat{a}_{p_3}^{\dagger})^N |0\rangle = \left[(\hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}), (\hat{a}_{p_0}^{\dagger} - \hat{a}_{p_3}^{\dagger})^N \right] |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left[\hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}, \hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger \right] (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} + (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger) \left[\hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}, (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} \right] \right) |0\rangle \\
&= \dots = N \left[\hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}, \hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger \right] (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} |0\rangle \\
&= N \left(\underbrace{\left[\hat{a}_{p_0}, \hat{a}_{p_0}^\dagger \right]}_{\substack{\text{p. 361} \\ -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})}} + \underbrace{\left[\hat{a}_{p_3}, \hat{a}_{p_3}^\dagger \right]}_{+(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})} \right) (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^{N-1} |0\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Y como además sucede que esta combinación es nula,

$$(\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger)^N |0\rangle = \hat{L}_p^\dagger \left(\hat{L}_p^{N-1} |0\rangle \right),$$

su norma No es negativa sino cero (y en cualquier caso, la relación de equivalencia dice que este estado es irrelevante, $(\hat{L}_p^\dagger)^N |0\rangle \approx 0$).

En $\mathcal{H}_{\text{Fís}}$, entonces, No hay estados con normas negativas. ✓

ii) Si consideramos la combinación específica de los operadores de creación (aniquilación temporal y longitudinal) que aparece en el Hamiltoniano (p. 362),

$$:\hat{H}_{M,L}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left(-\hat{a}_{p_0}^\dagger \hat{a}_{p_0} + \hat{a}_{p_3}^\dagger \hat{a}_{p_3} + \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_1} + \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} \right),$$

y calculamos su elemento de matriz entre estados físicos

obtenemos

$$\langle \text{fís}' | (\hat{a}_{p_0}^\dagger \hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3}^\dagger \hat{a}_{p_3}) | \text{fís} \rangle = 0$$

$$\frac{1}{2} (\hat{a}_{p_0}^\dagger - \hat{a}_{p_3}^\dagger) (\hat{a}_{p_0} + \hat{a}_{p_3}) + \frac{1}{2} (\hat{a}_{p_0}^\dagger + \hat{a}_{p_3}^\dagger) (\hat{a}_{p_0} - \hat{a}_{p_3})$$

$\circ \leftarrow$ sobre $\langle \text{fís}' |$
 $\rightarrow \circ$ sobre $| \text{fís} \rangle$

Queda claro entonces que los elementos de matriz del Hamiltoniano entre estados físicos reciben contribuciones solo de los fotones con polarización transversal. Las otras 2 polarizaciones están ahí solo para permitirnos tener una descripción covariante bajo Lorentz. En particular, en cualquier estado físico, el valor esperado de la energía

$$E_{\text{fís}} = \frac{\langle \text{fís} | : \hat{H}_{M,L} : | \text{fís} \rangle}{\langle \text{fís} | \text{fís} \rangle} = \frac{1}{\langle \text{fís} | \text{fís} \rangle} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \langle \text{fís} | (\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_1} + \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2}) | \text{fís} \rangle$$

$$= \frac{1}{\langle \text{fís} | \text{fís} \rangle} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (\| \hat{a}_{p_1} | \text{fís} \rangle \|^2 + \| \hat{a}_{p_2} | \text{fís} \rangle \|^2) \geq 0.$$

Así que en $\mathcal{H}_{\text{fís}}$ no hay estados con energía negativa. ✓

Habiendo comprobado ya que el método de cuantización covariante arroja al final los mismos resultados físicos que la cuantización en la norma de Coulomb, vale la pena resumir y contrastar en un diagrama estas 2 rutas distintas para cuantizar:

MAXWELL

Virtud/
Problema:

Invariancia de Norma \leftrightarrow Constricciones ("1era. clase") \leftrightarrow Redundancia

Opción 1: Eliminar redundancia y después cuantizar

Fijar norma de Coulomb \downarrow $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
 $A^0 = 0$ (o determinada por J^0)

A^0, π^0 no son independientes
 $\vec{A}, \vec{\pi}$ sujetos a 2 constricciones (de "2da. clase")

\Rightarrow Campo con 2 grados de libertad en cada punto

Cuantizar \downarrow (con paréntesis de Dirac)

2 pares de \hat{a}, \hat{a}^\dagger :

Fotones con polarización transversal ($\lambda = +1, -1$) ✓

Ventaja: solo variables físicas.

