

o lo que es lo mismo,

$$\underbrace{\langle 0 | \hat{\psi}_a(x') | 0 \rangle}_{\langle x' n \lambda |} \underbrace{\langle \hat{\psi}_b(x) | 0 \rangle}_{| x n \lambda \rangle} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{2E_{\vec{p}}} \underbrace{u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_b^s(\vec{p})}_{(\not{p} + m)_{ab}} \quad p. 260$$

De manera similar, la amplitud de propagación de una antipartícula de  $x'$  a  $x$  está dada por

$$\underbrace{\langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_b(x) | 0 \rangle}_{\langle \hat{a}^\dagger x \bar{\lambda} |} \underbrace{\langle \hat{\psi}_a(x') | 0 \rangle}_{| x' \bar{n} \lambda \rangle} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+ip \cdot (x' - x)}}{2E_{\vec{p}}} \underbrace{v_a^s(\vec{p}) \bar{v}_b^s(\vec{p})}_{(\not{p} - m)_{ab}} \quad p. 261$$

Y podemos combinar ambas amplitudes, con un signo menos relativo, para obtener el propagador de Feynman

$$D_F(x' - x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x') \hat{\bar{\psi}}(x) \} | 0 \rangle$$

↑ frecuentemente denotado  $S_F$

↑ orden temporal que incorpora signos fermiónicos

$$\begin{aligned} &\equiv \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\psi}(x') \hat{\bar{\psi}}(x) | 0 \rangle - \theta(x^0 - x'^0) \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[ \theta(x'^0 - x^0) e^{-ip \cdot (x' - x)} (\not{p} + m) - \theta(x^0 - x'^0) e^{ip \cdot (x' - x)} (\not{p} - m) \right], \\ &\hspace{20em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{cambiar } \vec{p} \rightarrow -\vec{p}} \end{aligned}$$

que se puede reescribir en la forma

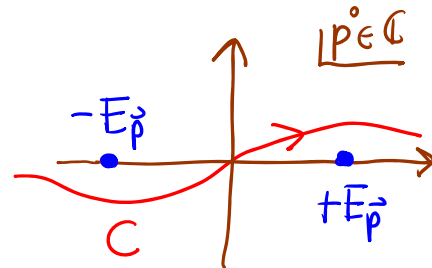
$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left[ \theta(x'^0-x^0) \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x'^0-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} (\underbrace{E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}_{\not{p}+m}) \right. \\ \left. + \theta(x^0-x'^0) \frac{e^{iE_{\vec{p}}(x'^0-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} (\underbrace{-E_{\vec{p}}\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}_{-(\not{p}-m) \text{ tras } \vec{p} \rightarrow -\vec{p}}) \right] \\ \stackrel{p.21}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left[ - \int_C \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E_{\vec{p}})(p^0+E_{\vec{p}})} (\underbrace{p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}_{\not{p}+m}) \right]$$

donde  $C$  denota el mismo contorno

de integración en el plano complejo

que usamos para la partícula sin

espín en la p.21. Como en



quel caso, podemos equivalentemente integrar sobre el

eje real pero reemplazar el denominador por  $(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon$ ,

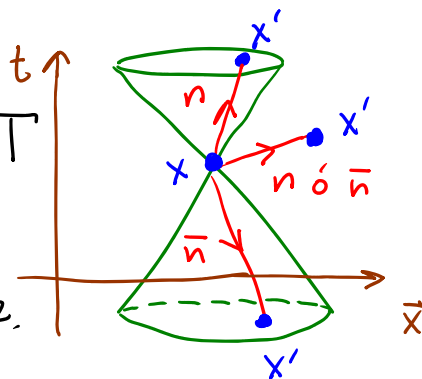
así que nuestro resultado final se puede resumir como

$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x'-x)} .$$

Este es el propagador de Feynman para el campo de Dirac

(denotado  $S_F$  en muchos libros).

Con esto aprendemos en particular que el signo menos relativo que incluimos en  $T$  es necesario para que el orden temporal sea (contrario a las apariencias) invariante de Lorentz.



Verificaremos la condición de causalidad en la Tarea 4.

