3. Campo de Dirac Libre

Con el ejemplo del campo escalar, hemos entendido ya las ideas esenciales sobre la relación campo $\leftrightarrow$ partículas en el caso libre. Antes de intentar agregar interacciones, nos conviene primero estudiar otros tipos de campos libres.

Vimos que un campo escalar está asociado a partículas sin espín. Las partículas con espín se describen entonces con un campo que transforma de manera no trivial bajo Poincaré:

$$\varphi_\ell(x) \to \varphi'_{\ell'}(\underbrace{\Lambda x+a}_{x'}) = \sum_{\ell=1}^{L} M_{\ell'\ell}(\underset{\sim}{\Lambda})\varphi_\ell(x) \quad \text{a nivel clásico,}$$

al revés, como siempre

o, en términos de operadores cuánticos,

$$\hat{\varphi}_\ell(x) \to \hat{U}(\underset{\sim}{\Lambda},a)\hat{\varphi}_\ell(x)\hat{U}^{-1}(\underset{\sim}{\Lambda},a) = \sum_{\ell'=1}^{L} M_{\ell\ell'}(\underset{\sim}{\Lambda}^{-1})\hat{\varphi}_{\ell'}(\Lambda x+a),$$

donde las M's son matrices $L\times L$ que forman una rep de $SO^+(3,1)$. Esta rep es necesariamente no unitaria si $L<\infty$, aunque esperamos que en algún sentido contenga a las matrices $D_{\lambda'\lambda}(\underset{\sim}{W})$ que constituían una rep unitaria del grupito $SO^+(3,1)|_{p_R}$.

Nos interesan por supuesto reps irreducibles, pues de otra manera las componentes $\varphi_\ell(x)$ $(\ell=1,\dots,L)$ se subdividen en 2 o más subconjuntos que no se mezclan entre sí bajo Lorentz.

¿Qué reps irreducibles de $so^+(3,1)$ con dimensión finita existen?

Además de la rep trivial $M(\underset{\sim}{\Lambda})=1$ que define al campo escalar, hasta ahora conocemos solo a la rep vectorial $(\ell\to\mu=0,1,2,3)$ $M(\underset{\sim}{\Lambda})^{\mu'}{}_{\mu}=\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}$, bajo la cual transforma el llamado campo vectorial $\varphi^{\mu}(x)$ (como el potencial electromagnético $A^{\mu}(x)$), y a partir de esta, a la rep tensorial de rango (m,n)

$$M(\underset{\sim}{\Lambda})^{\overbrace{\mu_1'\cdots\mu_m'}^{}}{}_{\underbrace{\nu_1'\cdots\nu_n'}_{\ell}\,\underbrace{\mu_1\cdots\mu_m}_{\ell'}}{}^{\nu_1\cdots\nu_n}=\Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\mu_m'}{}_{\mu_m}\cdot\underbrace{\Lambda_{\nu_1'}{}^{\nu_1}}_{\equiv(\Lambda^{-1})^{\nu_1}{}_{\nu_1'}}\cdots\Lambda_{\nu_n'}{}^{\nu_n}\qquad(\text{p.}35)$$

bajo la cual transforma el llamado campo tensorial de rango (m,n), $\varphi^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(x)$.

De hecho esta rep es reducible: es fácil verificar que las partes simétrica y antisimétrica de $\varphi^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}(x)$ en cada pareja de índices no se mezclan entre sí bajo Lorentz, y son por tanto campos independientes (p.ej. métrica $g_{\mu\nu}(x)$).

¿Existen otras reps de Lorentz? Sí: Dirac (y Cartan, 15 años antes) encontró la llamada representación espinorial

$$M(\underset{\sim}{\Lambda}) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \quad \leftarrow \text{rep del grupo } SO^+(3,1)$$

matriz $L\times L$ que juega el papel de $\underset{\sim}{J}^{(\mu\nu)}$

con generadores

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \quad \leftarrow \text{rep del álgebra } so(3,1)$$

matriz $L\times L$

$$[S^{\mu\nu},S^{\lambda\rho}] = i(\eta^{\nu\rho}S^{\nu\lambda}+\ldots)$$

p.43

donde las matrices de Dirac $\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3$ son 4 matrices $L\times L$ (con un L por determinar) que satisfacen

$$\boxed{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}} \qquad (11)$$

Álgebra de Dirac (o de Clifford)

es decir,

$$(\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad \forall \mu\neq\nu .$$

(i: 1,2,3)

