

de una partícula masiva, así que (p.101) para $j \geq 1$ hay claramente una discontinuidad al tomar el límite $m \rightarrow 0$.
 Para ver cómo se manifiesta esto para el caso que nos interesa, $j=1$, recordemos que dentro del enfoque constructivo que adoptamos en la primera parte de este curso, definimos a los estados de 1 partícula no masiva con espín 1,

$$|p, \lambda = \pm 1\rangle \equiv \hat{U}(\underline{L}(p)) |p_R, \pm 1\rangle,$$

$$\uparrow \quad \leftarrow (1, 0, 0, 1)$$

Transformación de Lorentz tal que $p_R \rightarrow p$
 que transforman de acuerdo con (ver p. 96)

$$\begin{aligned} \hat{U}(\underline{\Lambda}) |p, \lambda\rangle &= \hat{U}(\underline{L}(\Lambda p)) \hat{U}(\underline{L}^{-1}(\Lambda p) \underline{\Lambda} \underline{L}(p)) |p_R, \lambda\rangle \\ &\equiv \underline{W}(\underline{\Lambda}, p) \equiv \exp(i\alpha_1 \hat{P}_1 + i\alpha_2 \hat{P}_2) \exp(i\theta \hat{J}^3) \\ &= e^{i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} |\Lambda p, \lambda\rangle \\ &\equiv D^{1\lambda}(\underline{W}(\underline{\Lambda}, p)) \leftarrow \text{matriz } 1 \times 1 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \hat{K}_1 - \hat{J}_2 \\ \hat{K}_2 + \hat{J}_1 \end{matrix}$
 eigenvector de $\hat{J}^3 = \lambda$
 eigenvector de $\hat{P}_1, \hat{P}_2 = 0$

[23: 29/03/17

[27: 10/10/22

Esto implica que los operadores de creación $\hat{a}_{p\lambda}^\dagger$ tales que

$|p\lambda\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger |0\rangle$ transforman de acuerdo con

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \hat{U}^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} e^{i\lambda\theta(\Lambda,p)} \hat{a}_{\Lambda p\lambda}^\dagger.$$

Si empezáramos construyendo un campo vectorial $A^\mu(x)$ sin masa (como, p.ej., el potencial electromagnético), deberíamos llegar a obtener estos operadores de creación y aniquilación. O, a la inversa, usando estos operadores debería ser posible armar un operador de campo $\hat{A}^\mu(x)$ que transforme como un vector bajo Lorentz. Intentemos esto último, restringiéndonos por simplicidad al caso de un campo vectorial real (como el potencial electromagnético).

Proponemos entonces

$$\hat{A}^\mu(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} \varepsilon_{p\lambda}^\mu + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger \varepsilon_{p\lambda}^{\mu*} \right) \Big|_{p^0 = E_p = |\vec{p}|}$$

$\varepsilon^\mu(p, \lambda)$ \rightarrow

vector de polarización (análogo a $u_p^s = u_a(p, s)$)

Bajo una transformación de Lorentz, esto se convierte en

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) \stackrel{p \rightarrow p'}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{2E_p}} \left(e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda} e^{-i\lambda\theta} \epsilon_{p\lambda}^\omega + e^{ip \cdot x} \hat{a}_{p\lambda}^\dagger e^{i\lambda\theta} \epsilon_{p\lambda}^{\omega*} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{p'}}}{\sqrt{2E_{p'}}} \left(e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p'\lambda} e^{-i\lambda\theta} \epsilon_{p'\lambda}^\omega + \text{conjugado hermit.} \right)$$

$\leftarrow \Lambda^{-1} p'$

Pero si $\hat{A}^\omega(x)$ es en verdad un campo vectorial, debemos tener

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\omega{}_\nu \hat{A}^\nu(\Lambda x)$$

$\underbrace{\quad}_{x'}$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left(e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p'\lambda} (\Lambda^{-1})^\omega{}_\nu \epsilon_{p'\lambda}^\nu + \text{c.h.} \right)$$