Desventajas: no manifiestamente covariante bajo Lorentz.

Opción 2: Cuantizar y después eliminar redundancia

Cambiar teoría \downarrow $\mathcal{L}_M \rightarrow \mathcal{L}_M - \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2$

Maxwell modificada (familia de teorías parametrizada por λ):

¡SIN constricciones!

\Rightarrow campo con 4 grados de libertad en cada punto

Cuantizar \downarrow (con paréntesis de Poisson)

4 pares de \hat{a}, \hat{a}^\dagger :

Fotones con polarización transversal, longitudinal, temporal

✗ Energía/norma negativa \uparrow

Identificar estados físicos para regresar a Maxwell \downarrow

$$(\partial \cdot \hat{A})_+ |f\rangle = 0 \leftrightarrow \partial \cdot A = 0$$

$$|n_0\rangle \geq 0 \leftrightarrow A_\mu \approx A_\mu - \partial_\mu \theta$$

con $\partial^2 \theta = 0$

2 pares de \hat{a}, \hat{a}^\dagger :

Fotones con polarización transversal ($\lambda = +1, -1$) ✓

Ventaja: Covariancia bajo Lorentz es manifiesta

Desventaja: espacio de Fock con estados no físicos

Podemos, por último, calcular el propagador de Feynman para el campo de Maxwell en la norma de Lorentz (+Feynman)

$$\begin{aligned}
 M_F^{\mu\nu}(x'-x) &\equiv \langle 0 | T \{ \hat{A}^\mu(x') \hat{A}^\nu(x) \} | 0 \rangle \quad \begin{array}{l} \nearrow \partial \cdot A = 0 \\ \nearrow J = 1 \end{array} \\
 &= \Theta(x'^0 - x^0) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i p' \cdot x' + i p \cdot x}}{\sqrt{2E_{p'}} \sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^\mu \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\nu*} \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{p'\lambda'}^\dagger \hat{a}_{p\lambda} | 0 \rangle}_{\substack{\text{p. 361} \\ -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})}} \\
 &\quad + \Theta(x^0 - x'^0) \left[\begin{array}{l} x' \leftrightarrow x \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right] \\
 &= \Theta(x'^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i p \cdot (x' - x)}}{2E_p} \underbrace{\left(-\eta^{\lambda\lambda'} \sum_{\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^\mu \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\nu*} \right)}_{-\eta^{\mu\nu} \text{ (ver p. 360)}} + \Theta(x^0 - x'^0) \left[\begin{array}{l} x' \leftrightarrow x \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

que como en las pp. 20-23 se puede reescribir en la forma

$$M_F^{\mu\nu}(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot (x' - x)} \frac{-i \eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

Este resultado coincide con la parte covariante bajo Lorentz del propagador $M_{FC}^{\mu\nu}(x'-x)$ que obtuvimos en la norma de Coulomb (ver p. 351). Sabemos que la diferencia entre ambos se debe a que $M_{FC}^{\mu\nu}(x'-x)$

únicamente describe la propagación de fotones transversales,
 mientras que $M_F^{\mu\nu}(x'-x)$ incorpora además fotones longitudinales
 y temporales. Es entonces gracias a estos ingredientes no físicos
 que logramos preservar la covariancia manifiesta bajo Lorentz.

Por completez, vale la pena señalar que existe una
 versión más sistemática de este procedimiento de
 cuantización covariante, conocida como cuantización BRST
 (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin), que resulta prácticamente
 indispensable en el caso del campo de norma no abeliano.

