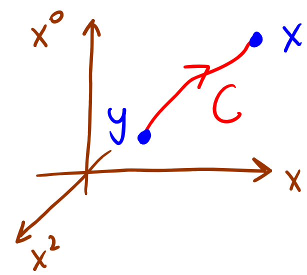
Físicamente, $W_C(x,y)$ representa la fase $\exp[i S_{int}]$ acumulada por una carga puntual q que sigue la trayectoria C: sabemos de electro que la corriente asociada sería

$$J^\mu(x) = q\int_0^1 \underbrace{d\tau\, \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)}_{\text{invariante bajo } \tau\to\underline{\tau}(\tau)}\,\delta^{(4)}(x-x(\tau))$$



(si tomamos $\tau = x^0 \equiv t$, esto es

$$J^0(x) = q\int d\tau\, \cancel{\frac{dx^0}{d\tau}}^{\,1}\, \delta(x^0-x^0(\tau))\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(\tau))$$

$$= q\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t)),$$ densidad de carga para partícula puntual ✓

$$\vec{J}(x) = q\int d\tau\, \frac{d\vec{x}}{dx^0}\,\delta(x^0-x^0(\tau))\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(\tau))$$

$$= q\vec{v}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t))$$ densidad de corriente para partícula puntual ✓),

y la interacción de esta corriente con el cuadripotencial eléctrico $A_\mu(x)$ estaría por tanto dada por (p.311)

$$S_{int} = -\int d^4x\, A_\mu(x) J^\mu(x)$$

$$= -q\int_0^1 d\tau\, \dot{x}^\mu(\tau) \int d^4x\, \delta^{(4)}(x-x(\tau))\,A_\mu(x)$$

$$= -q\int_0^1 d\tau\, \dot{x}^\mu(\tau)\, A_\mu(x(\tau)),$$

lunes, 05 de noviembre de 2007 10:16 a.m.

así que en verdad $\exp[iS_{int}] = W_C(x,y)$. (Esta es precisamente la fase que aparece en el efecto Bohm-Aharonov.)

Regresando a la discusión principal, podemos ver que, en términos del campo vectorial (o 'conexión') $A_\mu(x)$, nuestra nueva definición de derivada es

$$D_\mu \varphi_\ell(x) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big[\underbrace{W(x^\nu, x^\nu+\epsilon\delta^\nu_\mu)}_{1+\epsilon\delta^\nu_\mu iqA_\nu(x)+\mathcal{O}(\epsilon^2)}\varphi_\ell(x^\nu+\epsilon\delta^\nu_\mu) - \varphi_\ell(x^\nu)\Big]$$

p.315

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[\varphi_\ell(x^\nu+\epsilon\delta^\nu_\mu) - \varphi_\ell(x^\nu) + \epsilon iqA_\mu(x)\varphi_\ell(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\Big],$$

es decir,

$$\boxed{D_\mu \varphi_\ell(x) \equiv \partial_\mu \varphi_\ell(x) + iqA_\mu(x)\varphi_\ell(x)}$$

Derivada Covariante.

Podemos verificar explícitamente que

$$D_\mu\varphi_\ell(x) \longrightarrow [D_\mu\varphi_\ell(x)]' = (\partial_\mu + iqA'_\mu(x))\varphi'_\ell(x)$$

$$= \partial_\mu(e^{iq\theta}\varphi_\ell) + iq(A_\mu - \partial_\mu\theta)e^{iq\theta}\varphi_\ell$$

$$= \cancel{iq\partial_\mu\theta e^{iq\theta}}\varphi_\ell + e^{iq\theta}\partial_\mu\varphi_\ell + e^{iq\theta}iqA_\mu\varphi_\ell - \cancel{iq\partial_\mu\theta e^{iq\theta}}\varphi_\ell$$

$$= e^{iq\theta}(\partial_\mu + iqA_\mu)\varphi_\ell = e^{iq\theta}D_\mu\varphi_\ell(x) \quad ✓$$