$\leftarrow \Lambda p$

Iguando estas 2 expresiones, necesitamos entonces que los vectores de polarización satisfagan

$$e^{-i\lambda\theta(\Lambda, p)} \epsilon_{p\lambda}^\omega = (\Lambda^{-1})^\omega{}_\nu \epsilon_{\Lambda p \lambda}^\nu \quad \forall \Lambda, p.$$

Tomando $p \rightarrow p_R = (1, 0, 0, 1)$ y $\Lambda \rightarrow L(p)$, tenemos

$$\hat{W}(\Lambda, p) \equiv \hat{L}^{-1}(\Lambda p) \hat{A} \hat{L}(p) \Rightarrow \hat{W}(L(p), p_R) = \hat{L}^{-1}(p) \hat{A}(p) \hat{L}(p_R)$$

$\underbrace{\quad}_{L(p) p_R}$

así que $\theta(\underline{L}(p), p_R) = 0$ y la condición que obtuvimos en la página anterior implica en particular que

$$\varepsilon_{p_R \lambda}^\omega = (\underline{L}(p))^\omega \varepsilon_{p \lambda}^\nu \iff \boxed{\varepsilon_{p \lambda}^\omega = L(p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu}$$

lo cual parece muy natural. $e^{-i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} \varepsilon_{p \lambda}^\omega = (\underline{\Lambda}^{-1})^\omega \varepsilon_{\underline{\Lambda} p \lambda}^\nu$

Usando esto, la condición general dice que deberíamos tener

$$e^{-i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} L(p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu = (\underline{\Lambda}^{-1})^\omega L(\underline{\Lambda} p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu \quad \forall \underline{\Lambda}, p,$$

o lo que es lo mismo (dado que $\underline{W}(\underline{\Lambda}, p) \equiv \underline{L}^{-1}(\underline{\Lambda} p) \underline{\Lambda} \underline{L}(p)$),

$$\underline{W}(\underline{\Lambda}, p)^\omega \varepsilon_{p_R \lambda}^\nu = e^{i\lambda\theta(\underline{\Lambda}, p)} \varepsilon_{p_R \lambda}^\omega \quad \forall \underline{\Lambda}, p.$$

$$\underbrace{\exp[i\alpha^1(\underline{\Lambda}, p) \underline{P}^1 + i\alpha^2(\underline{\Lambda}, p) \underline{P}^2]}_{\leftarrow P_1, P_2, J^3 \text{ generadores del grupito (pp. 91-2)}} \exp[i\theta(\underline{\Lambda}, p) \underline{J}^3]$$

Si consideramos primero $(\underline{\Lambda}, p)$ tales que $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$,

concluimos de aquí que los $\varepsilon_{p_R \lambda}^\nu$ deben ser eigenvectores de

$$\underline{J}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con eigenvalor } \lambda = \pm 1, \text{ es decir,}$$

$$\boxed{\varepsilon_{p_R + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{p_R - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (\Rightarrow \varepsilon_{p_R \lambda}^* \cdot \varepsilon_{p_R \lambda'} = \delta_{\lambda \lambda'}).$$

Como vimos en la Tarea 2, estos son precisamente los vectores esperados para describir fotones con polarización circular (en el plano x^1-x^2) derecha e izquierda, respectivamente.

Pero habiendo deducido esto, en el caso general donde $\alpha_1(\Lambda, p), \alpha_2(\Lambda, p) \neq 0$ no tendremos ya libertad alguna para satisfacer la condición de covariancia de Lorentz,

$$\exp[i\alpha_1(\Lambda, p)P_1 + i\alpha_2(\Lambda, p)P_2] \exp[i\theta(\Lambda, p)J^3] \epsilon_{p, \lambda}^\nu = e^{i\lambda\theta(\Lambda, p)} \epsilon_{p, \lambda}^\nu,$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{e^{i\lambda\theta(\Lambda, p)} \epsilon_{p, \lambda}^\nu}$

que incluye a la matriz

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha_1 P_1 + i\alpha_2 P_2) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ver pp. 90-91}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & 0 & 0 & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & 0 & 0 & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \cdot 0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y tiene por tanto como miembro izquierdo a

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \end{pmatrix} e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} - e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \pm i\alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pero como miembro derecho solo a $e^{i\lambda\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$. X

¡Así que el campo que hemos construido NO es un vector!

