viernes, 09 de noviembre de 2007 01:31 a.m.

p. 302:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0,\quad A^0=0}$$

Norma de Coulomb (o transversal).

L8: 17/10/22

Esta norma tiene la virtud de que preserva la invariancia bajo rotaciones (aunque claramente no bajo empujones).

Para ser más precisos, debemos notar que en presencia de una densidad de carga $J^0\neq 0$, no es de hecho posible imponer simultáneamente estas 2 condiciones. El obstáculo es que la constricción $\chi_2=\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}-J^0=0$ equivale al enunciado

$$\underbrace{\partial_i F^{i0}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}=\partial_i(\partial^i A^0-\partial^0 A^i)=-\vec{\nabla}^2 A^0-\partial^0\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{\text{por norma de Coulomb}}=J^0,$$

ecuación diferencial de la que podemos deducir que

$$A^0(t,\vec{x})=-\int d^3x'\,G(\vec{x},\vec{x}')\,J^0(t,\vec{x}')$$

función de Green de $\vec{\nabla}^2$: $\vec{\nabla}^2 G(\vec{x},\vec{x}')=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$

sí es invertible

$$=\int d^3x'\,\frac{J^0(t,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

que reconocemos por supuesto como el potencial de Coulomb producido (¡de manera no local!) por la carga $J^0(t,\vec{x}')$.

e instantánea

Queda claro entonces que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \Longrightarrow A^0 \neq 0$ si $J^0 \neq 0$.

Así que en el caso más general, la norma de Coulomb es

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\,, \quad A^0 = \int d^3x' \frac{J^0(\vec{x}',t)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}}\,.$$

Lo importante es que, claramente, en esta descripción A^0 no es un grado de libertad independiente.

Podemos fácilmente verificar que siempre es posible elegir la norma de Coulomb: comenzando con un $A_\mu(x)$ arbitrario, la transformación de norma

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$$

logra que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(x) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x) + \vec{\nabla}^2\theta(x) = 0$ si escogemos $\theta(x)$ tal que

$$\vec{\nabla}^2\theta(x) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x)\,,$$

es decir, si usamos

$$\theta(t,\vec{x}) = -\int d^3x' \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(t,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\,.$$

Habiendo fijado la norma de Coulomb, nos podemos olvidar por completo de $\underbrace{\Pi^0}_{=0}$ y $\underbrace{A_0}_{=\int d^3x' \frac{J^0(t,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}}$, y tenemos entonces viernes, 09 de noviembre de 2007 02:01 a.m.

como variables en el espacio fase a $\vec{A}(t,\vec{x})$ y $\vec{\Pi}(t,\vec{x})$, sujetas a las 2 constricciones

solo 2 A^i y 2 Π^i son independientes

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{x}) = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}(t,\vec{x}) = J^0(t,\vec{x})},$$

Coulomb (fijar norma) Gauss (constricción)

que sí son análogas a las que teníamos en el caso de Dirac (no 'Poissonizan' entre sí $\Rightarrow$ son "de segunda clase").

Cuantizamos entonces promoviendo

$$\vec{A}(x),\ \vec{\Pi}(x) \longrightarrow \hat{\vec{A}}(x),\ \hat{\vec{\Pi}}(x)$$

espín-estadística

e imponiendo las relaciones de conmutación que se deducen a partir de los paréntesis de Dirac (ver p. 264),

$$\boxed{\begin{aligned}
&[\hat{A}_i(t,\vec{x}), \hat{A}_j(t,\vec{x}')] = 0 = [\hat{\Pi}^i(t,\vec{x}), \hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')],\\
&[\hat{A}_i(t,\vec{x}), \hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')] = i\,\delta_i^j\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - i\,\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x'_j}\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\\
&\qquad \equiv i\,\delta_\perp^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')_i{}^j
\end{aligned}}$$

¡expresión no local!