Recordemos (de la p. 23 ó 198) que el propagador de Feynman para el campo de Klein-Gordon es

$$K_F(x'-x) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x') \hat{\phi}^\dagger(x) \} | 0 \rangle \quad \leftarrow \text{frecuentemente denotado } D_F$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x'-x)} = K_F(x-x').$$

En la Tarea 1 aprendimos que  $K_F(x'-x)$  es una función de Green del operador diferencial de Klein-Gordon, es decir,

$$(-\partial'_\mu \partial'^\mu - m^2) K_F(x'-x) = i \delta^{(4)}(x'-x) \quad (= (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) K_F(x'-x)).$$

Podemos verificar que, de manera análoga, el propagador de Feynman para el campo de Dirac

$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x'-x)} \neq D_F(x-x')$$

es una función de Green del operador diferencial de Dirac:

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) D_F(x'-x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x'-x)} \underbrace{(p-m)(p+m)}_{p^2 - m^2} \\
 &= i\delta^{(4)}(x'-x) \quad (= (-i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) D_F(x'-x))
 \end{aligned}$$

Esto resulta ser cierto en general: el propagador libre para cualquier campo es el inverso (por  $i$ ) del operador diferencial  $\Delta_x$  que aparece en la parte cuadrática de la acción, y por tanto, en la ec. de mov. En los ejemplos,

$$S_{\text{KB}} = \int d^4 x (\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi) = \int d^4 x \varphi^* \underbrace{(-\partial^2 - m^2)}_{\equiv \Delta_x} \varphi,$$

$$S_D = \int d^4 x \bar{\psi} \underbrace{(i\not{\partial} - m)}_{\equiv \Delta_x} \psi. \quad K_F = i\Delta_x^{-1}$$

En el lenguaje de cuantización canónica con el que estamos trabajando, esto se debe a que al calcular  $G(x^+, x'^+) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^\dagger(x') \} | 0 \rangle$ , tenemos  $\Delta_x \hat{\varphi}(x) = 0$ , pero  $\Delta_x$  es una delta de Dirac al actuar sobre las funciones escalón  $\theta(\pm(x^0 - x'^0))$  que definen a  $T$ .

Nos será mucho más fácil entender este resultado general más adelante, cuando aprendamos a cuantizar por el método de integral de trayectoria.

L23: 01/10/18

$\Delta_x$  siempre resulta fácil de invertir en espacio de momentos. P.ej., en el caso de Dirac, definiendo

$$\tilde{D}_F(p) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} D_F(x) \leftrightarrow D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \tilde{D}_F(p)$$

↑ en lugar de  $x'-x$

tenemos

$$\Delta_x D_F(x) = (i\not{p} - m) D_F(x) = i \underbrace{\delta^{(4)}(x)}_{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} 1} \Rightarrow (p - m) \tilde{D}_F(p) = i$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} (p - m) \tilde{D}_F(p) \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} 1$$

y por tanto recuperamos el resultado de la p. 282:

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p - m} = \frac{i(p + m)}{p^2 - m^2} \leftrightarrow D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p - m} e^{-ip \cdot x}$$

≡ inverso de matriz ↑ con +iε para implementar T

Por construcción, sabemos que, bajo el grupo de Lorentz restringido, el operador de campo de Dirac transforma de acuerdo con

$$\hat{U}(\underline{\Lambda}) \hat{\Psi}(x) \hat{U}^{-1}(\underline{\Lambda}) = M(\underline{\Lambda}^{-1}) \hat{\Psi}(\underline{\Lambda}x).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos visto además que bajo el operador de paridad,  $\hat{P} = \hat{U}(\underline{P})$ ,

$$\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^{-1} = \gamma^0 \hat{\psi}(Px)$$

$$M(\hat{P}^{-1}) \quad (x^0, -\vec{x})$$

↑ lineal y unitario

(lo cual implica que  $\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^{-1} = \hat{\psi}(Px) \gamma^0$ ).