O más explícitamente, con $\ell \to a=1,\ldots,L$,

$$\sum_{b=1}^{L}\left((\gamma^\mu)_{ab}(\gamma^\nu)_{bc}+(\gamma^\nu)_{ab}(\gamma^\mu)_{bc}\right) = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{ac} .$$

Es convencional omitir estos índices

Es decir, si encontramos una rep del álgebra de Dirac, entonces Dirac nos promete que tendremos una rep del álgebra (y por tanto del grupo) de Lorentz. Podemos verificar explícitamente que esto funciona: dado un conjunto de matrices γ^μ que satisfacen (11), tenemos

$$[\gamma^\mu, \underbrace{S^{\lambda\rho}}_{\frac{i}{4}[\gamma^\lambda,\gamma^\rho]}] = \frac{i}{4}\overbrace{[\gamma^\mu, \gamma^\lambda\gamma^\rho]}^{\{\gamma^\mu,\gamma^\lambda\}\gamma^\rho - \gamma^\lambda\{\gamma^\mu,\gamma^\rho\} \,=\, 2\eta^{\mu\lambda}\gamma^\rho - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^\lambda} - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\lambda]$$

p.119

$$= \frac{i}{2}\left(\eta^{\mu\lambda}\gamma^\rho - \eta^{\mu\rho}\gamma^\lambda - \eta^{\mu\rho}\gamma^\lambda + \eta^{\mu\lambda}\gamma^\rho\right)$$

$$= i\left(\eta^{\mu\lambda}\gamma^\rho - \eta^{\mu\rho}\gamma^\lambda\right),$$

de modo que

$$[S^{\mu\nu}, S^{\lambda\rho}] = \frac{i}{4}\underbrace{[\gamma^\mu\gamma^\nu, S^{\lambda\rho}]} - \frac{i}{4}[\gamma^\nu\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}]$$

$$= \frac{i}{4}\left(\gamma^\mu[\gamma^\nu, S^{\lambda\rho}] + [\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}]\gamma^\nu - (\nu \leftrightarrow \mu)\right)$$

$$= i\frac{i}{4}\left(\eta^{\nu\lambda}\gamma^\mu\gamma^\rho - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\lambda + \eta^{\mu\lambda}\gamma^\rho\gamma^\nu - \eta^{\mu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\nu \right.$$
$$\left. - \eta^{\mu\lambda}\gamma^\nu\gamma^\rho + \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu\gamma^\lambda - \eta^{\nu\lambda}\gamma^\rho\gamma^\mu + \eta^{\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\right),$$

viernes, 12 de octubre de 2007 08:19 a.m.

es decir,

$$[S^{\mu\nu}, S^{\lambda\rho}] = i\left(\eta^{\nu\lambda}S^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho}S^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}S^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}S^{\mu\lambda}\right),$$

que efectivamente coincide con el álgebra de Lorentz (2). ✓

L20: 23/09/22 p. 43

Ahora, para construir una rep del álgebra de Dirac, notemos que si combinamos a las γ^μ por pares,

$$\Gamma_1 \equiv \tfrac{1}{2}(\gamma^0 + \gamma^1), \qquad \Gamma_1^\dagger \equiv \tfrac{1}{2}(\gamma^0 - \gamma^1),$$

$$\Gamma_2 \equiv \tfrac{1}{2}(i\gamma^2 + \gamma^3), \qquad \Gamma_2^\dagger \equiv \tfrac{1}{2}(i\gamma^2 - \gamma^3),$$

las dagas aquí no necesariamente se refieren a conjugación hermitiana; por el momento son solo parte del nombre de estas matrices

entonces tendremos $\quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_1^\dagger\} = \tfrac{1}{4}\left(\{\gamma^0, \gamma^0\} - \{\gamma^1, \gamma^1\}\right) = \tfrac{1}{4}(2-(-2)) = 1,$$

$$\{\Gamma_2, \Gamma_2^\dagger\} = \tfrac{1}{4}\left(-\{\gamma^2, \gamma^2\} - \{\gamma^3, \gamma^3\}\right) = \tfrac{1}{4}(-(-2)-(-2)) = 1,$$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_1\} = \tfrac{1}{4}\left(\{\gamma^0, \gamma^0\} + \{\gamma^1, \gamma^1\}\right) = \tfrac{1}{4}(2+(-2)) = 0,$$

$$\{\Gamma_1^\dagger, \Gamma_1^\dagger\} = \{\Gamma_2, \Gamma_2\} = \{\Gamma_2^\dagger, \Gamma_2^\dagger\} = 0,$$

$$\{\Gamma_1, \Gamma_2\} = \{\Gamma_1, \Gamma_2^\dagger\} = \{\Gamma_1^\dagger, \Gamma_2\} = \{\Gamma_1^\dagger, \Gamma_2^\dagger\} = 0.$$