Habiendo aprendido esto, podemos concluir entonces que para promover a $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \varphi_l^*(x), \partial_\mu\varphi(x), \partial_\mu\varphi_l^*(x))$ a una teoría con la invariancia local

$\varphi_l(x) \longrightarrow \varphi_l'(x) = e^{iq\theta(x)}\varphi_l(x)$, basta con:

1) Inventar un campo de norma, es decir, un campo vectorial $A_\mu(x)$ que transforme de acuerdo con

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu'(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad ;$$

2) Reemplazar a las derivadas ordinarias $\partial_\mu\varphi_l(x)$ con las derivadas covariantes $D_\mu\varphi_l(x) \equiv (\partial_\mu + iqA_\mu(x))\varphi_l(x)$, obteniendo entonces $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \varphi_l^*(x), D_\mu\varphi_l(x), [D_\mu\varphi_l(x)]^*)$.

Este procedimiento induce un cierto acoplamiento entre $\varphi_l(x)$ y $A_\mu(x)$, que se conoce como acoplamiento mínimo.

P.ej., a partir del Lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L}_D(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x),$$

sabemos de inmediato que

$$\mathcal{L}_D(\psi(x), D_\mu\psi(x)) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \overset{\partial_\mu + iqA_\mu}{D_\mu} - m)\psi(x)$$

$$= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m)\psi(x)$$

posee la invariancia local $U(1)$

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\theta(x)}\psi(x) \,, \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x),$$

y contiene el término de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = -q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) = -J^\mu(x)A_\mu(x),$$

que tiene justo la forma esperada para calificar el acoplamiento entre la corriente $J^\mu(x)$ y el potencial electromagnético $A_\mu(x)$.

Si deseamos considerar a $A_\mu(x)$ como un nuevo campo dinámico en la teoría, entonces debemos agregar un término cinético para él (pues de otra manera su ec. de mov. sería simplemente $\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x) = 0$).

Nos hace falta entonces una combinación de las derivadas $\partial_\mu A_\nu(x)$ que sea invariante de norma. Podemos deducirla observando que bajo una transformación de norma tenemos

L26: 08/10/18

$$\varphi_\ell(x) \to \varphi'_\ell(x) \equiv e^{iq\theta(x)}\varphi_\ell(x)\,, \quad D_\mu\varphi_\ell(x) \to e^{iq\theta(x)} D_\mu\varphi_\ell(x)\,,$$

y por tanto la combinación

$$\underbrace{[D_\mu,D_\nu]}\varphi_\ell(x) \longrightarrow \cancel{e^{iq\theta(x)}}\,\overbrace{[D_\mu,D_\nu]\varphi_\ell(x)}^{\cancel{e^{-iq\theta(x)}}\varphi'_\ell(x)}\,,$$

es invariante de norma.

Esta combinación NO es ya un operador diferencial:

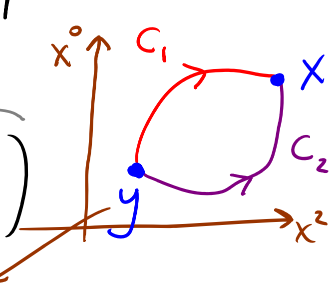
$$\begin{aligned}
[D_\mu,D_\nu]\varphi_\ell &= (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu)\varphi_\ell - \mu\leftrightarrow\nu \\
&= \cancel{\partial_\mu\partial_\nu\varphi_\ell} - \cancel{q^2A_\mu A_\nu\varphi_\ell} + \cancel{iqA_\mu\partial_\nu\varphi_\ell} + iq\underbrace{\partial_\mu(A_\nu\varphi_\ell)}_{\varphi_\ell\partial_\mu A_\nu + \cancel{A_\nu\partial_\mu\varphi_\ell}} \\
&\quad - \cancel{\partial_\nu\partial_\mu\varphi_\ell} + \cancel{q^2A_\nu A_\mu\varphi_\ell} - \cancel{iqA_\nu\partial_\mu\varphi_\ell} - iq\underbrace{\partial_\nu(A_\mu\varphi_\ell)}_{\varphi_\ell\partial_\nu A_\mu + \cancel{A_\mu\partial_\nu\varphi_\ell}} \\
&= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\varphi_\ell\,,
\end{aligned}$$

