

El adjetivo "pseud" aplicado a los 2 últimos objetos se refiere a la manera en que transforman bajo paridad. Para entender esto, debemos primero

preguntarnos cómo se implementa en la rep de Dirac

la operación de paridad,

$$\underline{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad \leftarrow \text{esta es una transformación de Lorentz (una } \underline{\Lambda} \text{)}$$

Por definición, cualquier vector

$$v^\mu = (v^0, \vec{v}) \xrightarrow{\underline{P}} \underline{P}^\mu{}_\nu v^\nu = (v^0, -\vec{v}),$$

así que buscamos una matriz 4×4 $M(\underline{P})$ tal que

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \xrightarrow{\underline{P}} \bar{\psi} M(\underline{P})^{-1} \gamma^\mu M(\underline{P}) \psi = \underline{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi,$$

es decir, deseamos tener $M^{-1} \gamma^0 M = \gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$, $M^{-1} \gamma^i M = -\gamma^i = \gamma^{i\dagger}$.

Sabemos ya ^{γ-237} que esto se logra tomando $M(\underline{P}) = \gamma^0$ ($=\gamma^{0^{-1}}$)

Vemos entonces que $\{ \gamma^\mu, \gamma^5 \} = 0$

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi \xrightarrow{\underline{P}} \bar{\psi} \overset{M(\underline{P})^{-1}}{\gamma^0} \gamma^5 \overset{M(\underline{P})}{\gamma^0} \psi = -\bar{\psi} \gamma^5 \psi,$$

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{\underline{P}} \gamma^0 \psi \\ \psi^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger \gamma^0 \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \gamma^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi &\xrightarrow{\underline{P}} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi = \begin{cases} -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{si } \mu=0 \\ +\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{si } \mu=i \end{cases} \\ &= -\underline{P}^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^5 \psi, \end{aligned}$$

donde aparecen signos menos adicionales, que son justamente a lo que se refiere el adjetivo "pseud".

Ahora que conocemos $M(\underline{P})$, podemos ver además que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{P}} \psi' = \gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_D \\ \psi_I \end{pmatrix},$$

es decir, justo como habíamos prometido, **la paridad intercambia a los espinores de Weyl izquierdos y derechos.**

Podemos verificar que este resultado es independiente

de nuestra elección de base para las matrices de Dirac:

recordando (p.236) la definición $\psi_D \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi$,

veremos que $M(\underline{P})$ efectivamente invierte la quiralidad,

$$\psi_D \xrightarrow{\underline{P}} \gamma^0 \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5) \underbrace{\gamma^0 \psi}_{\psi'} = \psi'_D.$$

Es cierto entonces que, como dijimos en la p. 234,

es solo con los espinores de Dirac que obtenemos una rep (irreducible) de $O^+(3,1)$ (con los espinores de Weyl, en cambio, únicamente tenemos una rep de $so^+(3,1)$).

Vale la pena resumir lo que hemos aprendido aquí, enfatizando la relación con lo que se cubre en un curso de cuántica no relativista. En ese contexto, los espinores se definen únicamente con referencia al grupo de rotaciones $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$: en parámetros ξ de 2 números complejos que se mezclan entre sí de acuerdo con $\xi \rightarrow \xi' = \exp\left(\frac{i}{2} \omega_{ij} J_{[1/2]}^{ij}\right) \xi$, con $J_{[1/2]}^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2} = -\frac{i}{4} [\sigma^i, \sigma^j]$.

Al pasar al caso relativista, considerando primero el grupo $SO^+(3,1) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, para incorporar a los empujones (rotaciones por un ángulo imaginario) nos basta con los mismos ξ y las matrices de Pauli $\vec{\sigma}$, pero encontramos que hay 2 maneras no equivalentes de definir a los generadores,

$$J_{[1/2]I}^{0i} \equiv S_I^{0i} \equiv -\frac{i\sigma^i}{2} \quad \text{ó} \quad J_{[1/2]D}^{0i} \equiv S_D^{0i} \equiv +\frac{i\sigma^i}{2}$$

dando lugar por tanto a la noción de espinores (de Weyl) izquierdos y derechos $\xi_I \equiv \psi_I$ y $\xi_D \equiv \psi_D$.