que por construcción son compatibles con las constricciones:

$$[\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{A}}(t,\vec{x}), \hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')] = \partial^i[\hat{A}_i(t,\vec{x}), \hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')]$$

está dado por

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{A}}(t,\vec{x}),\hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')\right] = \partial^i\left(i\,\delta_i^j\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - i\,\partial_i\partial'^j\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right)$$

$$= i\left(\partial^j\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') + \partial'^j\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right)$$

$$= i\left(\partial^j\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - \partial'^j\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})\right)$$

$$= 0\,,$$

y de manera similar,

$$\left[\hat{A}_i(t,\vec{x}),\underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\hat{\vec{\Pi}}(t,\vec{x}')}_{=\hat{J}^0(t,\vec{x}')}\right] = \partial'_j\left[\hat{A}_i(t,\vec{x}),\hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')\right]$$

$$= i\left(\partial'_i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') + \partial_i\vec{\nabla}'^2\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right)$$

$$= 0\,.$$

Para el campo vectorial libre, la ec. de mov. es

$$0 = \partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu\partial_\mu A_\nu - \partial^\mu\partial_\nu A_\mu$$

$$= \partial^2 A_\nu - \partial_\nu\left(\xcancel{\partial_0 A^0}^{\,0} + \xcancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}^{\,0}\right)$$

en la norma de Coulomb, es decir, cada componente de $A_\nu(x)$ satisface la ec. de ondas $\equiv$ Klein-Gordon sin masa. Sabemos que la solución real más general a esta ecuación se puede expresar como la superposición

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(e^{-ip\cdot x} a^\mu(p) + e^{ip\cdot x} a^\mu(p)^* \right)\Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = |\vec{p}|}$$

donde los vectores $a^\mu(p)$ serían de entrada arbitrarios.

Imponiendo además las condiciones de norma, requerimos que

$$A^0(x) = 0 \quad \forall\, x \implies a^0(p) = 0 \quad \forall\, \vec{p},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x) = 0 \quad \forall\, x \implies \vec{p}\cdot\vec{a}(p) = 0 \quad \forall\, \vec{p}.$$

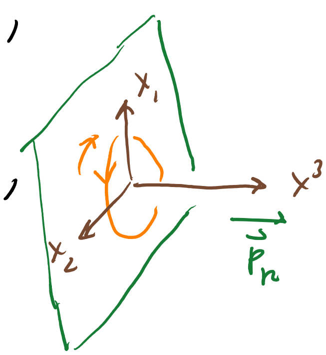
2 condiciones $\Rightarrow a^\mu(p)$ tiene 2 componentes independientes

Podemos verificar que esto se cumple si usamos precisamente la forma de $A^\mu(x)$ que teníamos en las páginas 302, 304:

$$a^\mu(p) \equiv a_{p\lambda}\, \varepsilon^\mu_{p\lambda} \equiv a_{p\lambda}\, L(p)^\mu{}_\nu\, \varepsilon^\nu_{p_R \lambda},$$

2 números ↗ ↖ 2 vectores fijos

con $\lambda = \pm 1$, $p_R^\mu \equiv (1,0,0,1)$, $\varepsilon^\nu_{p_R \pm 1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$,



$a_{p\lambda}$ arbitrarios y

$$\underset{\sim}{L}(p) \equiv \exp(i\varphi \underset{\sim}{J}^{(21)}) \exp(i\theta \underset{\sim}{J}^{(13)}) \exp(i\alpha \underset{\sim}{J}^{(30)}) \quad \text{(ver p. 95)}$$

coords angulares de $\vec{p}$ $\qquad$ $\operatorname{senh}\alpha \equiv \frac{1}{2}\left(p^0 - \frac{1}{p^0}\right)$.

En efecto, con estas definiciones tenemos

$$\varepsilon^0_{p\pm1} = \Big[\underbrace{\exp(i\varphi \underset{\sim}{J}^{(21)})\exp(i\theta \underset{\sim}{J}^{(13)})\exp(i\alpha \underset{\sim}{J}^{(32)})}_{\underset{\sim}{L}(p)} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{pmatrix}}^{\varepsilon^\nu_{p_R\lambda}}\Big]^0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a^0(p) = a_{p\lambda}\varepsilon^0_{p\lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^0(x) = 0 \quad \checkmark$$

y

$$-\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}_{p\lambda} = p^0 \cancelto{0}{\varepsilon^0_{p\lambda}} - \vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}_{p\lambda} = p_\mu \varepsilon^\mu_{p\lambda}$$