Definimos entonces la intensidad de campo (o 'curvatura')

$$\boxed{F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{iq}[D_\mu,D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}\;.$$

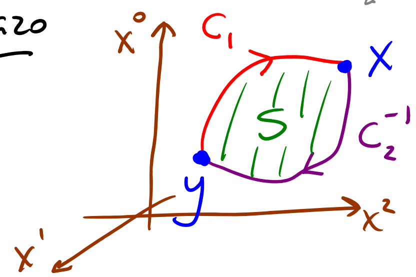
Este resulta ser el objeto que determina la manera en que las líneas de Wilson $W_C(x,y)$ dependen de la trayectoria C:

$$\frac{W_{C_1}(x,y)}{W_{C_2}(x,y)} = \overbrace{\exp\left(-iq\int_{C_1} dx^\mu A_\mu\right)\exp\left(iq\int_{C_2} dx^\mu A_\mu\right)}^{\exp\left[-iq\left(\int_{C_1}-\int_{C_2}\right)dx^\mu A_\mu\right]}$$



$$\int_{C_1} - \int_{C_2} = \oint_{C_2^{-1}\circ C_1}$$

que se puede reescribir como el lazo



$$\frac{W_{C_1}(x,y)}{W_{C_2}(x,y)} = \exp\left(-iq \oint_{C_2^{-1}\circ C_1} dx^\mu A_\mu\right)$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \exp\left(iq \int_S \underbrace{d\sigma^{\mu\nu}}_{dx^\mu dx^\nu} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}\right)$$

$\neq 1$ en general si $F_{\mu\nu} \neq 0$.

Con $F_{\mu\nu}$ a la mano, podemos construir el término cinético invariante de norma $\boxed{\mathcal{L}_M(\partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$. Agregando este término a la acción original, A_μ tiene como ec. de mov. las 2 ecs. de Maxwell inhomogéneas: $\frac{\delta S}{\delta A_\nu(x)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu = 0$.

A partir de la definición de $F_{\mu\nu}$, podemos notar además que la identidad de Jacobi para los conmutadores,

$$0 = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}[D_\nu, [D_\lambda, D_\rho]]$$

$$= iq\,[D_\nu, \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}}_{\equiv 2\tilde{F}^{\mu\nu}}]$$

Intensidad de Campo Dual

$(\vec{E} \to \vec{B},\ \vec{B} \to -\vec{E})$

p.ej. $\tilde{F}^{01} = F_{23}$

o lo que es lo mismo,

$$0 = iqZ\left([\partial_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] + iq\cancel{[A_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}]}^{\,0}\right),$$

que usando $[\partial_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}]\varphi_\ell \equiv \partial_\nu(\tilde{F}^{\mu\nu}\varphi_\ell) - \tilde{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi_\ell = \partial_\nu\tilde{F}^{\mu\nu}\varphi_\ell$, implica

$$\boxed{\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0} \qquad \text{identidad de Bianchi} \,.$$

Esta ecuación es por supuesto obvia si se le escribe en la forma $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu(\partial_\lambda A_\rho) = 0$.

Como verificamos en la Tarea 3, esta es la expresión que codifica las otras 2 ecs. de Maxwell.

(Por la relación entre $F^{\mu\nu}$ y $\tilde{F}^{\mu\nu}$, aprendemos entonces que $\partial_\nu\tilde{F}^{\mu\nu} \neq 0$ implicaría una fuente magnética $\tilde{J}^\mu$.)

Podemos notar por último que NO es posible agregar a la acción un término de masa $m^2 A_\mu A^\mu$, porque no es invariante de norma.