En esencia, el problema es que por ser no masivo, $\hat{A}^\mu(x)$

tiene solo 2 grados de libertad independientes en cada

punto (\leftrightarrow 2 estados de helicidad para la partícula correspondiente),

los cuales no son suficientes para armar un cuadrivector.

Es natural preguntarnos ¿cómo transforma entonces $\hat{A}^\mu(x)$?

La cuenta que hicimos en la página anterior dice que

$$\begin{aligned} \underline{W}(\underline{\Lambda}, p)^\omega_\nu \underline{\epsilon}^\nu_{p, \lambda} &\equiv \left(\underline{L}^{-1}(\underline{\Lambda}, p) \underline{\Lambda} \underline{L}(p) \right)^\omega_\nu \underline{\epsilon}^\nu_{p, \lambda} \\ &= e^{i\lambda\theta} \underline{\epsilon}^\omega_{p, \lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) e^{i\lambda\theta} p^\omega, \end{aligned}$$

funciones de $\underline{\Lambda}$ y p

o, multiplicando por $e^{-i\lambda\theta} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{L}(\underline{\Lambda}, p)$, que

$$e^{-i\lambda\theta} \underline{L}(p)^\omega_\nu \underline{\epsilon}^\nu_{p, \lambda} = \underbrace{(\underline{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu}_{\underline{\epsilon}^\omega_{p, \lambda}} \underbrace{\underline{L}(\underline{\Lambda}, p)^\nu_\rho}_{\underline{\epsilon}^\nu_{\underline{\Lambda} p, \lambda}} \underbrace{\underline{\epsilon}^\rho_{p, \lambda}}_{p^\omega} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) p^\omega.$$

(con $p' \equiv \underline{\Lambda} p$)

Usando esto en la primera ecuación de la p. 303,

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_{p'}}}{\sqrt{2E_{p'}}} \left(e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p', \lambda} e^{-i\lambda\theta} \underline{\epsilon}^\omega_{p, \lambda} + \text{conjugado} \right),$$

hermitiano

vemos que el campo $\hat{A}^\omega(x)$ transforma bajo Lorentz de acuerdo con

$$\begin{aligned} \hat{U}(\underline{\Lambda}) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}) &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left(e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p', \lambda} \underbrace{e^{-i\lambda\theta} \underline{\epsilon}^\omega_{p, \lambda}}_{(\underline{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu \left[\underline{\epsilon}^\nu_{p', \lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) p'^\nu \right]} + \text{c.h.} \right) \\ &= (\underline{\Lambda}^{-1})^\omega_\nu \left[\hat{A}^\nu(x') - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 + i\lambda\alpha_2) p'^\nu e^{-ip' \cdot x'} \hat{a}_{p', \lambda} + \text{c.h.} \right) \right], \end{aligned}$$

es decir,

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{A}^\omega(x) \hat{U}^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\omega_\nu \left[\hat{A}^\nu(x') - \partial'^\nu \hat{\Theta}(x', \Lambda) \right],$$

donde $\hat{\Theta}(x', \Lambda)$ es por definición la combinación lineal de $\hat{a}_{p\lambda}$ y $\hat{a}_{p\lambda}^\dagger$ que se deduce de la ec. anterior.

A menos que el término que involucra a $\hat{\Theta}(x', \Lambda)$ resulte de alguna manera irrelevante $\forall \Lambda$, $\hat{A}^\omega(x)$ no es un vector.

Concluimos entonces que, si queremos describir partículas no masivas con espín 1 (como los fotones) usando a $A^\omega(x)$, entonces, para que este campo sea un cuadrivector, debemos asegurarnos de que la "transformación de norma" ("gauge")

$$A_\omega(x) \longrightarrow A_\omega(x) - \partial_\omega \Theta(x) \quad \text{con } \Theta(x) \text{ arbitraria}$$

NO tenga ninguna consecuencia física. Es decir, declaramos que los perfiles $A_\omega(x)$ y $A'_\omega(x) \equiv A_\omega(x) - \partial_\omega \Theta(x)$, son matemáticamente distintos pero físicamente equivalentes, $A_\omega \approx A'_\omega$.