Por último, si queremos incorporar a la pericidad, necesitamos combinar a ψ_I y ψ_D en un espinor de Dirac Ψ , y generalizar $\vec{\sigma}$ a γ^μ para formar $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Estamos ya por fin listos para escribir una densidad Lagrangiana para el campo de Dirac

$\Psi(t, \vec{x}) \equiv$ función que asigna un espinor de Dirac a cada punto del espacio, en cada instante del tiempo.

Vale la pena enfatizar que este es, de entrada, un campo complejo, que no se puede restringir fácilmente a ser real, porque las matrices $M(\underline{\Lambda})$ son complejas (regresaremos a este punto en la Tarea 4: "espinor de Majorana").

Nos convendrá usar como variables independientes no a $\Psi(x)$ y $\Psi^*(x)$ ó $\Psi^\dagger(x)$, sino a $\Psi(x)$ y $\bar{\Psi}(x)$.

Necesitamos entonces una función

$$\mathcal{L}(\Psi_a, \partial_\mu \Psi_a, \bar{\Psi}_a, \partial_\mu \bar{\Psi}_a) \text{ que sea } \underline{\text{real}} \text{ y } \underline{\text{escalar}}.$$

$\int \Psi_b^* \gamma_{ba}^0$

Copiando del caso del campo de Klein-Gordon complejo, p. 179 podríamos proponer

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \partial_\mu \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi,$$

que efectivamente es invariante bajo

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = M(\underline{\Lambda}) \psi(x) \quad \leftarrow p. 238$$

($\Rightarrow \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) M(\underline{\Lambda})^{-1}$), y además es real:

$$(\bar{\psi}\psi)^* = (\psi_a^* \gamma_{ab}^0 \psi_b)^* = \psi_a \underbrace{(\gamma_{ab}^{0*})}_{(\gamma^{0\dagger})_{ba}} \psi_b^* = \psi_b^* \gamma_{ba}^0 \psi_a = \bar{\psi}\psi.$$

$\nearrow \gamma^{0\dagger} = \gamma^0$

La ec. de Euler-Lagrange sería entonces obviamente la

ec. de Klein-Gordon: $\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi - m^2 \bar{\psi} \psi$

$$-\frac{\delta \mathcal{L}_{KG}}{\delta \bar{\psi}_a} = (\partial^2 + m^2) \psi_a = 0. \quad \Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2$$

para las eventuales partículas ✓

↳ cada componente por separado satisface K-G

Pero lo que mostró Dirac es que, gracias a la existencia de las γ^μ , es de hecho posible escribir otro Lagrangiano que es más sencillo, en el sentido de que el término cinético contiene una sola derivada:

$$\mathcal{L}_D = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

Lagrangiano de Dirac

22/10/22

↑ coeficiente = 1
por convención

↑ por análisis dimensional (no m^2)
signo menor por convención

(ajustando normalización de ψ)

Vimos ya que $\bar{\psi}\psi$ es escalar y real. Podemos verificar

que el primer término también es invariante bajo $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$:

$$\begin{aligned}
 i \bar{\psi}'^{\mu} \gamma^{\mu} \partial'_{\mu} \psi'(x') &= i \underbrace{\bar{\psi}(x) M(\Lambda)^{-1}}_{\bar{\psi}'(x') \text{ p. 238}} \gamma^{\mu} \underbrace{\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}}_{(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}} \partial'_{\nu} \underbrace{[M(\Lambda) \psi(x)]}_{\psi'(x') \text{ p. 221}} \\
 &= i (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \bar{\psi}(x) \underbrace{M(\Lambda)^{-1} \gamma^{\mu} M(\Lambda)}_{\Lambda^{\mu}_{\rho} \gamma^{\rho} \text{ p. 239}} \partial'_{\nu} \psi(x) \\
 &= i \underbrace{(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\rho}}_{\delta^{\nu}_{\rho}} \bar{\psi}(x) \gamma^{\rho} \partial'_{\nu} \psi(x) \\
 &= i \bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} \partial'_{\nu} \psi(x). \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Podemos chequear también que, gracias al factor de i , el nuevo término cinético es real:

$$\begin{aligned}
 (i \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi)^* &= (i \psi_a^* \gamma^0_{ab} \gamma^{\mu}_{bc} \partial_{\mu} \psi_c)^* \\
 &= -i \psi_a \underbrace{(\gamma^{0\dagger})_{ba} (\gamma^{\mu\dagger})_{cb}}_{(\gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger})_{ca} = (\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0)_{ca} \stackrel{\text{p. 237}}{=} (\gamma^0 \gamma^{\mu})_{ca}} \partial_{\mu} \psi_c^*
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} (i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi)^* &= -i\partial_\mu\Psi^*(\gamma^0\gamma^\mu)_{ca}\Psi_a \\ &= -i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \end{aligned}$$

que al integrar por partes (dentro de la acción $S_D \equiv \int d^4x \mathcal{L}_D$) coincide correctamente con el término original

$$= +i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi. \quad \checkmark$$

o si preferimos,
podríamos usar
 $\frac{1}{2}(i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$

Es importante recalcar que el término de masa en \mathcal{L}_D involucra a m y no a m^2 como en \mathcal{L}_{KG} . Esto es necesario por análisis dimensional, porque $[\partial_\mu] = [m]$. Faltaría ver si esta m realmente es la masa de las partículas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen a partir de $\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$ son

$$\frac{\delta S_D}{\delta \bar{\Psi}_a} = i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\Psi_b - m\Psi_a = i\partial_\mu(\gamma^\mu\Psi)_a - m\Psi_a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0}$$

↖ $m\mathbb{1}$

Ecuación de Dirac

y

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_D}{\delta\psi_a} = -i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu)_a - m\bar{\psi}_a = 0$$

$$\Rightarrow -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0,$$

que por supuesto es simplemente la versión conjugada de la ec. de Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \Rightarrow \psi^\dagger(-i\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m) = 0$$

$$\Rightarrow \psi^\dagger(-i\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - m)\gamma^0 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m) = 0. \quad \checkmark$$

Podemos observar ahora que pasa algo interesante si actuamos sobre la ec. de Dirac con el operador diferencial $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$ desde la izquierda:

$$0 = (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

$$= (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi$$

$$= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi$$

$$= (\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi,$$

¡que es la ec. de Klein-Gordon! Aprendemos entonces que la ec. de Dirac implica que el campo $\psi(x)$ satisface la ec. de Klein-Gordon, pero contiene aún más información: al requerir que

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1})\Psi = \begin{pmatrix} -m\mathbb{1} & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_D \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \end{matrix}$$

imponemos una relación entre Ψ_I y Ψ_D . Si $m \neq 0$, tenemos

$$\begin{pmatrix} \Psi_I(x) = \frac{i}{m} \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_D(x) \\ \left(\overset{K-G}{\longleftrightarrow} \Psi_D(x) = \frac{i}{m} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_I(x) \right) \end{pmatrix}.$$

Así que, usando \mathcal{L}_D , el campo de Dirac $\psi(x)$ acaba teniendo solo la mitad de los grados de libertad que hubiera tenido si usáramos \mathcal{L}_{KG} : 2 números complejos en cada punto x^μ , en lugar de 4.

Se presenta una excepción a esto si $m=0$. En ese caso, $\Psi_I(x)$ y $\Psi_D(x)$ son dinámicamente independientes, y obedecen las ecs. de movimiento

$$i\bar{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{I}}(x)=0, \quad i\sigma^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{D}}(x)=0.$$

Ecs. de Weyl
reducen a la mitad
grada de libertad de $\psi_{\text{I,D}}$

Este acoplamiento o desacoplamiento entre $\psi_{\text{I}}(x)$ y $\psi_{\text{D}}(x)$
por supuesto puede verse también a nivel del Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{D}} &= i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= i(\psi_{\text{I}}^{\dagger}\psi_{\text{D}}^{\dagger})\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{\mu}\psi_{\text{I}} \\ \partial_{\mu}\psi_{\text{D}} \end{pmatrix} - m(\psi_{\text{I}}^{\dagger}\psi_{\text{D}}^{\dagger})\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{\text{I}} \\ \psi_{\text{D}} \end{pmatrix} \\ &= i\psi_{\text{I}}^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{I}} + i\psi_{\text{D}}^{\dagger}\sigma^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi_{\text{D}} - m\psi_{\text{I}}^{\dagger}\psi_{\text{D}} - m\psi_{\text{D}}^{\dagger}\psi_{\text{I}} \end{aligned}$$

Una vez más
para usar ψ → el término de masa
acopla a ψ_{I} con ψ_{D}

Así como hicimos antes para la ec. de Klein-Gordon,
construiremos ahora un conjunto completo de soluciones a
la ec. de Dirac. Dado que $\psi(x)$ satisface la ec. de
Klein-Gordon, debe poderse escribir como una superposición
de ondas planas $e^{\pm ip \cdot x}$ con $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv E_{\vec{p}}$.