$\Gamma_1, \Gamma_1^\dagger, \Gamma_2, \Gamma_2^\dagger$ $L\times L$

Es decir, estas 4 matrices se comportan como si fueran 2 pares independientes de operadores de creación/aniquilación (o ascenso/descenso) fermiónicos (en el sentido de que obedecen relaciones de anticonmutación en lugar de conmutación, p. 113),

$$\{\hat{a}_I, \hat{a}_J^\dagger\} = \delta_{IJ}, \quad \underbrace{\{\hat{a}_I^\dagger, \hat{a}_J^\dagger\}}_{\Rightarrow\ \hat{a}_I^{\dagger 2}=0} = 0 = \{\hat{a}_I, \hat{a}_J\}$$

con $I, J = 1, 2$. $\Rightarrow \hat{a}_I^{\dagger 2} = 0$ que implementa el principio de exclusión de Pauli

Tales operadores generarían un 'espacio de Fock' de dimensión finita: comenzando con un 'vacío' $|0,0\rangle$ tal que $\hat{a}_I|0,0\rangle = 0\ \forall I$, actuando con los operadores de creación obtenemos solo otros 3 estados independientes,

$$|1,0\rangle \equiv \hat{a}_1^\dagger|0,0\rangle, \quad |0,1\rangle \equiv \hat{a}_2^\dagger|0,0\rangle, \quad |1,1\rangle \equiv \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger|0,0\rangle.$$

Con las matrices $\Gamma_I, \Gamma_I^\dagger$ la situación es exactamente análoga. Comenzando con un vector L-dimensional $V_{(0,0)} \neq 0$ (podemos tomar $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$) que es 'aniquilado' por Γ_1 y Γ_2, $\Gamma_I V_{(0,0)} = 0$, podemos

matriz $L\times L$ — vector L-dim

definir $V_{(1,0)} \equiv \Gamma_1^\dagger V_{(0,0)}$, $V_{(0,1)} \equiv \Gamma_2^\dagger V_{(0,0)}$, $V_{(1,1)} \equiv \Gamma_1^\dagger\Gamma_2^\dagger V_{(0,0)}$.

Es fácil mostrar que estos 4 vectores son linealmente independientes — p.ej., es imposible tener

$$V_{(1,0)} + \alpha V_{(0,1)} = (\Gamma_1^\dagger + \alpha \Gamma_2^\dagger) V_{(0,0)} \overset{?}{=} 0 \quad \text{porque entonces}$$

$$\Gamma_1 (\Gamma_1^\dagger + \alpha \Gamma_2^\dagger) V_{(0,0)} = (\underbrace{\{\Gamma_1, \Gamma_1^\dagger\}}_{1} + \alpha \underbrace{\{\Gamma_1, \Gamma_2^\dagger\}}_{0}) V_{(0,0)} \overset{\times}{=} 0$$

implicaría que $V_{(0,0)} = 0$.

Y se puede ver también que actuando sobre estos 4 vectores con las matrices Γ_I, $\Gamma_J^\dagger$ no es posible ya obtener otros vectores linealmente independientes — p.ej.,

$$\Gamma_2 V_{(1,1)} = \Gamma_2 \Gamma_1^\dagger \Gamma_2^\dagger V_{(0,0)} = -\Gamma_1^\dagger \underbrace{\{\Gamma_2, \Gamma_2^\dagger\}}_{1} V_{(0,0)} = -V_{(1,0)} .$$

Concluimos entonces que esta rep irreducible del álgebra de Dirac tiene dimensión $L = 4 = 2^2$, es decir, las γ^μ serán matrices 4×4.

(En D dimensiones espaciotemporales, con D par, razonando de manera análoga concluiríamos que la rep espinorial del grupo de Lorentz tiene dimensión $\boxed{L = 2^{D/2}}$. Si D es impar, basta con tener $L = 2^{(D-1)/2}$, usando las $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{D-2}$ que se construirían para dimensión $D-1$, junto con $\gamma^{D-1} \equiv (i)^{\frac{D-1}{2}} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{D-2}$, que, según se puede mostrar, tiene las propiedades deseadas $\{\gamma^{D-1}, \gamma^{0,1,\dots,D-2}\}=0$, $(\gamma^{D-1})^2=-1$.)