[25: 05/10/18]

Notemos que esta es una transformación local (el concepto opuesto a 'global'): nos permite modificar el valor de $A_\omega(x)$ de manera independiente en cada punto del espaciotiempo. Esta es una libertad muy drástica: con una elección apropiada de $\Theta(x)$, podemos incluso apagar algunos componentes de $A_\omega(x)$,

SIN consecuencia alguna!! En los libros, frecuentemente se le llama simetría de norma a esta libertad; pero es más que eso. La implicación es que, al describir partículas no masivas de espín 1 usando el campo vectorial $A_\mu(x)$, nuestro lenguaje es redundante: tendremos más variables que grados de libertad físicos.

De hecho, podemos recordar que para el campo de Dirac $\psi(x)$ de entrada sucedía lo mismo: teníamos 4 componentes (complejas) para describir los 2 posibles estados de espín (de partícula y antipartícula). Pero en ese caso vimos que era posible imponer una restricción adicional que eliminara la redundancia de manera covariante bajo Lorentz: la ec. de Dirac $(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0$. Aquí podríamos de manera similar trabajar con el campo $\hat{A}_\mu(x)$ tal como lo construimos en un principio, que, además de la ecuación de Klein-Gordon $\partial^2 \hat{A}_\mu(x) = 0$, satisface, como verificaremos en la p. 246, las condiciones adicionales $\hat{A}^0(x) = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}}(x) = 0$ (condiciones que más adelante llamaremos "norma de Coulomb"). El problema es que estas condiciones no son covariantes bajo Lorentz, y por ello resulta más difícil asegurarnos de que los resultados físicos sí lo sean. Desafortunadamente,

para un campo vectorial no masivo No existe manera alguna de eliminar por completo la redundancia que sea covariante bajo Lorentz, así que **debemos escoger**: o trabajamos con un formalismo covariante pero redundante, o utilizamos un lenguaje sin redundancia pero no covariante. En general preferiremos la primera opción.

Para nuestro campo vectorial no masivo $A_\mu(x)$, que de ahora en adelante llamaremos también "campo de norma", necesitaremos entonces una densidad Lagrangiana que sea escalar, real e invariante de norma. Notando que la combinación antisimétrica

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad \text{Intensidad de Campo}$$

es invariante de norma ($F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu}$), vemos que la única posibilidad para el caso de un campo de norma libre (\leftrightarrow Lagrangiano cuadrático) es el término cinético que apareció en la Tarea 3,

↙ por convención

$$\mathcal{L}_M(\partial_\mu A_\nu(x)) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad \text{Lagrangiano de Maxwell}$$

Es importante recalcar que la invariancia de norma, por ser ni más ni menos que la manifestación del hecho de que nuestro lenguaje es redundante, debe preservarse incluso al incorporar interacciones (es decir, términos cúbicos o más altos). P.ej., si $A_\mu(x)$ se acopla de manera lineal a otros campos,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu(x), \varphi_\ell(x), \partial_\mu \varphi_\ell(x)) = -A_\mu(x) J^\mu(x)$$

lineal en A (no en φ)
vector bajo Lorentz, combinación de φ 's y/o $\partial_\mu \varphi$'s

entonces la invariancia de $S_M + S_{\text{int}} \equiv \int d^4x (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\text{int}})$

bajo $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Theta$ requiere que

$$\int d^4x \partial_\mu \Theta(x) J^\mu(x) \stackrel{\text{partes}}{=} -\int d^4x \Theta(x) \partial_\mu J^\mu(x) = 0,$$

es decir, que $J^\mu(x)$ sea una corriente conservada, $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Un caso en el que sabemos ya que tendremos particular interés es acoplar el campo vectorial no masivo $A_\mu(x)$, que nos servirá para describir al (cuadri)potencial electromagnético,

con el campo de Dirac masivo $\psi(x)$, que nos servirá para describir al electrón y demás fermiones cargados.