Consideremos primero los modos de frecuencia positiva
(cuyos coeficientes, al cuantizar, serán operadores de

aniquilación) : \swarrow por separado veremos después $v(p)e^{+ip \cdot x}$

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \text{ con } p^2 = m^2, p^0 > 0$$

\uparrow espinor de Dirac (podríamos denotarlos $u_{\vec{p}}$)

Si $m \neq 0$, por la p.249 anticipamos que u_{\pm} y u_{\pm} están relacionados

Para el caso $m=0$, sabemos que podemos analizar por

separado a $u_{\pm}(p)$ y $u_{\pm}(p)$, que satisfacen las ecs. de Weyl \leftarrow p.250

$$\begin{cases} i\bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\pm}(x) = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}^{\mu} p_{\mu} u_{\pm}(p) = (p^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{\pm}(p) = 0 \\ i\sigma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\pm}(x) = 0 \Rightarrow \sigma^{\mu} p_{\mu} u_{\pm}(p) = (p^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{\pm}(p) = 0 \end{cases}$$

Si tomamos p.ej. $p^{\mu} = p_{\mu} = (1, 0, 0, 1)$, estas ecs. implican

$$\text{que } \begin{pmatrix} 1 + \sigma^3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\pm}(p_R) = 0 \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 - \sigma^3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\pm}(p_R) = 0,$$

es decir, $u_{\pm}(p_R) \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_{\pm}(p_R) \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

así que el espinor de Weyl $u_{\pm}(p_R)$ es un eigenvector del

generador de rotaciones (p.232) alrededor del eje definido por

$$\vec{p}_R, \quad S_{\pm}^{12} = \frac{\sigma^3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con eigenvalor } \mp \frac{1}{2}.$$

LF: 17/03/17

Más en general, si recordamos que la helicidad se define

$$\text{como } h \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{S}, \text{ que para } m=0 \text{ equivale a } h = \frac{\vec{p}}{p^0} \cdot \frac{\vec{S}}{2},$$

\uparrow \vec{S} en representación espinorial

\leftarrow momento angular intrínseco de este modo de Fourier

p.97

$$(\vec{p} \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{\pm}(p) = 0$$

veamos que las ec. de Weyl implican que el espinor de quiralidad negativa $u_{-}(p)$ tiene helicidad $h = -1/2$ es decir, helicidad 'izquierda', mientras que el espinor de quiralidad positiva $u_{+}(p)$ tiene helicidad 'derecha', $h = +1/2$.

Es importante tener presente que esta relación directa entre quiralidad y helicidad es válida solo en el caso no masivo (o, de manera aproximada, en el límite ultrarelativista del caso masivo, $|\vec{p}| \gg m \leftrightarrow p^0 \sim |\vec{p}|$).

[20: 24/09/18]

Para $m \neq 0$, la ec. de Dirac con $\psi(x) \sim u(p) e^{-ip \cdot x}$

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi(x) = 0 \Rightarrow (\gamma^{\mu} p_{\mu} - m) u(p) = 0.$$

Consideremos primero el modo en reposo $p^{\mu} = p_{R}^{\mu} \equiv (m, \vec{0})$,

$$m(\gamma^0 - \mathbb{1}) u(p_R) = m \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{-}(p_R) \\ u_{+}(p_R) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow u(p_R) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \text{ donde } \xi \text{ denota un espinor de } \leftarrow \text{elegiremos 4 dimensional}$$

Weyl con 2 componentes arbitrarias. Hemos elegido

normalizar nuestro espinor u con un factor de \sqrt{m} , para que los coeficientes arbitrarios de $u e^{-ip \cdot x}$, $u_{\vec{p}}$ ($\leftrightarrow \hat{a}_{\vec{p}}$), tengan los mismos

unidades que antes: $[\partial_{\mu} \psi^{\dagger} \partial^{\mu} \psi] = 4 \rightarrow [\varphi] = 1$ vs.