($F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ es invariante de norma, pero es una derivada total,

$$\tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \propto \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu(A_\nu\partial_\lambda A_\rho),$$

y por tanto no cambia las ecs. de mov. La opción restante es

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\underbrace{\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}_{2(\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\rho - \delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\lambda)} F^{\lambda\rho}F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,.)$$

En resumen, hemos visto que el deseo aparentemente ocioso de promover una simetría $U(1)$ global a una versión local ($\equiv$ "normar" $U(1)$) ¡¡ nos lleva a predecir la existencia y las propiedades correctas del potencial electromagnético $A_\mu(x)$!!

↑ verbo (en inglés: gauge) tmb "calibrar"

En nuestro primer acercamiento al tema de invariancia de norma, habíamos visto que la existencia de los fotones (partículas no masivas con espín 1) acaba implicando que nuestra descripción de los campos $\varphi_\ell(x)$ asociados a partículas cargadas es invariante bajo la transformación local $\varphi_\ell(x) \to e^{iq\theta(x)}\varphi_\ell(x)$.

Ahora hemos aprendido que es posible invertir esta lógica por completo, y afirmar, si así lo queremos, ¡que los fotones existen como consecuencia de esta invariancia local $U(1)$!

Aunque en este semestre no profundizaremos en ello, es interesante desde el punto de vista teórico —y útil para describir el mundo real— señalar que es posible generalizar toda esta discusión al caso donde el grupo de simetría interna es no abeliano.

En ese caso, comenzamos con una teoría invariante bajo la transformación interna global

$$\varphi_{lI}(x) \longrightarrow \varphi'_{lI'}(x) = M_{I'I}(\theta^\alpha)\varphi_{lI}(x)$$

suma sobre $I=1,\dots,N$ implícita

índice interno $I=1,2,\dots,N$

$$= \left[\exp(i\theta^\alpha T_\alpha)\right]_{I'I}\varphi_{lI}(x),$$

convencional NO factorizar $g\theta$

donde las matrices M constituyen una rep irreducible R (N-dimensional) del grupo de Lie G, y las matrices

frecuentemente irrep fundamental

T_α $(\alpha=1,\dots,\dim G)$ son los generadores correspondientes, que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_\alpha, T_\beta] = i f_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} T_\gamma .$$

constantes de estructura

L29: 14/10/22

Para agrandar la simetría a la versión local

$$\varphi_I(x) \longrightarrow \varphi'_{I'}(x) = \left[\exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha)\right]_{I'I}\varphi_I(x),$$

esconder posible índice de Lorentz

necesitamos postular la existencia de un campo de norma matricial $[A_\mu(x)]_{I'I}$ que toma valores en el álgebra de Lie g, o lo que es lo mismo, la existencia de dim G campos vectoriales ordinarios,

$$[A_\mu(x)]_{I'I} \equiv A_\mu^\alpha(x)[T_\alpha]_{I'I}\,, \qquad I, I' = 1, \ldots, N \qquad \alpha = 1, \ldots, \dim G$$

Notar que podemos reescribir el mismo $A_\mu(x)$ en distintas irreps usando los generadores correspondientes

que transforme(n) de acuerdo con

$$\boxed{A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha)\left(A_\mu(x) - \frac{i}{g}\mathbb{1}\partial_\mu\right)\exp(-i\theta^\beta(x)T_\beta)}$$

análogo a q

(que en el caso U(1) se reduce correctamente a

$$A'_\mu(x) = e^{i\theta(x)}\left(A_\mu(x) - \frac{i}{q}\partial_\mu\right)e^{-i\theta(x)} = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x)\,)\,,$$

llamamos $q\theta$ antes

y reemplazar las derivadas ordinarias por la derivada covariante

usamos A_μ en irrep apropiada según $\varphi(x)$

$$\boxed{D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu(x)}\,,$$

notar que $A'_\mu = \frac{1}{ig} M(\theta(x))\, D_\mu\, M^{-1}(\theta(x))$

$\mathbb{1}$ implícita, es decir, $\delta_{I'I}$

que por construcción es tal que

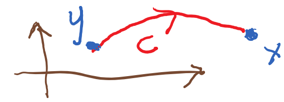
$$[D_\mu\varphi(x)]_I \longrightarrow [D'_\mu\varphi'(x)]_{I'} = \exp(i\theta^\alpha(x)T_\alpha)_{I'I}[D_\mu\varphi(x)]_I\,.$$