$p = \underset{\sim}{L}(p)\, p_R$

$\varepsilon_{p\lambda} = \underset{\sim}{L}(p)\, \varepsilon_{p_R\lambda}$

$$= (p_R)_\mu \varepsilon^\mu_{p_R\lambda} = 1\cdot \cancelto{0}{\varepsilon^0_{p_R\lambda}} - 1\cdot \cancelto{0}{\varepsilon^3_{p_R\lambda}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{p}\cdot\vec{a}(p) = a_{p\lambda}\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}_{p\lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x) = 0. \quad \checkmark$$

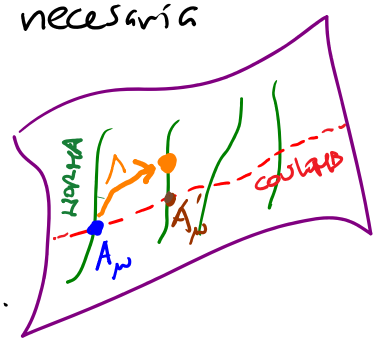
Al cuantizar, nuestro operador de campo toma entonces la forma esperada (p. 302): ← solo existen fotones <u>transversos</u>

$$\boxed{\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(e^{-ip\cdot x}\hat{a}_{p\lambda}\varepsilon^\mu_{p\lambda} + e^{ip\cdot x}\hat{a}^\dagger_{p\lambda}\varepsilon^{\mu *}_{p\lambda}\right)\Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = |\vec{p}|}}\,.$$

Por el hecho de que exigimos que las condiciones de norma $\hat{A}^0(x) = 0 = \vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{A}}(x)$ se cumplan en <u>cualquier</u> marco de referencia, es obvio que $\hat{A}^\mu(x)$ <u>NO</u> transforma como un vector. En la página 308 vimos que de hecho

$$\hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda})\,\hat{A}^{\mu}(x)\,\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda}) = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}\,\hat{A}^{\nu}(\Lambda x) - \partial^{\mu}\hat{\Theta}(x),$$

donde ahora entendemos que el término adicional representa a la transformación de norma necesaria para 'compensar' la regla de transformación vectorial, de tal modo que las condiciones de norma se sigan respetando.



Notemos ahora que la relación de conmutación basica

$$[\hat{A}_i(t,\vec{x}), \underbrace{\hat{\Pi}^j(t,\vec{x}')}] = i\,\delta_\perp^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')_i{}^j = i\,\delta_i^j\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - i\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x'_j}\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$$

$$-\hat{F}^{0j}(t,\vec{x}') \equiv -\dot{\hat{A}}^j(t,\vec{x}') + \underbrace{\partial'^j \hat{A}^0(t,\vec{x}')}_{\underbrace{\partial'^j\left(\int \frac{d^3x''}{4\pi}\frac{\hat{J}^0(t,\vec{x}'')}{|\vec{x}'-\vec{x}''|}\right)}_{\text{conmuta con } \hat{A}_i(t,\vec{x})}}$$

implica que

$$\boxed{[\hat{A}^i(\vec{x},t), \dot{\hat{A}}^j(\vec{x}',t)] = i\,\delta_\perp^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')_i{}^j}$$

← NO se anula fuera del cono de luz

Tenemos además la relación de 'completez'

$$\underbrace{\varepsilon_{p_R\lambda}\,\varepsilon^{*T}_{p_R\lambda}}_{\text{sumar}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -i & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & i & 0\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{proyecta sobre subespacio perpendicular a } \vec{p}_R = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}},$$

que a su vez implica que

implican que no hay componente temporal

$$\varepsilon^{\mu}_{p\lambda}\varepsilon^{\nu *}_{p\lambda} = \delta^{\mu}_{i}\delta^{\nu}_{j}\underbrace{\left(\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2}\right)}_{\text{proyecta sobre subespacio perpendicular a } \vec{p}} \equiv \mathcal{P}^{\mu\nu}(\vec{p}) .$$

(Podemos verificar que, como es de esperarse,

$$\mathcal{P}^{0\nu}(\vec{p}) = 0 = \mathcal{P}^{\mu 0}(\vec{p}) , \quad p_i \mathcal{P}^{i\nu}(\vec{p}) = 0 = \mathcal{P}^{\mu j}(\vec{p}) p_j . \quad \checkmark)$$

Usando esta relación (análoga a, p.ej., $u^s_p \bar{u}^s_p = \not{p} + m$), se puede comprobar que las relaciones de conmutación básicas para el operador de campo se traducen en

$$\boxed{\left[\hat{a}_{p\lambda}, \hat{a}^{\dagger}_{p'\lambda'}\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\, \delta_{\lambda\lambda'}} .$$