En términos de operadores de creación y aniquilación, esto es

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} v_{\vec{p}}^s \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot (Px)} \hat{a}_{\vec{p}}^s \gamma^0 u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot (Px)} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \gamma^0 v_{\vec{p}}^s \right)$$

$$e^{-i(Pp) \cdot x} \equiv e^{-ip \cdot x} \quad e^{i(Pp) \cdot x} \equiv e^{ip \cdot x}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}}^s \gamma^0 u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \gamma^0 v_{\vec{p}}^s \right)$$

pp. 256-7:

$$\frac{1}{\sqrt{2(E_{\vec{p}}+m)}} \gamma^0 (\not{p}+m) \begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2(E_{\vec{p}}+m)}} \gamma^0 (m-\not{p}) \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(E_{\vec{p}} \gamma^0 - (-\vec{\gamma}) \cdot \vec{p} + m)}_{\not{p} + m} \underbrace{\gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}} \quad \underbrace{(m - \not{p}) \gamma^0}_{(m - \not{p})} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}}_{-\begin{pmatrix} \xi^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}}$$

$$u_{-\vec{p}}^s \quad -v_{-\vec{p}}^s$$

es decir,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} v_{\vec{p}}^s \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \left( -v_{\vec{p}}^s \right) \right) \\ & \stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-ip \cdot x} \hat{a}_{-\vec{p}}^s u_{\vec{p}}^s + e^{ip \cdot x} \left( -\hat{b}_{-\vec{p}}^{st} \right) v_{\vec{p}}^s \right) \end{aligned}$$

De aquí podemos deducir que

$$\boxed{\hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} = \hat{a}_{-\vec{p}}^s, \quad \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} = -\hat{b}_{-\vec{p}}^{st}}$$

es decir, el momento se invierte pero el espín no cambia,

y la antipartícula  $\bar{n}$  tiene paridad opuesta a la partícula  $n$ :

$$\hat{P} |\vec{p} n \lambda\rangle = + |-\vec{p} n \lambda\rangle, \quad \hat{P} |\vec{p} \bar{n} \lambda\rangle = - |-\vec{p} \bar{n} \lambda\rangle.$$

Cabe señalar que, más en general, en la transformación bajo paridad podría aparecer una fase adicional (normalmente  $= \pm 1$ ) dependiente de la partícula en cuestión:

$$\hat{P} \hat{\psi}(x) \hat{P}^{-1} = \eta_P^{(n)} \gamma^0 \hat{\psi}(Px) \iff \hat{P} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{P}^{-1} = \eta_P^{(n)} \hat{a}_{\vec{p}}^s, \quad \hat{P} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{P}^{-1} = -\eta_P^{(n)} \hat{b}_{\vec{p}}^{st}$$

↳ "paridad intrínseca" de la partícula  $n$

es una carga conservada (No de Noether)

si  $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$  (p.ej. en QED y QCD)

Por convención, asignamos  $\eta_p = +1$  al electrón, protón y neutrón, así que sus antipartículas tienen  $\eta_p = -1$ . Los piones  $\pi^\pm, \pi^0$  y los fotones tienen también paridad  $\eta_p = -1$ .

Si un campo porta una carga conservada  $q_n$  asociada a una simetría continua interna generada por  $\hat{Q}$ , es decir, si

$$e^{i\hat{Q}\theta} \psi(x) e^{-i\hat{Q}\theta} = e^{-iq_n\theta} \psi(x),$$

podemos eliminar  $\eta_p^{(n)} \equiv e^{i\alpha_p^{(n)}}$  redefiniendo

$$\hat{P} \rightarrow \hat{P}' = \hat{P} \exp\left(i\hat{Q} \frac{\alpha_p^{(n)}}{q_n}\right).$$

Pero si el número de tipos distintos de partículas es mayor que el de cargas conservadas, o si hay partículas neutras, no podremos eliminar todas las fases  $\eta_p^{(n)} \forall n$ .

Podemos igualmente considerar la transformación discreta restante dentro del grupo de Lorentz  $O(3,1)$ : la inversión temporal

$\hat{T}$ , que como sabemos se implementará a través de un operador  $\hat{T}$  antilineal y antiunitario (ver pp. 49-50 y 99).