Un formalismo aún más general es Batalin-Vilkovisky (\leftrightarrow "anticampo").
 Para BRST y BV, ver Weinberg II, 15.7-15.9, o Henneaux & Teitelboim.

Otro punto que conviene aclarar es la relación
 y distinción entre la invariancia global y local U(1) que
 hemos analizado a este capítulo. Claramente

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta(x)} \psi(x)$$

tiene como caso particular $\theta(x) = \theta$ constante,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) \quad , \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i q \theta} \psi(x) .$$

Pero hay una distinción importante: esta transformación global cambia las condiciones de frontera (en infinito) de nuestro campo. Si bien en este curso normalmente no nos deteneremos mucho a pensar en las condiciones de frontera, su especificación es importante para tener un principio variacional bien definido (y para todas las veces que hemos integrado por partes). Por esta razón, solo $\theta(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ es una redundancia, mientras que la parte global es una verdadera simetría (\leftrightarrow corriente de Noether).

Antes de terminar con este capítulo, analizaremos siquiera brevemente lo que sucede en el caso de un campo vectorial masivo.

Si simplemente agregamos un término de masa a \mathcal{L}_M , obtenemos

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

Lagrangiano de Proca ,

$$\mathcal{L}_p = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

que evidentemente No es invariante de norma. $\Rightarrow -\frac{1}{4} F^2$ ya no es obligatorio

Si este campo se acopla linealmente a otros campos $\psi(x)$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_\psi \quad \text{con } \mathcal{L}_{int} = -A_\mu J^\mu,$$

↑ corriente construida
en ψ 's

su ec. de mov. será la ecuación de Proca

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu(x)} = \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^\nu(x) - J^\nu(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial \cdot A) + m^2 A^\nu = J^\nu.$$

Tomando la divergencia obtenemos $m^2 \partial \cdot A = \partial \cdot J$, que se anula en el caso libre ($J=0$) o si J se conserva ($\partial \cdot J=0$). Así que en este caso la condición de Lorentz, $\partial \cdot A=0$, será automática. ya no es obligatorio

Aparecen 2 constricciones, $\pi^0=0$ (de la definición del momento)

$$\text{y } A^0 = \frac{1}{m^2} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + J^0) \quad (\text{de la ec. de mov. de } A_0)$$

(de "segunda clase", una vez de esperar), que sirven directamente para eliminar del formalismo a π^0, A_0 .

Cuantizamos entonces solo a las variables independientes $\vec{A}, \vec{\pi}$,

imponiendo las relaciones de conmutación ordinarias

$$[\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{\pi}^j(t, \vec{x}')] = i \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{y } [\hat{A}, \hat{A}] = 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]).$$

De aquí obtendremos los estados esperados para partículas masivas

con espín 1: polarizaciones transversales ($\lambda = \pm 1$) y longitudinal ($\lambda = 0$). ahora sí es física

[30: 19/10/18

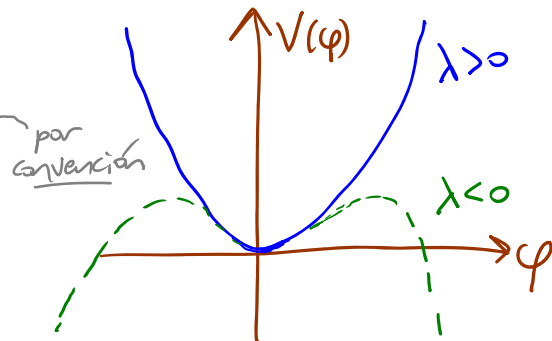
5. Interacciones y Expansión Perturbativa

Sabemos ya muy bien cómo cuantizar campos libres.

Para tener campos interactuantes, agregaremos al Lagrangiano terminos cúbicos o más altos (\leftrightarrow eqs. de mov. no lineales). Como veremos, el efecto de esto no será solamente agregar interacciones entre las partículas, sino también cambiar la definición misma de cada partícula en relación al campo, básicamente por la posibilidad de que las partículas tengan autointeracciones.