Esto ya lo sabemos, porque partimos de ello al inicio de este capítulo

El Hamiltoniano clásico para el campo de Maxwell en la norma de Coulomb es

$$H_M = \int d^3x \left[\underbrace{\Pi^i}_{E^i} \underbrace{\dot{A}_i}_{F_{0i} + \partial_i A_0 \to 0} + \overbrace{\underbrace{\frac{1}{4}\left(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij}\right)}_{\frac{1}{2}\left(-\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \; = -(\text{energía cinética} - \text{energía potencial})}}^{-\mathcal{L}_M} \right]$$

$F^{0i} = -E^i$

$F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$

$$= \int d^3x \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)}_{\text{energía cinética} + \text{energía potencial}} ,$$

o, en términos del potencial vectorial,

$$H_M = \int d^3x \, \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{A}}^2 + (\vec{\nabla}\times\vec{A})^2 \right].$$

A nivel cuántico, esto se traduce en el resultado esperado

$$\boxed{:\hat{H}_M: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \, \hat{a}^\dagger_{p\lambda} \hat{a}_{p\lambda}} \qquad \text{c/ } E_{\vec{p}} = |\vec{p}|.$$

Si acopláramos $A_\mu(x)$ a campos cargados usando $\mathcal{L}_{int} = -A_\mu J^\mu$ ($\Rightarrow \mathcal{H}_{int} = +A_\mu J^\mu$), tendremos

término en H_M que antes se anuló

$$H_M + H_{int} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \underbrace{\vec{\Pi}\cdot\vec{\nabla}A_0}_{\text{partes} \; -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}A_0 \overset{\text{Gauss}}{=} \cancel{-J^0 A_0}} + \underbrace{\cancel{A_0 J^0} + A_i J^i}_{A_\mu J^\mu} \right]$$

donde ahora

$$\int d^3x \, \frac{1}{2}\vec{E}^2 = \int d^3x \, \frac{1}{2}\left(-\vec{\nabla}A^0 - \dot{\vec{A}}\right)^2$$

$$\overset{\text{partes}}{=} \int d^3x \, \frac{1}{2}\Big[-A^0 \underbrace{\vec{\nabla}^2 A^0}_{\vec{\nabla}\cdot(-\vec{E} + \dot{A}^i) \overset{\text{Gauss}}{=} -J^0} + (\dot{\vec{A}})^2 - 2A^0 \cancel{(\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}})} \Big],$$

Por norma de Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

0 Coulomb

de tal modo que

$$H_M + H_{int} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{A}}^2 + \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2}_{\frac{1}{2}\vec{B}^2} \right) - \vec{A}\cdot\vec{J} + \frac{1}{2}A^0 J^0 \right].$$

$\frac{1}{2}\vec{E}^2$

Figuran aquí 2 partes cualitativamente distintas:

$$H_M + H_{int} = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{A}}^2 + (\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right) - \vec{A}\cdot\vec{J}\right]}_{\text{Expresión } \underline{\text{local}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3x\, A^0 J^0}_{\underbrace{\frac{1}{2}\int d^3x' d^3x \frac{J^0(\vec{x}',t)J^0(\vec{x},t)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\text{Energía de Coulomb}}}$$

$\equiv H_{Coul}(t)$

¡Interacción instantánea!

La aparición de este término no local es parte del precio que pagamos por usar una descripción no manifiestamente covariante bajo Lorentz, donde A_0 NO se mantiene vivo como campo fluctuante. Regresaremos a este punto más adelante.

Podemos también calcular el propagador de Feynman para el campo de Maxwell libre en la norma de Coulomb,

$$M^{\mu\nu}_{F,C}(x'-x) \equiv \langle 0|\, T\{\hat{A}^\mu(x')\hat{A}^\nu(x)\}\,|0\rangle$$

términos con $\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\hat{a}$ se anulan

$$= \theta(x'^0 - x^0)\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip'\cdot x' + ip\cdot x}}{\sqrt{2E_{p'}}\sqrt{2E_p}}\,\varepsilon^\mu_{p'\lambda'}\varepsilon^{\nu *}_{p\lambda}\underbrace{\langle 0|\hat{a}_{p'\lambda'}\hat{a}^\dagger_{p\lambda}|0\rangle}_{(2\pi)^3\delta^{(3)}(p'-p)\delta_{\lambda'\lambda}}$$

$$+\,\theta(x^0 - x'^0)\left[\begin{matrix}\mu \leftrightarrow \nu \\ x' \leftrightarrow x\end{matrix}\right]$$

p. 348

(denotado $D^{\mu\nu}_F(x'-x)$ en algunos libros), que se simplifica a lunes, 12 de noviembre de 2007 09:40 a.m.