Tendremos entonces

$$\hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{T}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( e^{+ip \cdot x} \hat{T} \hat{a}_p \hat{T}^{-1} u_p^{s*} + e^{-ip \cdot x} \hat{T} \hat{b}_p^\dagger \hat{T}^{-1} v_p^{s*} \right),$$



o, cambiando la variable de integración  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ ,

$$\hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{T}^{-1} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-iE_{\vec{p}}(t) + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{T}^{-1} u_{\vec{p}}^{s*} + e^{+iE_{\vec{p}}(t) - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{T}^{-1} v_{\vec{p}}^{s*} \right).$$

Por otra parte, si  $A \equiv M(\hat{T})$  es la matriz  $4 \times 4$  que implementa a la inversión temporal en la rep. de Dirac (tal como  $M(\hat{P}) = \gamma^0$  implementa la paridad), debemos tener

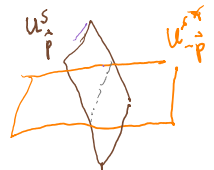
$$\hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{T}^{-1} = M(\hat{T}) \hat{\psi}(\underline{T}x) \quad (-x^0, \vec{x})$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( e^{-iE_{\vec{p}}(t) + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{\vec{p}}^{s'} A^{-1} u_{\vec{p}}^{s'} + e^{+iE_{\vec{p}}(t) - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} A^{-1} v_{\vec{p}}^{s'} \right).$$

Igualando estas 2 expresiones, vemos que necesariamente

$$\hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{T}^{-1} u_{\vec{p}}^{s*} = \hat{a}_{\vec{p}}^{s'} A^{-1} u_{\vec{p}}^{s'}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{T}^{-1} v_{\vec{p}}^{s*} = \hat{b}_{\vec{p}}^{s'\dagger} A^{-1} v_{\vec{p}}^{s'}. \quad (*)$$

$A^{-1}$  debe convertir a  $u_{\vec{p}}^{s'}$  en combinación lineal de  $u_{\vec{p}}^{s*}$  (e igual en  $v$ )



Dado que  $(\not{p} - m)u_{\vec{p}}^s = 0$ ,  $(\not{p} + m)v_{\vec{p}}^s = 0$ , tenemos

$$0 = (\not{p}^* - m)u_{\vec{p}}^{s*} = \underbrace{(\gamma^0)^* E_{\vec{p}} - \gamma^1 p_1 - \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*} u_{\vec{p}}^{s*} = \underbrace{\gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m}_{\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}^*} u_{\vec{p}}^{s*} = \underbrace{\gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m}_{\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}^*} u_{\vec{p}}^{s*} = \underbrace{\gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m}_{\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}^*} u_{\vec{p}}^{s*},$$

es decir,

$$0 = (\not{p}^* - m) u_{\not{p}}^{s*} = (\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m) u_{\not{p}}^{s*},$$

y de manera similar

$$0 = (\not{p}^* + m) v_{\not{p}}^{s*} = (\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 + m) v_{\not{p}}^{s*}.$$

Así que las ecs. (\*) de la página anterior son consistentes si la matriz  $A$  es tal que  $A^{-1} \not{p} = \not{p}^* A^{-1}$ , porque entonces

$$\underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m)}_{(\not{p}^* - m)} A^{-1} u_{\not{p}}^{s'} = A^{-1} \underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 - m)}_{\not{p} - m} u_{\not{p}}^{s'} = 0,$$

$$\underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} - \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 + m)}_{(\not{p}^* + m)} A^{-1} v_{\not{p}}^{s'} = A^{-1} \underbrace{(\gamma^0 E_{\not{p}} + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 + m)}_{\not{p} + m} v_{\not{p}}^{s'} = 0.$$

Esto se cumple si  $A \gamma^2 A^{-1} = \gamma^2$ ,  $A \gamma^3 A^{-1} = -\gamma^3$ ,

o lo que es lo mismo,  $A \gamma^\mu A^{-1} = \gamma_\mu^* = (\gamma_\mu^\dagger)^T = \gamma^{\mu T}$ .

Podemos ver de inmediato que  $A = i \gamma^1 \gamma^3$  cumple

con este requisito, y satisface además  $A = A^{-1} = A^\dagger$ .