18:19/09/18

Si elegimos trabajar en una base donde

$$V_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

podemos deducir que

$$\Gamma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y a partir de esto, que (p. 225: $\gamma^0 = \Gamma_1 + \Gamma_1^\dagger$, etc.)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver aquí que a fin de cuentas sí tenemos $\Gamma_1^\dagger = (\Gamma_1)^\dagger$, $\Gamma_2^\dagger = (\Gamma_2)^\dagger$, y como consecuencia de ello,

$$\boxed{\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i} \; .$$

Nos resultará más conveniente trabajar no en esta base sino en la llamada base de Weyl (o base 'quiral' —ver más adelante), obtenida a través de la transformación de semejanza $\gamma^\mu \longrightarrow B\gamma^\mu B^{-1}$ ← preserva $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$ (que corresponde al cambio de base $V_{(0,0)} \rightarrow BV_{(0,0)}$, $V_{(1,0)} \rightarrow BV_{(1,0)}$, etc.), con

$$B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

En esta nueva descripción, tenemos

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},}$$

con $\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ las matrices de Pauli, que satisfacen $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$. (Así que 2 ó 3 de ellas servirían como γ^μ en $D=1+1$ o $D=2+1$ dim.)

Podemos resumirlas con la notación

$$\boxed{\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}}$$ donde $\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1},\vec{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1},-\vec{\sigma}) = \sigma_\mu$.

Podemos notar que en la base de Weyl sigue siendo cierto que $\boxed{\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 , \ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i}$ (gracias a que la matriz de cambio de base es unitaria, $B^\dagger = B^T = B^{-1}$).

Cualquier otra irrep del álgebra de Dirac es equivalente a la de Weyl bajo un cambio de base.

Otra elección que se encuentra frecuentemente en los libros de texto es la llamada base de Dirac, donde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

(Dirac en realidad usó originalmente no estas γ^μ sino las matrices $\beta \equiv \gamma^0$ y $\alpha^i \equiv \gamma^0 \gamma^i$.) Esta base facilita el análisis del límite no relativista. Es fácil verificar que $\gamma^\mu_{\text{Dirac}} = B' \gamma^\mu_{\text{Weyl}} B'^{-1}$, con $B' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$

(matriz de cambio de base que es nuevamente unitaria, $B'^\dagger = B'^{-1}$).

La razón por la cual nosotros preferiremos trabajar en la base de Weyl quedará clara más adelante.

Llamamos espinor de Dirac a un vector ψ que transforma bajo Lorentz en la rep espinorial, llamada también rep de Dirac. Es decir, a un paquete de 4 componentes complejas ψ_a $(a=1,2,3,4)$ que se mezclan entre sí bajo Lorentz de acuerdo con

definición análoga a la de un vector V^μ o $\vec{V}$

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{(\mu\nu)}}} \psi' \equiv \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \\ \psi_4' \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}}_{M(\Lambda)} \psi .$$

En la base de Weyl, los generadores de Lorentz toman la forma $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k \Rightarrow [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$

$$S^{ij} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}$$

para rotaciones y

$$S^{0i} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i - \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i + \sigma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{pmatrix}$$

para empujones.

Resumiendo,

$$\boxed{S^{0i} = \begin{pmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}}.$$

Podemos notar que las matrices S^{ij} son hermitianas, mientras que las S^{0i} son antihermitianas ($\leftrightarrow$ rep no unitaria).

L17: 13/03/17

Y vemos además que la rep de Dirac es, en cuanto al grupo de Lorentz restringido $SO^{+}(3,1)$, una representación reducible: los generadores $S^{\mu\nu}$ (y por tanto también los elementos del grupo, $M(\underset{\sim}{\Lambda}) = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$,) son diagonales por bloques, de tal manera que ψ_1 y ψ_2 NO se mezclan con ψ_3 y ψ_4. (Esto es cierto a pesar de que las matrices 4×4 γ^{μ} sí constituían una representación irreducible del álgebra de Dirac.) En la base de Weyl podemos descomponer entonces a los espinores de Dirac ψ en 2 subpaquetes $\psi_I \equiv \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, $\psi_D \equiv \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ conocidos como espinores de Weyl:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_I\\ \psi_D\end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{espinor izquierdo (= de 'quiralidad' negativa)} \\ \leftarrow \text{espinor derecho (= de 'quiralidad' positiva)}, \end{matrix}$$

que transforman por separado bajo Lorentz, con generadores

$$\boxed{\begin{matrix} S_I^{ij} \equiv \epsilon^{ijk}\sigma^k/2\,, & S_I^{oi} \equiv -i\,\sigma^i/2\,, \\ S_D^{ij} \equiv \epsilon^{ijk}\sigma^k/2\,, & S_D^{oi} \equiv +i\,\sigma^i/2\,, \end{matrix}} \quad \begin{matrix} \text{y} \\ \text{respectivamente.} \end{matrix}$$

ψ_I ó ψ_D son los espinores que nos son familiares del caso no relativista, donde NO teníamos S^{oi}, solo $S^{ij} \in su(2)$.