$$M^{\mu\nu}_{F,c}(x'-x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[\theta(x'^0-x^0)\frac{e^{-ip\cdot(x'-x)}}{2E_p}\underbrace{\varepsilon^{\mu}_{\vec{p}\lambda}\varepsilon^{\nu *}_{\vec{p}\lambda}}+\theta(x^0-x'^0)\frac{e^{ip\cdot(x'-x)}}{2E_p}\underbrace{\varepsilon^{\nu}_{\vec{p}\lambda}\varepsilon^{\mu *}_{\vec{p}\lambda}}\Big]$$

$$P^{\mu\nu}(\vec{p})$$ p. 348

De manera análoga al caso escalar y espinorial, esto se puede reescribir en la forma (ver pp. 20-23)

$$M^{\mu\nu}_{F,c}(x'-x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x'-x)}\frac{i}{p^2+i\epsilon}P^{\mu\nu}(\vec{p})\equiv\int\frac{d^4p}{(2\pi)^3}e^{-ip\cdot(x'-x)}\tilde{M}^{\mu\nu}_{F,c}(p).$$

$-m^2=0$

L28: 15/10/18

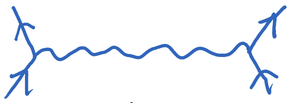
Notando además que

$$P^{\mu\nu}(\vec{p})\equiv\delta^{\mu}_{i}\delta^{\nu}_{j}\left(\delta^{ij}-\frac{p^ip^j}{|\vec{p}|^2}\right)=-\eta^{\mu\nu}+\frac{p^0(p^\mu\delta^\nu_0+p^\nu\delta^\mu_0)-p^\mu p^\nu-p^2\delta^\mu_0\delta^\nu_0}{|\vec{p}|^2}$$

(donde es fácil comprobar que con la expresión de la derecha tenemos todavía $P^{0\nu}(\vec{p})=0$, $p_iP^{i\nu}(\vec{p})=0$),

vemos entonces que

$$\tilde{M}^{\mu\nu}_{F,c}(p)=\frac{i}{p^2+i\epsilon}P^{\mu\nu}(\vec{p})=\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[-\eta^{\mu\nu}-\frac{p^2\delta^\mu_0\delta^\nu_0}{|\vec{p}|^2}+\frac{p^\mu(p^0\delta^\nu_0-p^\nu)+p^\nu p^0\delta^\mu_0}{|\vec{p}|^2}\right].$$

Esta expresión es bastante fea, pero se le puede simplificar. Como veremos 2 capítulos más adelante, al hacer cálculos perturbativos de amplitudes de dispersión, este propagador libre aparecerá siempre multiplicado por corrientes, en la forma 

$$\int d^4x' d^4x\, J_\mu(x') \underbrace{M^{\mu\nu}_{F,C}(x'-x)}_{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x'-x)} \tilde{M}^{\mu\nu}_{F,C}(p)} J_\nu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_\mu(-p) \tilde{M}^{\mu\nu}_{F,C}(p) \tilde{J}_\nu(p),$$

p.311

Dado que (por invariancia de norma) estas corrientes se conservan,

$$\partial^\nu J_\nu(x) = \partial^\nu \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \tilde{J}_\nu(p) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} p^\nu \tilde{J}_\nu(p) = 0$$

$$\longleftrightarrow \quad p^\nu \tilde{J}_\nu(p) = 0,$$

esto nos permite ignorar en $\tilde{M}^{\mu\nu}_{F,C}(p)$ todo término proporcional a p^μ ó p^ν (puesto que estos términos se anularán al contraer con $\tilde{J}_\mu(p)$ y $\tilde{J}_\nu(p)$).

$$\frac{i}{p^2+i\epsilon}\left[-\eta^{\mu\nu} - \frac{p^2\delta_0^\mu\delta_0^\nu}{|\vec{p}|^2} + \frac{p^\mu(p^0\delta_0^\nu - p^\nu) + p^\nu p^0 \delta_0^\mu}{|\vec{p}|^2}\right]$$

Tenemos entonces la equivalencia

$$M^{\mu\nu}_{F,C}(x'-x) \simeq \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x'-x)} \left[-\frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon} - \frac{i\cancel{p^2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu}{\cancel{p^2}|\vec{p}|^2}\right].$$

El primer término aquí es covariante bajo Lorentz; nos referiremos a él de ahora en adelante como $M^{\mu\nu}_F(x'-x)$.