Para ser más concretos, consideremos la teoría de un campo escalar real con densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{Término "Cinético"} \text{ (ver p. 188)}} - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4}_{\equiv -V(\varphi) \text{ Energía Potencial}}$$



En la figura podemos ver que si $\lambda \geq 0$, la configuración donde el campo tiene un valor de fondo $\varphi(x)=0 \forall x$ representa un 'vacío' estable; pero si $\lambda < 0$, $\varphi=0$ es apenas metaestable, y no existe en realidad ningún vacío estable. Tomaremos $\lambda \geq 0$.

(De manera similar, podemos ver que en un término del tipo $-\frac{\lambda'}{3!}\varphi^3$ en \mathcal{L}

no habría ningún vacío estable, a menos que incluyéramos también un

término cuártico. En este sentido, la teoría interactiva se simplifica más sencilla es solo incluir φ^4 .)

El parámetro λ , que determina la intensidad de las interacciones, se conoce como la constante de acoplamiento, o el acoplamiento,

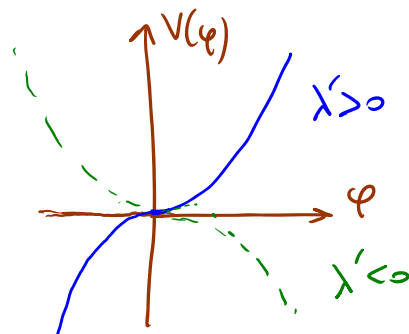
o el acople (en inglés, "coupling constant" o solo "coupling").

Vale la pena notar que, dado que la acción

$$S = \int d^d x \mathcal{L} = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right)$$

debe ser adimensional, en 3+1 dim debemos tener $[\mathcal{L}] = M^4$,

lo cual a partir del término cinético implica que $[\varphi] = M^1$,



y en el término de interacción vemos entonces que
 $[\lambda] = M^0$: la constante de acoplamiento en esta
 "teoría φ^4 " (en 3+1 dim) resulta ser adimensional.

El momento canónico conjugado a $\varphi(x)$ sigue siendo

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x), \quad \text{y el proceso}$$

de cuantización involucrará por supuesto el reemplazo

$$\varphi(x), \pi(x) \longrightarrow \hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(x) \quad (\text{en el cuadro de Heisenberg})$$

con las reglas de conmutación usuales

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(t, \vec{x}')}_{\dot{\hat{\varphi}}(t, \vec{x}')}] &= i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}), \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]. \end{aligned}}$$

Pero la ec. de Heisenberg para $\hat{\varphi}(x)$ (que coincide con la ec. de m.p.v. clásica)

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\varphi}(x) = -\frac{\lambda}{3!} \hat{\varphi}^3(x)$$

es No lineal, y $\hat{\varphi}(x)$ No puede ya expresarse como

una combinación lineal de ondas planas con coeficientes \hat{a}_p y \hat{a}_p^\dagger .

Por otro lado, si las interacciones son débiles ($\Leftrightarrow \lambda \ll 1$), esperaríamos que la dinámica del campo se pueda aproximar con una expansión perturbativa en potencias de λ , que tengamos como punto de partida al campo libre ($\lambda=0 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KG}}$).

Notando que podemos separar al Hamiltoniano

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]}_{\equiv H_0 \quad \text{contribución dominante}} + \underbrace{\int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4}_{\equiv H_{\text{int}} \quad \text{contribución subdominante}},$$

como paso inicial nos conviene definir un cuadro en

donde el operador de campo y todos los operadores

evolucionen no con \hat{H} sino con \hat{H}_0 .