$$[i\bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi] = 4 \Rightarrow [\psi] = 3/2. \leftarrow \text{al potenciar de masa}$$

Usaremos como base a las 2 opciones independientes

$$\xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \leftarrow \text{Normalización específica. Por eso necesitaremos coeficiente numérico } a_p^s; \quad \xi = a_p^s \xi^s$$

que son ortonormales: $\xi^r \dagger \xi^s = \delta^{rs} \quad \forall r, s = 1, 2.$

Tenemos entonces los 2 espinores de Dirac independientes

$$u^1(p_R) \equiv \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u^2(p_R) \equiv \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

\leftarrow No confundir superíndices $r, s = 1, 2$ con subíndices espinoriales $a, b, c = 1, \dots, 4$

Como habíamos anticipado, después de imponer la ec. de Dirac, el espinor ψ contiene solo 2 grados de libertad (complejos) independientes.

Bajo la acción del grupito de rotaciones, generada por (p.231)

$$S^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}, \quad \xi \text{ transforma como un espinor}$$

usual de $SU(2)$. $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponden

respectivamente a eigenvalores $\pm \frac{1}{2}$ de $S^{12} \equiv S^3$, de modo

que al cuantizar al campo de Dirac, anticipamos que los

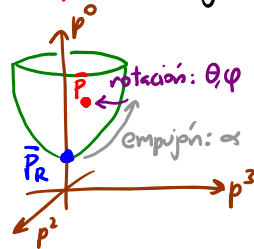
coeficientes $a_{p_R}^1$ y $a_{p_R}^2$ de $u^1(p_R) e^{-ip_R \cdot x}$ y $u^2(p_R) e^{-ip_R \cdot x}$

serán operadores de aniquilación asociados respectivamente a

partículas en reposo con 'espín arriba' y con 'espín abajo'.

Para p^μ arbitrario, podríamos definir

$$u^r(p) \equiv M(\underline{L}(p)) u^r(p_R),$$



donde $\underline{L}(p)$ es la transformación de Lorentz 'canónica' que convierte a p_R^μ en p^μ (ver p. 78). Pero resulta más fácil tomar un atajo, notando que para cualquier espín u ,
 ↙ operador de Dirac para frecuencia positiva (con $p^2 = m^2$)

$$\begin{aligned} (\cancel{\not{p}} + m)(\cancel{\not{p}} - m) u &= (\cancel{\not{p}}^2 - m^2) u \\ &= \left(\frac{1}{2} \{ \cancel{\not{p}}^\mu, \cancel{\not{p}}^\nu \} p_\mu p_\nu - m^2 \right) u \\ &= (\cancel{\not{p}}^\mu p_\mu - m^2) u \\ &= (p^2 - m^2) u = 0, \end{aligned}$$

↙ porque $p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$

es decir, $(\cancel{\not{p}} + m)u$ es una solución a Dirac con momento p^μ y frecuencia positiva. Dado que

$$(\cancel{\not{p}} + m) u^r(p_R) = m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^r \end{pmatrix} = 2m u^r(p_R),$$

↙ $p \cdot \gamma^0$ ↘ p. 252

veremos entonces que podemos escribir

$$u^r(p) \equiv N_p (\cancel{\not{p}} + m) u^r(p_R),$$

con N_p algún factor de normalización tal que $N_{p_R} = \frac{1}{2m}$.

Podemos determinar \mathcal{N}_p recordando que la combinación

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(p_2) u^s(p_2) &= m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m \xi^{rt} \xi^s \\ &\stackrel{p.253}{=} 2m \delta^{rs} \end{aligned}$$