El segundo término,

$$-\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot(x'-x)}\, \frac{i\delta_0^\mu \delta_0^\nu}{|\vec{p}\,|^2} = -i\,\delta(x'^0-x^0)\,\delta_0^\mu\delta_0^\nu \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})}}{|\vec{p}\,|^2}}_{\frac{1}{4\pi|\vec{x}\,'-\vec{x}|}},$$

al contraerse con las corrientes $J_\mu(x')J_\nu(x)$, claramente tendrá la misma estructura que la energía potencial de Coulomb, $H_{coul}(t) \equiv \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x'\, \frac{J^0(\vec{x},t)\, J^0(\vec{x}\,',t)}{4\pi|\vec{x}\,'-\vec{x}|}$ (p.350).

Tenemos entonces la descomposición

$$M^{\mu\nu}_{F,C}(x'-x) \simeq M^{\mu\nu}_{F}(x'-x) - M^{\mu\nu}_{coul}(x'-x),$$

L27: 05/04/17

es decir, el propagador en la norma de Coulomb, que se refiere por construcción solo a fotones con polarización transversal ($\varepsilon^0_{p\lambda} = 0 = p_i\,\varepsilon^i_{p\lambda} = 0$), es igual a un propagador covariante de Lorentz, $M^{\mu\nu}_F(x'-x)$, menos la contribución que corresponde a la interacción instantánea de Coulomb. Esta última se resta aquí porque ya había aparecido explícitamente en H_{int}. Dicho a la inversa, al final de cuentas resulta que es posible NO incluir la energía de Coulomb $H_{Coul}(t)$ en $H_{int}(t)$, y SÍ en el propagador, lo cual equivale a reemplazar

$$M^{\mu\nu}_{FC}(x'-x) \longrightarrow \boxed{M^{\mu\nu}_{F}(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x'-x)} \underbrace{\left(\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}\right)}_{\equiv \tilde{M}^{\mu\nu}_F(p)}} .$$

Así que, al final de este tortuoso camino, a nivel de predicciones físicas recuperamos la covariancia bajo Lorentz, que como hemos visto, en pasos intermedios está muy escondida al trabajar en la norma de Coulomb — o en cualquier otra norma que elimine toda la redundancia.

L31: 24/10/22

Claramente nos conviene tener un método alternativo para cuantizar que sí sea manifiestamente covariante. Sabemos de antemano que el precio que tendremos que pagar es que en nuestra descripción cuántica habrá elementos redundantes, no físicos.

Lo que querríamos hacer por este camino es eliminar tanto de la redundancia como nos es posible sin perder la covariancia, imponiendo la condición

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu(x) = 0}$$ Norma de Lorentz (o de Lorenz)

Esta se puede pensar como una generalización covariante de la condición de norma de Coulomb, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ (aunque a diferencia de esta, NO tiene la forma de una "norma canónica", puesto que al involucrar a $\dot{A}^0$, no establece una relación entre las variables del espacio fase A_μ, π^μ).

Dado un $A_\mu(x)$ arbitrario, la transformación de norma

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad \text{con} \quad \partial^2\theta(x) = \partial_\mu A^\mu(x)$$

nos permite satisfacer la condición de Lorentz $\partial_\mu A'^\mu = 0$.

La solución siempre existe, pero NO es única: dado un $A_\mu(x)$ en la norma de Lorentz, tenemos todavía la libertad de realizar transformaciones de norma con $\theta(x)$ tal que $\partial^2\theta(x)=0$, es decir, con $\theta(x)$ cualquier combinación lineal de $e^{ip\cdot x}$ y $e^{-ip\cdot x}$ con $p^0=|\vec{p}|$.

Esto nos indica que aun después de imponer la norma de Lorentz (1 sola condición), todavía habrá redundancia.