[22: 27/03/17]

$$\uparrow A^2 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 = +\mathbb{1}$$

Más explícitamente, en la base de Weyl esto es  $\sigma^1 \sigma^3 = -i \sigma^2$

$$A = i \gamma^1 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = A^{-1},$$

[26: 07/10/20]

matriz que al actuar sobre  $u^*$  y  $v^*$  tiene por construcción el efecto

$$A u_{\vec{p}}^{s*} = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \underbrace{A(p^0+m)}_{(p^0+m)A} u_{\vec{0}}^{s*} = \frac{1}{\sqrt{2(p^0+m)}} (p^0+m) \underbrace{\begin{pmatrix} (0 \ i) & 0 \\ (-i \ 0) & 0 \\ 0 & (0 \ i) \\ & (-i \ 0) \end{pmatrix}}_{\substack{-\sigma^2 \\ \checkmark (0) \circ (0)}} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ \zeta^s \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^s i u_{\vec{p}}^{3-s}, \quad \text{índice invertido: } 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$$

$$\overline{+i} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^1 \end{pmatrix} \text{ si } s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$A v_{\vec{p}}^{s*} = \frac{-1}{\sqrt{2m(p^0+m)}} \underbrace{A(p^0-m)}_{(p^0-m)A} v_{\vec{0}}^{s*} = \frac{-1}{\sqrt{2(p^0+m)}} (p^0-m) \underbrace{\begin{pmatrix} (0 \ i) & 0 \\ (-i \ 0) & 0 \\ 0 & (0 \ i) \\ & (-i \ 0) \end{pmatrix}}_{\substack{-\sigma^2 \\ \checkmark (0) \circ (0)}} \begin{pmatrix} \zeta^s \\ -\zeta^s \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^s i v_{\vec{p}}^{3-s}.$$

$$\overline{+i} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ -\zeta^2 \\ \zeta^1 \end{pmatrix} \text{ si } s = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Usando esto en las eqs. (\*) de la p. 289, multiplicadas por  $A$ ,

$$\hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} \underbrace{A u_{\vec{p}}^{s*}}_{(-1)^s i u_{\vec{p}}^{3-s}} = \hat{a}_{\vec{p}}^{s'} u_{\vec{p}}^{s'}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} \underbrace{A v_{\vec{p}}^{s*}}_{(-1)^s i v_{\vec{p}}^{3-s}} = \hat{b}_{\vec{p}}^{s'} v_{\vec{p}}^{s'}$$

concluimos finalmente que

$$\hat{T} \hat{a}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} = (-1)^{3-s} i \hat{a}_{-\vec{p}}^{3-s}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\vec{p}}^{s*} \hat{T}^{-1} = (-1)^{3-s} i \hat{b}_{-\vec{p}}^{3-s}$$

(En todo este análisis hemos nuevamente ignorado por simplicidad la posibilidad de tener una fase adicional  $\eta_{\vec{p}}^{(n)}$ .)

Estas expresiones indican que, como era de esperarse,

la operación de inversión temporal invierte tanto el momento lineal como el espín de las partículas y antipartículas. Y vemos además que los estados  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  de la partícula (o antipartícula) tienen "paridad temporal" opuesta.

Para campos complejos como el de Dirac, existe una tercera (posible) simetría discreta (esta vez interna, es decir, no relacionada con el espaciotiempo) que es de interés: la operación de conjugación de carga  $\hat{C}$ , que intercambia a las partículas con las antipartículas, sin modificar el espín y el momento. En el formalismo cuántico se implementa a través de un operador lineal y unitario  $\hat{C}$ , que esencialmente intercambia entre sí  $\hat{\psi}(x) \leftrightarrow \hat{\psi}(x)^T$  para lograr el efecto deseado  $\hat{a} \leftrightarrow \hat{b}$ .  $\sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$   $\sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$

Pero no puede hacer literalmente solo eso, porque los espinores  $\psi$  y  $\bar{\psi}^T$  transforman de manera distinta bajo Lorentz:  $\psi \xrightarrow{\Lambda} \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \psi$  implica que

$$\bar{\psi}^T \xrightarrow{\Lambda} \left[ \bar{\psi} \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \right]^T = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu T}\right) \bar{\psi}^T.$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bar{\psi}'} \quad p.238 \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\neq \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}$