La línea o el lazo de Wilson se define como

$$W_c \equiv P\left\{\exp\left[-i\int_c dx^\mu A_\mu(x)\right]\right\} = P\left\{\exp\left[-i\int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}A_\mu(x(\tau))\right]\right\}$$

matriz

orden de camino ("path ordering"): orden temporal con respecto a τ



y transforma de acuerdo con

$$W_C(x,y) \longrightarrow M(\theta(x))\, W_C(\underset{x=x(\tau=0)}{x},\underset{y=x(\tau=1)}{y})\, M^{-1}(\theta(y)),$$

así que para un lazo, $\mathrm{Tr}[W_C]$ es invariante.

A partir del potencial $A_\mu(x)$, la intensidad de campo se define nuevamente como

$$\boxed{F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \underbrace{ig[A_\mu, A_\nu]}_{\neq 0 \text{ en general}}}$$

y se puede expresar por tanto como

$$\underset{\text{1 tensor matricial}}{F_{\mu\nu}(x)} = \underset{\text{dim } G \text{ tensores}}{F^\alpha_{\mu\nu}(x)}\, T_\alpha \,,$$

donde

$$F^\alpha_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu - g f^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu \,.$$

A partir de

$$\underset{\text{esconder índice } I}{[D_\mu, D_\nu]\varphi(x)} \longrightarrow \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha)[D_\mu, D_\nu]\underbrace{\varphi(x)}_{\exp(-i\theta^\beta(x)T_\beta)\varphi'(x)}$$

podemos ver que en el caso no abeliano $F_{\mu\nu}(x)$ NO es invariante de norma, sino que transforma de acuerdo con

$$\boxed{F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(i\theta^\alpha(x) T_\alpha)\, F_{\mu\nu}(x) \exp(-i\theta^\beta(x) T_\beta)} \,.$$

En este caso, entonces, para darle dinámica al campo de norma $A_\mu(x)$ NO podemos simplemente agregar a la densidad lagrangiana el término $F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$, porque, si bien es invariante de Lorentz, bajo una transformación de norma

$$F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \longrightarrow \exp\left(i\theta^\alpha(x)T_\alpha\right)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\exp\left(-i\theta^\beta(x)T_\beta\right),$$

y además, ¡ $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es una matriz $N\times N$!

Pero podemos resolver fácil y simultaneamente ambos problemas notando que, por la ciclicidad de la traza,

$$\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\dim G} F^\alpha_{\mu\nu}F^\alpha_{\mu\nu} \quad \text{sí es invariante.}$$

en rep fundamental, $\mathrm{Tr}(T_\alpha T_\beta) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$

Obtenemos entonces el lagrangiano de Yang-Mills(-Shaw)

$$\boxed{\mathcal{L}_{YM}\left(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big[\underbrace{F_{\mu\nu}(x)}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]}F^{\mu\nu}(x)\Big].}$$

por invariancia de norma, NO es posible agregar un término de masa

Es importante tener presente que, a pesar de ser la generalización natural del lagrangiano de Maxwell, $\mathcal{L}_{YM}$ contiene términos cúbicos y cuárticos, y NO es por tanto una teoría libre: a diferencia de los fotones, las partículas asociadas al campo de Yang-Mills $A_\mu(x)$ interactúan entre sí. Como hemos visto, ¡esto es consecuencia directa de la existencia de la invariancia local NO abeliana!

El Lagrangiano completo de la teoría con la invariancia local

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{i\theta^\alpha(x)T_\alpha}\varphi(x), \quad A_\mu(x) \to e^{i\theta^\alpha(x)T_\alpha}\frac{1}{ig}D_\mu e^{-i\theta^\beta(x)T_\beta}$$

es

$$\mathcal{L}_{loc}(\varphi, \partial_\mu\varphi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}_{glob}(\varphi, D_\mu\varphi) + \mathcal{L}_{YM}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu).$$

En particular, si $\psi(x)$ es un campo de Dirac, tenemos

$$\boxed{\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]}$$

que en el caso donde el grupo de Lie es $G = SU(3)$ define la teoría conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD).