Aprovechando que la condición de Lorentz es escalar, podemos incorporarla directamente a nivel de la acción, modificando la acción con la adición de un término "fijador de norma" ("gauge-fixing term"),

$$S_M \longrightarrow S_{M,L} \equiv -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int d^4x\, \mathcal{J}\,(\partial_\mu A^\mu)^2$$

deseada ← independiente de x^μ ←

$\mathcal{J}$ aquí es un multiplicador de Lagrange: su ec. de mov. no restringe a $\mathcal{J}$, sino que impone precisamente la condición deseada $\partial\cdot A(x)=0\ \forall\, x$. Claramente S_M y $S_{M,L}$ serán (al menos clásicamente) equivalentes siempre y cuando el campo de norma satisfaga la condición de Lorentz.

Pero es importante notar que a diferencia de $\mathcal{L}_M$, $\mathcal{L}_{M,L}$ sí incluye a $\dot{A}^0$, de manera que los momentos canónicos que se calculan a partir de $\mathcal{L}_{M,L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathcal{J}\,(\partial_0 A^0+\vec{\nabla}\cdot\vec{A})^2$,

$$\Pi^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{M,L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu} - \mathcal{J}\,\delta_0^\mu\,\partial\cdot A = \begin{cases} -\mathcal{J}\,\partial\cdot A & \text{para } \mu=0 \\ E^i & \text{para } \mu=i \end{cases},$$

No están constreñidos mientras no impongamos $\partial\cdot A=0$.

Cambiando de estrategia, podemos entonces primero cuantizar y después imponer (de alguna manera) la condición de Lorentz. Es decir, cambiaremos temporalmente a una teoría con más grados de libertad, y veremos cómo reducir a nivel cuántico.

La ec. de mov. es ahora $\mathcal{L}_{M,L} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \zeta (\partial_\mu A^\mu)^2$

$$\frac{\delta S_{M,L}}{\delta A_\mu(x)} = \partial_\nu \underbrace{F^{\nu\mu}(x)}_{\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu} + \zeta \partial^\mu (\partial \cdot A(x))$$

Ya NO lo consideramos como multiplicador de Lagrange (no imponemos su ec. de mov.), sino que le damos un valor fijo.

$$= \partial^2 A^\mu - (1-\zeta) \partial^\mu (\partial \cdot A)$$

$$= \underbrace{\left(\delta^\mu_\nu \partial^2 - (1-\zeta) \partial^\mu \partial_\nu \right)}_{\equiv \Delta^\zeta_x} A^\nu = 0 ,$$

que por supuesto se reduce a la ec. de Maxwell si $\zeta = 0$, y a la ec. de Maxwell $\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} = 0$ en la norma de Lorentz si $\partial \cdot A = 0$. Pero para $\zeta \neq 0$, el operador diferencial Δ^ζ_x sí es invertible: no hay ya ambigüedad en las soluciones.

De aquí en adelante, las expresiones que obtengamos en pasos intermedios contendrán al "parámetro fijador de norma" ζ, pero por supuesto los resultados físicos NO pueden depender (después de imponer $\partial \cdot A = 0$) de nuestra elección del valor de ζ. La libertad que

tenemos para escoger ξ está relacionada con la redundancia remanente. Por simplicidad, fijaremos aquí $\boxed{\xi = 1}$, conocida como la "norma de Feynman", donde la ec. de mov. se reduce a la ec. de ondas, $\partial^2 A^\mu = 0$.
(Otra elección común es la "norma de Landau" $\xi \to \infty$.)
Tenemos entonces los momentos canónicos (p. 356)

$$\begin{cases} \Pi^0 = -\partial\cdot A = -\dot{A}^0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{A} & \leftarrow -\xi\,\partial\cdot A \\ \vec{\Pi} = \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} A^0 \end{cases},$$

y, por no tener de entrada ninguna constricción, podemos cuantizar simplemente promoviendo

$$A_\mu(x),\ \Pi^\mu(x) \longrightarrow \hat{A}_\mu(x),\ \hat{\Pi}^\mu(x)$$

e imponiendo las relaciones de conmutación habituales

$$\boxed{\begin{aligned} &[\hat{A}_\mu(t,\vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t,\vec{x}\,')] = i\,\delta_\mu^\nu\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,'), \\ &[\hat{A}_\mu(t,\vec{x}), \hat{A}_\nu(t,\vec{x}\,')] = 0 = [\hat{\Pi}^\mu(t,\vec{x}), \hat{\Pi}^\nu(t,\vec{x}\,')] \end{aligned}}\ .$$