es un escalar bajo Lorentz, y debe por tanto ser igual a

$$\begin{aligned} \bar{u}^r(p) u^s(p) &= \underbrace{|\mathcal{N}_p|^2 m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{versión transformada de Lorentz de } \bar{u}(p_2) \\ \mathcal{N}_p(p+m) u^s(p_2) \\ \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ p.254 \\ p.252}} \underbrace{\begin{pmatrix} p^t + m \\ p^t + m \end{pmatrix} \gamma^0(p+m)}_{\substack{\gamma^0(p+m) \\ p^2 + 2mp + m^2 = 2mp + 2m^2 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = p^2 = m^2 \\ p.254 \\ 2m(p+m)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ &= |\mathcal{N}_p|^2 m \begin{pmatrix} \xi^{rt} & \xi^{rt} \\ \xi^{rt} & \xi^{rt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} 2m \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \\ &= 2m |\mathcal{N}_p|^2 m \xi^{rt} \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m\mathbb{1} \end{pmatrix} \xi^s \quad \begin{matrix} \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \end{matrix} \\ &= 2m |\mathcal{N}_p|^2 m \xi^{rt} \underbrace{\left(m\mathbb{1} + \underbrace{\sigma \cdot p + \bar{\sigma} \cdot p}_{2\mathbb{1} p^0} + m\mathbb{1} \right)}_{\substack{\text{debe ser } = 1}} \xi^s \\ &= 2m |\mathcal{N}_p|^2 m 2(m+p^0) \delta^{rs} \end{aligned}$$

Concluimos entonces que necesitamos fijar

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p^0)}} \quad \left(\text{que satisface } N_{p_R} = \frac{1}{2m} \checkmark \right), \quad \text{p.254}$$

En resumen, hemos visto explícitamente que

$$u^r(p) \equiv \frac{m+p^0}{\sqrt{2(m+p^0)}} \begin{pmatrix} \xi^r \\ \xi^r \end{pmatrix}, \quad \text{con } \xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow E_p$

son 2 espinores independientes que satisfacen la ec. de Dirac en espacio de momentos con frecuencia positiva,

$$(\not{p} - m)u(p) = 0.$$

22:30/09/22

Y en el camino, aprendimos también que $\frac{1}{2m}(m+\not{p})$ es una matriz de proyección: $\left[\frac{1}{2m}(m+\not{p}) \right]^2 = \frac{1}{2m}(m+\not{p})$.
 $\uparrow p^2 = m^2$
 \leftarrow proyecta sobre soluciones a Dirac en espacio de momentos en frecuencia positiva

De manera similar, podemos construir soluciones con frecuencia negativa,

$$\psi(x) = v(p) e^{+ip \cdot x} \quad \text{con } p^2 = m^2, \quad p^0 > 0,$$

para las cuales la ec. de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ equivale a $-(\not{p} + m)v(p) = 0$.

En el marco en reposo, esto es $m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I(p_R) \\ v_b(p_R) \end{pmatrix} = 0,$

lo cual nos lleva a las 2 soluciones independientes

$$V^r(p_r) \equiv \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^r \\ -\xi^r \end{pmatrix}. \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Razonando como antes, y utilizando ahora a la matriz de proyección $\frac{1}{2m}(m-p)$, podemos deducir que

$$V^r(p) \equiv \frac{m-p}{\sqrt{2(m+p^0)}} \begin{pmatrix} \xi^r \\ -\xi^r \end{pmatrix} \quad \text{con } \xi^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son 2 soluciones independientes a la ec. de Dirac en espacio de momentos con frecuencia negativa, $(p+m)V(p)=0$.

Estas 2 soluciones son, como las $u^r(p)$, ortogonales en el sentido de que

$$\begin{aligned} \bar{V}^r(p) V^s(p) &= \bar{V}^r(p_r) V^s(p_r) = m \begin{pmatrix} \xi^{r\dagger} & -\xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\xi^s \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} \xi^{r\dagger} & -\xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = -2m \xi^{r\dagger} \xi^s \\ &= -2m \delta^{rs} \quad \left(= -\bar{u}^r(p) u^s(p) \right). \end{aligned}$$

Podemos ver además que las soluciones $u^r(p)$ son ortogonales a las $V^s(p)$:

$$\bar{u}^r(p) v^s(p) = \bar{u}^r(p_R) v^s(p_R) = m \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{r\dagger} & \xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ -\bar{\xi}^s \end{pmatrix} = 0,$$

$$\bar{v}^s(p) u^r(p) = v^{s\dagger}(p) \gamma^0 u^r(p) = (u^{r\dagger}(p) \gamma^0 v^s(p))^\dagger = (\bar{u}^r(p) v^s(p))^\dagger = 0.$$

Y podemos igualmente calcular los productos no invariantes

$$u^{r\dagger}(p) u^s(p) = \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{r\dagger} & \xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\substack{m+p \\ \sqrt{2(m+p)}}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix} \quad \gamma^{0\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^m \\ \sigma^m & 0 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\quad}_{\begin{pmatrix} m & \bar{\sigma} \cdot p \\ \sigma \cdot p & m \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} m^2 + (\bar{\sigma} \cdot p)^2 & m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p \\ m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p & m^2 + (\sigma \cdot p)^2 \end{pmatrix},$$