El campo $\psi_I(x)$ describe en ese caso a un ('sabor' específico de) quark, y $A^\mu_{I'I}(x)$ está asociado a los $\dim G = 3^2 - 1 = 8$ distintos tipos de gluones, portadores de la fuerza fuerte.

$I = 1, 2, 3$ "color"

← ocultos por "confinamiento"

La teoría electrodébil, que es el componente restante del Modelo Estándar, está basada en el grupo de simetría local $G = SU(2)\times U(1)$. En ese caso, el campo $\psi_{I=1,2}(x)$ describiría a un (doblete específico de) quark o leptón "isoespín débil" y $A^{\mu}_{I\bar{I}}(x)$ da lugar a $\dim G = (2^2-1)+1 = 4$ bosones de norma: W^+, W^-, Z^0 ← adquieren masa por "mecanismo de Higgs" y el fotón γ. (El factor de $SU(2)$ se acopla solo a la parte izquierda $\psi_I \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1}-\gamma^5)\psi$.)
izquierdo, NO índice $I=1,2$

Regresemos ahora al caso abeliano $G=U(1)$. Habiendo entendido ya al derecho y al revés la relación entre el campo $A_\mu(x)$ y la invariancia de norma, estamos listos para estudiar la cuantización canónica de $A_\mu(x)$. Sabemos que la parte del Lagrangiano que depende del campo de norma es

si interacción es lineal en A

$$\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}\underbrace{F_{\lambda\rho}}_{\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda} F^{\lambda\rho} - A_\lambda J^\lambda$$

apagamos si queremos discutir el caso libre

y por tanto los momentos canónicos son

$$\Pi^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = -F^{0\mu} = \begin{cases} 0 & \text{para } \mu=0 \\ E^i & \text{para } \mu=i \end{cases}$$

← constricción

El hecho de que $\mathcal{L}$ no depende de $\partial_0 A_0(x)$ implica además que la ec. de mov. para $A_0(x)$ toma la forma

$$-\frac{\delta S}{\delta A_0(x)} = \partial_0\left(\cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)}}\right) + \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i A_0)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{-\partial_i F^{i0}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}} + J^0 = 0 \qquad \text{Ley de Gauss},$$

o lo que es lo mismo, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} - J^0 = 0$, que constituye una segunda constricción Hamiltoniana.

Así que, como en el caso del campo de Dirac, tenemos aquí 2 constricciones, que codifican el hecho de que NO todas las variables en el espacio fase $A_\mu(x)$, $\Pi^\mu(x)$ son independientes. Pero las constricciones aquí,

$$\chi_1 \equiv \Pi^0(t,\vec{x}) = 0\,, \qquad \chi_2 \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}(t,\vec{x}) - J^0(t,\vec{x}) = 0\,,$$

resultan ser cualitativamente diferentes (son constricciones "de primera clase", $\{\chi_1(t,\vec{x}), \chi_2(t,\vec{x}')\}_{P} = 0$), y de hecho están estrechamente relacionadas con la invariancia de norma: usando los paréntesis de Poisson básicos

$$\{A_\mu(t,\vec{x}), \Pi^0(t,\vec{x}')\}_{\mathbb{P}} = \delta^0_\mu\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$\{A_\mu(t,\vec{x}), \Pi^i(t,\vec{x}')\}_{\mathbb{P}} = \delta^i_\mu\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\Longrightarrow \{A_\mu(t,\vec{x}), \vec{\nabla}'\cdot\vec{\Pi}(t,\vec{x}')\}_{\mathbb{P}} = \delta^i_\mu\, \partial'_i \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

podemos verificar que cada constricción genera una transformación de norma, en el sentido de que