Dado que $\hat{\Pi}^0 = -\dot{\hat{A}}^0 - \partial_i \hat{A}^i$, $\hat{\Pi}^i = -\dot{\hat{A}}^i + \partial_i \hat{A}^0$, estas relaciones de conmutación implican juntas que

δ_μ^ν con índice μ subido

$$\boxed{[\hat{A}^\mu(t,\vec{x}), \dot{\hat{A}}^\nu(t,\vec{x}')] = -i\eta^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')}.$$

Vemos aquí que cada componente espacial $\hat{A}^i(\vec{x},t)$ satisface exactamente las mismas relaciones de conmutación que el campo de Klein-Gordon real $\left([\hat{\varphi}(t,\vec{x}), \dot{\hat{\varphi}}(t,\vec{x}')] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\right)$, pero las de $\hat{A}^0(\vec{x},t)$ tienen el signo opuesto.

Podemos desarrollar al operador de campo en términos de un conjunto completo de soluciones a la ec. de mov. $\partial^2\hat{A}^\mu=0$ (sin restricciones adicionales),

$$\boxed{\hat{A}^\mu(x) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(e^{-ip\cdot x}\hat{a}_{p\lambda}\varepsilon^\mu_{p\lambda} + e^{ip\cdot x}\hat{a}^\dagger_{p\lambda}\varepsilon^{\mu *}_{p\lambda}\right)\Bigg|_{p^0=E_p\equiv|\vec{p}|}}$$

donde ahora necesitamos que los vectores de polarización $\varepsilon^\mu_{p\lambda}$ formen un conjunto completo de cuadrivectores, así que podemos tomar $\varepsilon^\mu_{p\lambda} \equiv L(p)^\mu{}_\nu\,\varepsilon^\nu_{p_R\lambda}$ con $p_R^\mu\equiv(1,0,0,1)$, $\lambda=0,1,2,3$,

$$\varepsilon^\mu_{p_R 0} \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon^\mu_{p_R 1} \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon^\mu_{p_R 2} \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon^\mu_{p_R 3} \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

polarización transversal lineal

o si preferimos, $\lambda = 0, +1, -1, 3$ con

$$\varepsilon^{\mu}_{p_R 0} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{\mu}_{p_R +1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{\mu}_{p_R -1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{\mu}_{p_R 3} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Polarización "temporal" o "escalar" (bajo rotaciones)

Polarización transversal circular (derecha e izquierda, resp.)

Polarización longitudinal

Estos vectores son ortonormales,

$$\varepsilon_{p_R \lambda} \cdot \varepsilon^{*}_{p_R \lambda'} = \varepsilon^{\mu}_{p_R \lambda} \varepsilon^{\nu *}_{p_R \lambda'} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\lambda\lambda'}$$

← Notar que ahora λ es un índice vectorial

$$\overset{\underset{\sim}{L}(p)}{\Longrightarrow} \boxed{\varepsilon_{p\lambda} \cdot \varepsilon^{*}_{p\lambda'} = \eta_{\lambda\lambda'}},$$

y satisfacen la relación de completez

$$\eta^{\lambda\lambda'} \varepsilon^{\mu}_{p_R \lambda} \varepsilon^{\nu *}_{p_R \lambda'} = \eta^{\mu\nu} \overset{\underset{\sim}{L}(p)}{\Longrightarrow} \boxed{\eta^{\lambda\lambda'} \varepsilon^{\mu}_{p\lambda} \varepsilon^{\nu *}_{p\lambda'} = \eta^{\mu\nu}}.$$

Podemos notar además que

$$p_R \cdot \varepsilon_{p_R \lambda} = 0 \Longrightarrow p \cdot \varepsilon_{p\lambda} = 0 \quad \text{para } \lambda = 1,2 \ (\text{ó } +1, -1),$$

$$p_R \cdot \varepsilon_{p_R 0} = 1 = -p_R \cdot \varepsilon_{p_R 3} \Longrightarrow p \cdot \varepsilon_{p0} = 1 = -p \cdot \varepsilon_{p3}.$$