Necesitamos entonces, identificar una matriz  $4 \times 4$   $C$  tal que, bajo Lorentz,

$$C \bar{\Psi}^T \xrightarrow{\Lambda} C [\bar{\Psi} \exp(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu})]^T = C \exp(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu T}) \bar{\Psi}^T$$

si coincide con

$$C \bar{\Psi}^T \xrightarrow{\Lambda} \exp(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}) (C \bar{\Psi}^T),$$

es decir, queremos que  $C$  satisfaga  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

$$C S^{\mu\nu} C^{-1} = -S^{\mu\nu T} \iff C [\gamma^\mu, \gamma^\nu] C^{-1} = -[\gamma^{\nu T}, \gamma^{\mu T}] = [\gamma^{\mu T}, \gamma^{\nu T}]$$

lo cual se logra si  $C \gamma^\mu C^{-1} = \pm \gamma^{\mu T}$ ,  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$

es decir,  $C \gamma_{\frac{1}{2}}^0 C^{-1} = \pm \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \end{pmatrix} \gamma_{\frac{1}{2}}^0$ .  $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sabemos que esto se cumple con signo  $+$  si  $C = A$  (p. 290).

Pero la regla de transformación que estaremos postulando,

$$\Psi \xrightarrow{G} C \bar{\Psi}^T \equiv \Psi^c \leftarrow \text{espinor conjugado de carga}$$

$$\Rightarrow C \bar{\Psi}^T \xrightarrow{G} C (\overline{C \bar{\Psi}^T})^T = C (\underbrace{\bar{\Psi}^T C^\dagger}_{(\Psi^T \gamma^0)^*} \gamma^0)^T$$

es decir,

$$(\Psi^T \gamma^0)^* = \Psi^T \gamma^{0*} = \Psi^T \gamma^0,$$

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T \Rightarrow (\psi^c)^c = \underbrace{C (\psi^T \gamma^0 C^\dagger \gamma^0)^T}_{C \gamma^0 C^* \gamma^0} \psi = \pm \gamma^0 C C^* \gamma^0 \psi$$

$C \gamma^0 = \pm \gamma^0 C = \pm \gamma^0 C$

Necesitamos exigir que  $(\psi^c)^c = \psi$ , porque  $\Gamma^2 = 1$ , así que debemos pedir que  $C C^* = \pm 1$ .

Desafortunadamente,  $A A^* = (i \gamma^1 \gamma^3) (-i \gamma^1 \gamma^3) = -1$ ,

así que  $C \neq A$ . Pero es fácil comprobar que

$$C = -i \gamma^0 \gamma^2$$

Matriz de Conjugación de Carga

satisface tanto  $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T} = -\gamma_\mu^*$  como  $C C^* = -1$ . ✓

$(-i \gamma^0 \gamma^2) (-i \gamma^0 \gamma^2)$

Esta matriz está relacionada con la matriz de inversión

temporal a través de  $C = i \gamma^5 A$ , y tiene las propiedades

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T. \quad i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \text{ p.234}, \quad A = i \gamma^1 \gamma^3 \text{ p.290}$$

En la base de Weyl,

$$C = \begin{pmatrix} i \sigma^2 & 0 \\ 0 & -i \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}$$

p.235 p.290

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

La operación de conjugación de carga se implementa entonces a nivel cuántico en la forma

$$\hat{C} \hat{\psi}(x) \hat{C}^{-1} = \hat{\psi}^c(x) = C \hat{\psi}^T(x) \quad (\leftrightarrow \hat{C} \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{C}^{-1} = \hat{\bar{\psi}}(x) C)$$

↖ espín conjugado de carga

(omitiedo nuevamente por simplicidad una posible fase adicional  $\eta_G^{(n)}$ , conocida como "paridad de conjugación de carga").