Es decir, en lugar del cuadro de Schrödinger,

$$\hat{\mathcal{O}}_S, \quad |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S,$$

o el de Heisenberg,

$$\hat{O}_H(t) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t}, \quad |\psi\rangle_H \equiv e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S,$$

usaremos el llamado cuadro de interacción (o de Dyson, o de Tomonaga)

$$\hat{O}_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^S t} = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} \hat{O}_H(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^S t},$$

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle_H.$$

En este cuadro tenemos, por construcción, que la ec. de evolución para los operadores involucra solo al Hamiltoniano libre,

$$i\partial_t \hat{O}_I(t) = [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^S] \quad (+ i\partial_t \hat{O}_I(t))$$

$$= [\hat{O}_I(t), \hat{H}_0^I], \quad \text{ec. de Heisenberg en el cuadro de interacción}$$

donde para la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\hat{H}_0^I \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{H}_0^S.$$

Esta evolución aplica en particular para $\hat{\phi}_I(x)$, que satisface entonces la ecuación de movimiento libre: dado que

$$[\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}')] = e^{i\hat{H}_0^s t} [\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}), \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')] e^{-i\hat{H}_0^s t} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) &= -i [\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \hat{H}_0^{\mathbf{I}}(t)] \\ &= -i \int d^3x' \left[\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \frac{1}{2} \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 \right] e^{-i\hat{H}_0^s t} \\ &= -i \int d^3x' \left[\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \frac{1}{2} \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}'))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(\vec{x}')^2 \right] \\ &= + \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) \quad (\text{justo como en la p. 189}), \end{aligned}$$

y de manera similar

$$\partial_t \hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) = -i [\hat{\pi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}), \hat{H}_0^{\mathbf{I}}(t)] = \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}) - m^2 \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(t, \vec{x}),$$

que en conjunto implican la ec. de Klein-Gordon

$$\boxed{(\partial^2 + m^2) \hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(x) = 0}.$$

Podemos entonces desarrollar como antes

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{I}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger \right) \Big|_{\substack{\text{independientes de } t \\ p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}}$$

y las relaciones de conmutación implican nuevamente que

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = 0.$$

Además, tenemos evidentemente que

$$:\hat{H}_0^{\text{I}}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Todo esto resulta muy reconfortante, ¡pero hasta ahora, parece que solo estamos jugando a olvidarnos de \hat{H}_{int} ! Como habíamos dicho, el efecto de las interacciones se ve ahora en la evolución de los estados, $\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\text{I}} &= e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} |\psi(t)\rangle_{\text{S}} = e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} |\psi(t')\rangle_{\text{S}} \\ &= e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\text{I}}t'} |\psi(t')\rangle_{\text{I}} \\ &\equiv \hat{U}_{\text{I}}(t, t') \end{aligned}$$

Operador de evolución

(en el cuadro de interacción)

Este operador es unitario,

$$\hat{U}_{\text{I}}(t, t')^\dagger = e^{i\hat{H}_0^{\text{I}}t'} e^{i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^{\text{I}}t} = \hat{U}_{\text{I}}(t', t) = \hat{U}_{\text{I}}(t, t')^{-1},$$

y evidentemente satisface

$$\hat{U}_I(t, t') \hat{U}_I(t', t'') = \hat{U}_I(t, t'').$$

Este mismo operador es además el que conecta al operador de campo en el cuadro de Heisenberg con su contraparte en el cuadro de interacción:

$$\hat{\varphi}_I(x) = \underbrace{e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}t}}_{\hat{U}_I(t, 0)} \hat{\varphi}_H(x) \underbrace{e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0^S t}}_{\hat{U}_I(t, 0)^{-1} = \hat{U}_I(0, t)}$$

$$\leftrightarrow \boxed{\hat{\varphi}_H(x) = \hat{U}_I(t, 0)^{-1} \hat{\varphi}_I(x) \hat{U}_I(t, 0)}$$

Resolveríamos entonces el problema de evolución por completo si pudiéramos reexpresar a $\hat{U}_I(t, t')$ en términos de $\hat{\varphi}_I(x)$, cuya dependencia temporal conocemos (es libre).

Para avanzar en esta dirección, notemos primero que

$$\hat{U}_I(t, t') \equiv e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^S t'}$$