$2p^0$

que usando

$$m^2 + (\sigma \cdot p)^2 = m^2 + (p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = m^2 + (p^0)^2 + \underbrace{\sigma^i \sigma^j p^i p^j}_{\substack{\delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k \\ \vec{p}^2}} - 2p^0 \bar{\sigma} \cdot \vec{p}$$

$\uparrow \sigma^m = (1, \vec{\sigma})$
 $\bar{\sigma}^m = (1, -\vec{\sigma})$

$$= 2p^0 (p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p}),$$

$$m^2 + (\bar{\sigma} \cdot p)^2 = m^2 + (p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = 2p^0 (p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p}), \text{ se reduce a}$$

$$u^{r\dagger}(p) u^s(p) = \frac{p^0}{(m+p^0)} \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{r\dagger} & \xi^{r\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p} & m \\ m & p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \bar{\xi}^s \end{pmatrix},$$

es decir,

$$u^{rt}(p) u^s(p) = \frac{p^0}{m+p^0} \xi^{rt} \left(\cancel{p^0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}} + m + m + \cancel{p^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}} \right) \xi^s$$

$$= 2p^0 \xi^{rt} \xi^s = 2p^0 \delta^{rs}.$$

De manera similar, ← no escalar

$$v^{rt}(p) v^s(p) = 2p^0 \delta^{rs},$$

y las u 's y las v 's resultan ser ortogonales en el sentido de que

$$u^{rt}(\vec{p}) v^s(-\vec{p}) = 0 = v^{rt}(\vec{p}) u^s(-\vec{p}).$$

Demostraremos esto de manera indirecta en p.269

En varias ocasiones necesitaremos también las "sumas de espín"

$$\sum_{s=1}^2 u^s(p) \bar{u}^s(p) = \frac{(m+p^0)}{2(m+p^0)} \sum_{s=1}^2 \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} (\xi^{st} \xi^{st}) \underbrace{(m+p^0)}_{\gamma^0(m+p^0)}$$

$$\frac{m+p^0}{\sqrt{2(m+p^0)}} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1010) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0101)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz que proyecta sobre espinores tipo $u(p_R)$

$$\underbrace{m+p} \quad \underbrace{\sum_s \binom{s}{\sigma} \binom{m+p-s}{\sigma}}_{\gamma^0} \quad \underbrace{m+p}$$

$$\sum_{s=1}^2 \bar{u}^s(p) \bar{u}^s(p) = \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m+\bar{\sigma} \cdot p & m+\sigma \cdot p \\ m+\bar{\sigma} \cdot p & m+\sigma \cdot p \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} m^2 + m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p + \sigma \cdot p \bar{\sigma} \cdot p & m^2 + (\sigma \cdot p)^2 + 2m\sigma \cdot p \\ m^2 + (\bar{\sigma} \cdot p)^2 + 2m\bar{\sigma} \cdot p & m^2 + m(\sigma + \bar{\sigma}) \cdot p + \sigma \cdot p \bar{\sigma} \cdot p \end{pmatrix}$$

$\underbrace{2p^0}_{p.258} \quad \underbrace{2p^0(p^0 - \bar{\sigma} \cdot \vec{p}) = 2p^0 \sigma \cdot p}_{p.258}$

$$\underbrace{2p^0(p^0 + \bar{\sigma} \cdot \vec{p}) = 2p^0 \bar{\sigma} \cdot p}_{p.258}$$

$$\begin{aligned} & (\vec{p} - \sigma^i p^i) (\vec{p} + \sigma^j p^j) \\ &= (p^0)^2 - \sigma^i \sigma^j p^i p^j \\ &= (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(m+p^0)} \begin{pmatrix} 2(m+p^0)m & 2(m+p^0)\sigma \cdot p \\ 2(m+p^0)\bar{\sigma} \cdot p & 2(m+p^0)m \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\sum_{s=1}^2 \bar{u}^s(p) \bar{u}^s(p) = \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \bar{\sigma} \cdot p & m \end{pmatrix} = m + \not{p}.$$