Como vimos (p.277), la única simetría continua interna del Lagrangiano de Dirac masivo, $\psi(x) \rightarrow e^{i q \theta} \psi(x)$, da lugar a la corriente conservada $J^\mu(x) = q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$, así que la única manera en que podemos acoplar $A_\mu(x)$ linealmente a $\psi(x)$ es utilizando el Lagrangiano de la

Electrodinámica Cuántica (QED),

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}_D(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi) + \mathcal{L}_M(F_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$$

con $\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv -A_\mu J^\mu = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$.

La ec. de movimiento para $A_\mu(x)$ sería entonces

$$\frac{\delta S_{\text{QED}}}{\delta A_\mu(x)} = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} [\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\text{int}}] = 0,$$

que según comprobamos en la Tarea 3 da lugar, como es de esperarse, a las 2 ecs. de Maxwell con fuentes,

$$\frac{\delta S_{\text{QED}}}{\delta A_\mu(x)} = \partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - J^\mu(x) = 0.$$

$\swarrow (p, \vec{J})$
 \uparrow contiene a \vec{E} y \vec{B}

A partir de esto queda finalmente claro que, como habíamos prometido, la corriente de Noether $J^\mu(x) = q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ es en verdad la (cuadri)corriente eléctrica, y q ($-q$) es la carga eléctrica de las partículas (antipartículas) asociadas a $\psi(x)$. P.ej., $q = -e$ para el electrón, y $q = +2/3 e$ para el quark arriba. $\leftarrow 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Hay aquí otro punto que es muy importante destacar. Sabemos que \mathcal{L}_0 es invariante bajo la transformación $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x)$, que es entonces una simetría global: hagamos el mismo cambio de fase en todos los puntos del espaciotiempo. Pero al acoplar $\psi(x)$ a $A_\mu(x)$, sucede algo muy curioso: \mathcal{L}_{QED} es de hecho invariante bajo la transformación local conjunta

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)} \psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x).$$

La invariancia de $\mathcal{L}_M(F)$ es obvia, puesto que en lo que a $A_\mu(x)$ respecta, esta es simplemente una transformación de norma con $\Theta(x) = \theta(x)$. Pero podemos igualmente verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D + \mathcal{L}'_{int} &= \underbrace{\bar{\Psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)}_{e^{-iq\theta(x)} \bar{\Psi}(x)} \underbrace{\Psi'}_{e^{iq\theta(x)} \Psi(x)} - q \underbrace{\bar{\Psi}' \gamma^\mu \Psi'}_{A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)} \\ &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int} + \cancel{i(iq\partial_\mu \theta) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi} + \cancel{q(\partial_\mu \theta) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi}. \end{aligned}$$

El lagrangiano conjunto es entonces en verdad invariante bajo la transformación indicada, donde, a nuestro antojo, podemos cambiar la fase de $\Psi(x)$ de manera independiente en cada punto del espaciotiempo. Así que, al pasar de \mathcal{L}_D a \mathcal{L}_{QED} ¡la simetría interna que originalmente era global se ha vuelto local !! De nuevo, la transformación local realmente es más que una simetría, es una redundancia: NINGUNA cantidad física depende de la elección de $\theta(x)$.

24.5: 31/03/17

Esta conexión entre la existencia de partículas no masivas con espín 1 y la aparición de una 'simetría' interna local para $\Psi(x)$ es tan importante que, para entenderla mejor,

Vale la pena volver a platicarnos toda esta historia con la lógica completamente en dirección opuesta.

Olvidando por un rato todo lo que recién aprendimos, supongamos que tenemos una teoría con un campo complejo

$\varphi_1(x)$ (como, p.ej., $\Psi(x)$ en \mathcal{L}_D), que es invariante bajo la transformación global $U(1)$ $\varphi_1(x) \rightarrow e^{i\vartheta} \varphi_1(x)$:

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_1^*, \partial_\mu \varphi_1, \partial_\mu \varphi_1^*) = \mathcal{L}(e^{i\vartheta} \varphi_1, e^{-i\vartheta} \varphi_1^*, \underbrace{\partial_\mu (e^{i\vartheta} \varphi_1)}_{e^{i\vartheta} \partial_\mu \varphi_1}, \underbrace{\partial_\mu (e^{-i\vartheta} \varphi_1^*)}_{e^{-i\vartheta} \partial_\mu \varphi_1^*})$$

Esto quiere decir que la fase global del campo no tiene significado físico; pero si fijamos a mano la fase en algún punto x_R (p.ej., pidiendo que $\varphi_1(x_R) \in \mathbb{R}$), entonces la fase en los puntos restantes ya no se puede ajustar de manera arbitraria, y constituye por tanto información verdaderamente física. Nuestra elección de fase en x_R

determina la fase en todo lado. Contrario a lo que indican algunos libros de texto, no hay nada de inconsistente en esto, pues es completamente análogo a, p.ej., lo que sucede

en relación a la invariancia bajo traslaciones cuando elegimos un origen para el espaciotiempo. Aun así, podríamos considerar deseable (o al menos, interesante) que la fase se pudiera ajustar de manera independiente en cada punto, es decir, que tuviéramos invariancia bajo la transformación local

$$\varphi_\ell(x) \rightarrow \varphi'_\ell(x) = e^{iq\theta(x)} \varphi_\ell(x).$$

¡ Infinitas veces más simetría que antes!
↓

Esto nos daría un grupo de simetría $U(1)$ en cada punto, y significaría que la fase del campo no tiene significado físico alguno, puesto que podemos ajustarla a nuestro antojo en cada punto sin modificar las predicciones físicas de la teoría. Claramente un campo con esta simetría local contiene entonces menor grados de libertad físicos que los que hubiera tenido si la simetría fuera solo global.

Ahora, dada la simetría global del lagrangiano original,

bajo la transformación local los términos sin derivadas
(p.ej., $-m\bar{\psi}(x)\psi(x)$,) son automáticamente invariantes,

$$\mathcal{L}(\psi_\ell(x), \psi_\ell^*(x), 0, 0) = \mathcal{L}(e^{i\vartheta(x)} \psi_\ell(x), e^{-i\vartheta(x)} \psi_\ell^*(x), e^{i\vartheta(x)} 0, e^{-i\vartheta(x)} 0);$$

pero los términos con derivadas (p.ej., $i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$,) son problemáticos,

$$\mathcal{L}(\psi_\ell(x), \partial_\mu \psi_\ell(x)) \neq \mathcal{L}(e^{i\vartheta(x)} \psi_\ell(x), \partial_\mu [e^{i\vartheta(x)} \psi_\ell(x)])$$

$$e^{i\vartheta(x)} \partial_\mu \psi_\ell(x) + i\vartheta \partial_\mu \theta(x) e^{i\vartheta(x)} \psi_\ell(x)$$

$\neq 0$ si $\theta \neq \text{cte.}$

La dificultad se debe a que la derivada compara el valor del campo en 2 puntos distintos:

$$\partial_\mu \psi_\ell(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi_\ell(x^\mu + \epsilon \delta_\mu^\nu) - \psi_\ell(x^\mu)]$$

Transforman de manera diferente
en el caso local $\theta = \theta(x)$

Lo que necesitamos entonces es una nueva definición de derivada, que compare 2 cantidades que transformen de la misma manera.

Para construir esta nueva derivada, nos hace falta primero tener una herramienta para convertir a $\varphi_\ell(x'' + \epsilon \delta''_\mu)$ en un objeto que transforme igual que $\varphi_\ell(x)$.
 Más en general, supongamos que podemos encontrar una función escalar $W(x, y)$ con la regla de transformación bilocal

$$W(x, y) \rightarrow W'(x, y) = e^{i\vartheta(x)} W(x, y) e^{-i\vartheta(y)}.$$

Si producto por $\varphi_\ell(y)$ transformará entonces como $\varphi_\ell(x)$:

$$W(x, y) \varphi_\ell(y) \rightarrow e^{i\vartheta(x)} W(x, y) e^{-i\vartheta(y)} e^{i\vartheta(y)} \varphi_\ell(y).$$