Razonado como antes, se puede ver que en términos de los operadores de creación/aniquilación esto se traduce en

$$\hat{C} \hat{a}_{\vec{p}}^s \hat{C}^{-1} = (-1)^s \hat{b}_{\vec{p}}^{3-s} \quad \leftrightarrow \quad \hat{C} \hat{b}_{\vec{p}}^{st} \hat{C}^{-1} = (-1)^{s-1} \hat{a}_{\vec{p}}^{3-s t}$$

Vemos aquí que, como pedimos desde un principio,  $\hat{C}$  intercambia partículas con antipartículas, pero No modifica el momento ni el espín ( $\hat{a}_{\vec{p}}^{z \uparrow} |0\rangle$  y  $\hat{b}_{\vec{p}}^{z \uparrow} |0\rangle$  tienen mismo espín).  
124:03/10/18

Juntando todos estos elementos, podemos deducir que los 5 distintos tensores hermitianos que es posible construir a partir de  $\psi(x)$  transforman de acuerdo con la siguiente tabla:

	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(x)$	$i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} S^{\mu\nu} \hat{\Psi}(x)$
P	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(Px)$	$-i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$P^\lambda P^\rho \hat{\Psi} S^{\lambda\rho} \hat{\Psi}(Px)$
T	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(Tx)$	$-i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(Tx)$	$-T^\nu \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi}(Tx)$	$-T^\nu \hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(Tx)$	$-T^\lambda T^\rho \hat{\Psi} S^{\lambda\rho} \hat{\Psi}(Tx)$
C	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(x)$	$i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$-\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}(x)$	$\hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$	$-\hat{\Psi} S^{\mu\nu} \hat{\Psi}(x)$
CP	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(Px)$	$-i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\nu \hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(Px)$	$-P^\lambda P^\rho \hat{\Psi} S^{\lambda\rho} \hat{\Psi}(Px)$
CPT	$\hat{\Psi} \hat{\Psi}(-x)$	$i \hat{\Psi} \gamma^5 \hat{\Psi}(-x)$	$-\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}(-x)$	$-\hat{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \hat{\Psi}(-x)$	$\hat{\Psi} S^{\mu\nu} \hat{\Psi}(-x)$

El Lagrangiano de Dirac  $\mathcal{L}_D$  es invariante bajo P, T y C por separado, pero claramente es posible agregarle términos (libres o de interacciones) que violen cada una de estas 3 simetrías, o cualquiera de las combinaciones CP, CT, o PT.

¡Esto de hecho es lo que sucede en nuestro universo: el Modelo Estándar es invariante bajo  $SO^+(3,1)$ ; pero No bajo P, T, C, CP, CT, ni PT!

Por otro lado, en el último renglón de la tabla vemos que bajo la combinación CPT los distintos términos parecen simplemente multiplicarse por un factor  $(-1)^V$ ,



donde  $v$  es el número de índices vectoriales.

Esto resulta ser cierto en general, para cualquier tipo de campos [ver Greiner 10.2, 10.4 y Weinberg 5.2, 5.3 para los campos escalar y vectorial, Weinberg 5.6-5.8 para el caso general, y Streater & Wightman, op.cit., para una demostración rigurosa]. De aquí se deduce el llamado

Teorema CPT: es imposible escribir una densidad Lagrangiana local, escalar y hermitiana que viole CPT.

Es decir, usando el lenguaje de teoría cuántica de campos junto con las suposiciones de localidad, invariancia de Lorentz y unitariedad, necesariamente CPT será una simetría,

$$(\hat{C}\hat{P}\hat{T})\hat{\mathcal{L}}(x)(\hat{C}\hat{P}\hat{T})^{-1} = \hat{\mathcal{L}}(-x) \iff [\hat{C}\hat{P}\hat{T}, \hat{H}] = 0.$$

↑ irrelevante en  $S = \int d^4x \mathcal{L}$

Esta es una tercera predicción genérica de la teoría cuántica de campos. Implica, primero que nada, que si existe una

partícula  $n$  con componente de espín (o helicidad)  $\lambda$ ,

entonces debe existir también su "imagen CPT": una antipartícula  $\bar{n}$  con componente de espín  $-\lambda$ . Por supuesto,

en el caso masivo  $j^3 = -\lambda$  implica, por rotaciones, la existencia también de  $j^3 = +\lambda$ ; pero en el caso no masivo las opciones

de helicidad  $h = \pm \lambda$  son independientes. P.ej., en el Modelo Estándar original se postulaba la existencia de 3 neutrinos no masivos con quiralidad/helicidad izquierda, junto con los correspondientes 3 antineutrinos no masivos con quiralidad/helicidad derecha.