$$A'_i(t,\vec{x}) \equiv A_i(t,\vec{x}) - \partial_i \theta(t,\vec{x})$$

$$= A_i(t,\vec{x}) + \int d^3x'\, \theta(t,\vec{x}')\,\partial'_i \delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})$$

$$= A_i(t,\vec{x}) + \int d^3x'\, \theta(t,\vec{x}')\, \{A_i(t,\vec{x}), \underbrace{\vec{\nabla}'\cdot\vec{\Pi}(t,\vec{x}')}_{\chi_2(t,\vec{x}') + J^0(t,\vec{x}')}\}_{\mathbb{P}}$$

$$= A_i(t,\vec{x}) - \int d^3x'\, \theta(t,\vec{x}')\, \{\chi_2(t,\vec{x}'), A_i(t,\vec{x})\}_{\mathbb{P}},$$

y de manera similar,

$$A'_0(t,\vec{x}) \equiv A_0(t,\vec{x}) - \partial_0\theta(t,\vec{x}) = A_0(t,\vec{x}) - \int d^3x'\, \dot{\theta}(t,\vec{x}')\,\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})$$

$$= A_0(t,\vec{x}) - \int d^3x'\, \partial_0\theta(t,\vec{x}')\, \{A_0(t,\vec{x}), \underbrace{\Pi^0(t,\vec{x}')}_{\chi_1(t,\vec{x}')}\}_{\mathbb{P}}$$

$$= A_0(t,\vec{x}) + \int d^3x'\, \partial_0\theta(t,\vec{x}')\, \{\chi_1(t,\vec{x}'), A_0(t,\vec{x})\}_{\mathbb{P}}.$$

En resumen,

$$A_i'(t,\vec{x}) = A_i(t,\vec{x}) - \int d^3x'\, \theta(t,\vec{x}')\, \{\chi_2(t,\vec{x}'), A_i(t,\vec{x})\}_{\mathbb{P}} \,,$$

$$A_0'(t,\vec{x}) = A_0(t,\vec{x}) + \int d^3x'\, \partial_0\theta(t,\vec{x}')\, \{\chi_1(t,\vec{x}'), A_0(t,\vec{x})\}_{\mathbb{P}} \,.$$

Es importante notar aquí que, cuando nos concentramos en cantidades a tiempo constante, como lo hacemos en el formalismo Hamiltoniano, los parámetros de transformación que aparecen arriba, $\theta(t,\vec{x}')$ (ó $\partial_i'\theta(t,\vec{x}')$) y $\partial_0\theta(t,\vec{x}')$, son funciones independientes, así que en verdad nuestro sistema tiene 2 invariancias locales, una por cada constricción Hamiltoniana ("de primera clase" — este es de hecho un resultado general). Esto es justamente una manifestación de la redundancia que descubrimos desde el principio de este capítulo: de las 4 componentes del campo vectorial $A_\mu(x)$, solamente $2=4-2$ corresponden a grados de libertad físicos, que al cuantizar — como haremos en breve — estarán asociados a los estados de helicidad derecha e izquierda $(\lambda=\pm1)$ de los fotones (partículas no masivas con espín 1).

127: 12/10/18

Desde la perspectiva Lagrangiana, el síntoma de que tenemos 2 constricciones es que el Lagrangiano es "singular" (o "irregular"),

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu \partial \dot{A}_\nu}\right) = 0 \quad \left(\longleftrightarrow \text{ no podemos despejar } \dot{A}_\mu \text{ en términos de } \pi^\mu\right),$$

debido a que la matriz $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu \partial \dot{A}_\nu}$ tiene 2 eigenvectores con eigenvalor cero. Y el síntoma de que tenemos invariancia de norma ($\longleftrightarrow$ al menos alguna de las constricciones es "de primera clase"), es que la ec. de mov. de A_μ junto con las condiciones iniciales $A_\mu(t_0, \vec{x})$, $\dot{A}_\mu(t_0, \vec{x})$ NO determinan la solución $A_\mu(t, \vec{x})$ de manera única:

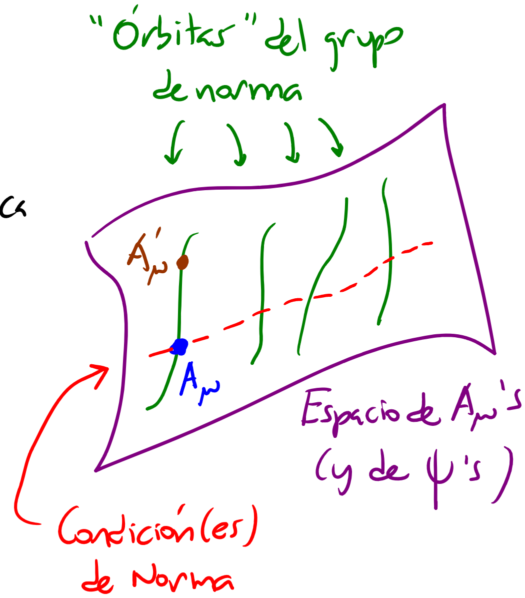
$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \underbrace{\left(\delta_\nu^\rho \partial^2 - \partial^\rho \partial_\nu\right)}A_\rho = J_\nu$$

Operador diferencial NO invertible, por culpa del autovector $\partial_\rho \theta(x)$, que tiene autovalor cero,

$(\delta_\nu^\rho \partial^2 - \partial^\rho \partial_\nu)\partial_\rho \theta = \partial^2 \partial_\nu \theta - \partial^\rho \partial_\nu \partial_\rho \theta = 0$ (cuya existencia hace entonces imposible encontrar una función de Green $G(x,x')$ tal que $\Delta_x G(x,x') \propto \delta^{(4)}(x-x')$).

Si $A_\rho(x)$ es solución, $A_\rho(x) - \partial_\rho \Theta(x)$ también lo es.

Sabiendo que tenemos las 2 constricciones Hamiltonianas $\Pi^0 = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} - J^0 = 0$, ¿cómo podemos llevar a cabo la cuantización Hamiltoniana? El método de paréntesis de Dirac que nos fue útil en las pp. 263-265 para lidiar con las constricciones ("de segunda clase") que teníamos en el caso del campo de Dirac desafortunadamente NO es implementable aquí (porque la definición de $\{\cdot,\cdot\}_D$ involucraría a $\{\chi_1,\chi_2\}_P^{-1} = 1/0$), así que debemos encontrar algún otro procedimiento. Tanto ψ_a (en $\mathcal{L}_D$) como A_μ (en $\mathcal{L}_M$) tienen de inicio más variables que grados de libertad físicos; pero la diferencia es que la ec. de mov. de ψ_a determina a las variables sobrantes, mientras que la ec. de mov. de A_μ las deja vivas ($\leftrightarrow$ invariancia de norma). Una opción entonces es eliminar por completo esta redundancia y cuantizar solamente los grados de libertad verdaderamente físicos. Es decir, imponemos a mano 2 condiciones adicionales que NO sean invariantes de norma, y especifiquen por tanto de una vez por todas y de manera única el $A_\mu(x)$ que queremos utilizar de entre todas las distintas posibilidades que hubieran estado emparentadas por transformaciones de norma. La figura representa de forma esquemática este procedimiento, que se conoce como "fijar la norma".



Después de este paso, nuestra descripción NO tendrá ya invariancia de norma y no habrá en la teoría resultante constricciones problemáticas (las 2 constricciones originales junto con las 2 condiciones de norma formarán un sistema de 4 constricciones "de segunda clase" — ninguna χ_I 'Poissaniza' con las otras 3).

Existen muchas maneras de fijar la norma; pero como dijimos desde el principio de este capítulo, tristemente ninguna de ellas es covariante bajo Lorentz — este es entonces el precio que tenemos que pagar al seguir este camino.

L26: 03/04/17

Las condiciones de norma más utilizadas son precisamente las que satisfacía el operador de campo que armamos en la