Normalizaremos por ahora este "corrector de fase" tal que

$W(x, x) = 1$. Dado $W(x, y)$, podemos definir una noción

"correcta" de derivada,

$$D_\mu \varphi_\ell(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[W(x, x'' + \epsilon \delta''_\mu) \varphi_\ell(x'' + \epsilon \delta''_\mu) - \varphi_\ell(x'') \right],$$

que por construcción transforma justo igual que $\varphi_\ell(x)$:

$$D_\mu \varphi_\ell(x) \rightarrow [D_\mu \varphi_\ell(x)]' = e^{i\vartheta(x)} D_\mu \varphi_\ell(x).$$

Para hacer esto más explícito, podemos desarrollar

$$W(x', x' + \epsilon \delta_\mu^\nu) = \underbrace{W(x, x)}_1 + \epsilon \delta_\mu^\nu \underbrace{\frac{\partial W(x, y)}{\partial y^\nu}}_{\equiv i\eta A_\nu(x)} \Big|_{y=x} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

campo vectorial

donde la regla de transformación

$$W(x, y) \rightarrow W'(x, y) = e^{i\eta\theta(x)} W(x, y) e^{-i\eta\theta(y)}$$

implica que $A_\nu(x)$ transforme de acuerdo con

$$\begin{aligned} i\eta A_\nu(x) &\equiv \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x, y) \Big|_{y=x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left[e^{i\eta\theta(x)} W(x, y) e^{-i\eta\theta(y)} \right] \Big|_{y=x} \\ &= \cancel{e^{i\eta\theta(x)}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x, y) \Big|_{y=x}}_{i\eta A_\nu(x)} \cancel{e^{-i\eta\theta(x)}} - i\eta \cancel{\partial_\nu \theta(x)} e^{i\eta\theta(x)} W(x, x) \cancel{e^{-i\eta\theta(x)}}, \end{aligned}$$

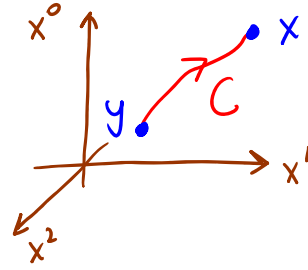
es decir, justo como el cuadripotencial electromagnético,

$$\boxed{A_\nu(x) \rightarrow A'_\nu(x) = A_\nu(x) - \partial_\nu \theta(x)} \quad \cdot \quad \begin{array}{l} \text{Transformación} \\ \text{de Normas} \end{array}$$

Y de hecho, dado un campo vectorial $A_\nu(x)$ que transforma de este modo, que llamamos campo de normas, podemos definir

$$W(x,y) \equiv \exp \left[-iq \int_C dx^\mu A_\mu(x) \right]$$

$$\equiv \exp \left[-iq \int_0^1 d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x(\tau)) \right]$$



invariante bajo $\tau \rightarrow \underline{\tau}(\tau)$

donde $x^\mu(\tau)$ es una parametrización de la curva C , con $x^\mu(0) = y^\mu$, $x^\mu(1) = x^\mu$. Esta función satisface

$$\left. \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x,y) \right|_{y=x} = \left. \frac{\partial}{\partial y^\nu} \exp \left[-iq \int_y^x dx^\mu A_\mu(x) \right] \right|_{y=x} = iq A_\nu(x), \quad \checkmark$$

y además transforma de la manera requerida,

$$W(x,y) \rightarrow W'(x,y) = \exp \left[-iq \int_y^x dx^\mu (A_\mu(x) - \partial_\mu \Theta(x)) \right]$$

$$= e^{iq\Theta(x)} W(x,y) e^{-iq\Theta(y)} \quad \checkmark$$

La función $W(x,y)$ se conoce como línea de Wilson, o lazo de Wilson si la trayectoria C es cerrada, $x=y$.

En general depende de la curva C , $W(x,y) \equiv W_C(x,y)$, así que $W_C(x,x)$ pueden ser distintos de 1 si C es no trivial. Pero siempre se tiene $W_C(x,x) \rightarrow W'_C(x,x) = W_C(x,x)$;

cualquier lazo de Wilson es invariante de norma.