Usando GPT se puede mostrar también que  $n$  y  $\bar{n}$  deben tener exactamente la misma masa sin después de tomar en cuenta el efecto de las interacciones, y también la misma tasa total de decaimiento [ver Greiner 10.6, ejemplo 10.4, y Weinberg 3.3, 3.6].

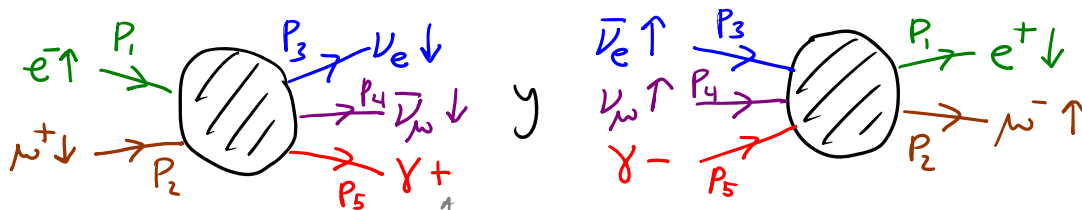
Más en general, GPT relaciona cualquier amplitud de dispersión

$$\langle p'_1, \lambda'_1; \dots; p'_N, \lambda'_N; + | p_1, \lambda_1; \dots; p_N, \lambda_N; + \rangle$$

con el proceso inverso con  $n_I \rightarrow \bar{n}_I$  y  $\lambda_I \rightarrow -\lambda_I$ :

$$\langle p_1, \bar{n}_1, -\lambda_1; \dots; p_N, \bar{n}_N, -\lambda_N; - | p'_1, \bar{n}'_1, -\lambda'_1; \dots; p'_N, \bar{n}'_N, -\lambda'_N; + \rangle.$$

P.ej., por invariancia GPT las amplitudes de los procesos



deben coincidir.

↑ helicidad del fotón

#### 4. Campo Vectorial e Invariancia de Norma

Hasta ahora hemos estudiado 2 tipos de campos:

Campo Escalar  $\overset{\text{asociado}}{\longleftrightarrow} a$  Partículas con espín 0 (bosones)  $\overset{\text{sirve para}}{\longleftrightarrow}$  Modelo de juguete, Higgs

Campo de Dirac  $\longleftrightarrow$  Partículas con espín  $\frac{1}{2}$  (fermiones)  $\longleftrightarrow$  Leptones, Quarks.

El siguiente paso lógico es evidentemente hablar de

Campo Vectorial  $\longleftrightarrow$  Partículas con espín 1 (bosones)  $\longleftrightarrow$  Fotones,  $W^\pm, Z^0$ , Gluones.  
 $\uparrow$  por espín-estadística

que sería el último ingrediente necesario para entender al Modelo Estándar.

Este ingrediente juega un papel especial en la naturaleza.

Hasta ahora hemos hablado de campos libres ( $\mathcal{L}$  cuadrático).

En el mundo real, por supuesto los componentes básicos de la materia (los quarks y los leptones descritos por campos de Dirac) interactúan; pero resulta que lo hacen

No directamente entre sí, sino a través de bosones vectoriales que actúan como mediadores. Los campos vectoriales son entonces los portadores de las interacciones fundamentales. (Esta es una propiedad específica del Modelo Estándar, No de cualquier teoría de campos interactuante.) El único caso que estudiaremos en detalle en este semestre es el del campo electromagnético, que está asociado a partículas no masivas conocidas como fotones.

(Los gluones son los mediadores de la interacción fuerte y tampoco tienen masa, aunque por otro lado no existen como estados asintóticos, debido a la propiedad de la interacción fuerte conocida como 'confinamiento'. Las partículas mensajeras de la interacción débil, el  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ , sí tienen masa, pero solo por culpa del campo de Higgs, que resulta tener un valor de fondo  $\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \phi_0 \neq 0$  en el estado actual de nuestro universo.)

Recordemos ahora que una partícula no masiva con espín  $j$  tiene (a lo más)  $2$  estados, comparados con los  $2j+1$  estados