Reconocemos aquí que $S_I^{\mu\nu}$ ó $S_D^{\mu\nu}$ son los 6 generadores de $SL(2,\mathbb{C})$ en la rep 'fundamental' (es decir, la que define al grupo: matrices complejas 2×2 con determinante $= 1$ $\longleftrightarrow$ álgebra: matrices complejas 2×2 con traza $= 0$) que estudiamos en la Tarea 1. Pero $S_I^{\mu\nu}$ y $S_D^{\mu\nu}$ dan 2 irreps NO equivalentes de $SO^+(3,1)$ (y de $SL(2,\mathbb{C})$), es decir, No están conectados por un cambio de base. (Por otra parte, la rep de $S_I^{\mu\nu}$ resulta ser equivalente a la de $-S_D^{*\mu\nu}$.)

Bajo una transformación de Lorentz finita, los espinores de Weyl $\psi_{\substack{I\\D}}$ se multiplican entonces por las matrices

$$M_{\substack{I\\D}}(\underset{\sim}{\Lambda}) = \exp\left(i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} \pm \vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\right),$$

parámetro de empujón

elementos de $SL(2,\mathbb{C})$ (que como sabemos por la Tarea 1 es el grupo cubriente de $SO^+(3,1) = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$).
En particular, las rotaciones se implementan con matrices

$$\exp\left(i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \in SU(2) \quad (\text{el grupo cubriente de } SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2)$$

que coinciden con las matrices $D^{[1/2]}(\underset{\sim}{W})$ que construimos en la p. 88 para obtener la rep de espín $j = 1/2$ (proyectiva) de $SO(3)$.

Hemos aprendido entonces que los espinores de Dirac/Weyl transforman en una rep reducible/irreducible de $SL(2,\mathbb{C})$, y anticipamos ya que los campos correspondientes $\psi(x)/\psi_{I/D}(x)$ describirán partículas con espín $\frac{1}{2}$.

Otra notación común para los espinores de Weyl es

espinor izquierdo

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

espinor derecho

con $\alpha = 1,2$, conocida como notación de van der Waerden (espinores "con punto" y "sin punto").

dotted, undotted

Como veremos más adelante, la transformación de paridad P intercambia $\psi_I \leftrightarrow \psi_D$, así que los espinores de Dirac sí transforman en una rep irreducible de $O^+(3,1)$.

Conviene definir a la matriz de quiralidad

$$\boxed{\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$$

que satisface

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = +\mathbb{1},$$

$$(\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0$$

3 signos $-$ y 1 $+$, dado que $\mu \in \{0,1,2,3\}$

(de tal forma que $\gamma^4 \equiv i\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ sería la quinta matriz de Dirac necesaria para representar el álgebra de Dirac en 4+1 dimensiones — ver p. 228).

Como consecuencia de la anticonmutación con γ^μ, tenemos además

$$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = \frac{i}{4}[\gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu] - \frac{i}{4}[\gamma^5, \gamma^\nu\gamma^\mu]$$

$$= \frac{i}{4}\left(\cancelto{0}{\{\gamma^5, \gamma^\mu\}}\gamma^\nu - \gamma^\mu\cancelto{0}{\{\gamma^5, \gamma^\nu\}} - (\mu \leftrightarrow \nu)\right)$$

$$= 0 . \implies \gamma^5 \text{ es un Casimir}$$

$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

Dado que γ^5 no es un múltiplo de la identidad, esto nos da por el 'lema de Schur' otra manera (independiente de base) de ver que la rep de Dirac es una rep reducible del grupo de Lorentz.

En la base de Weyl se encuentra que γ^5 es diagonal,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

← esto es lo que tiene de útil la base de Weyl

irreps, respetando el lema de Schur

así que $\left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} \psi_I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$ tienen quiralidad $\left\{ \begin{matrix} \text{negativa} \quad \gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_I \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \psi_I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{positiva} \quad \gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_D \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$

domingo, 14 de octubre de 2007 01:17 p.m.

De hecho, dado un espinor de Dirac en cualquier base, podemos definir

$$\psi_I \equiv \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbb{1}-\gamma^5)}_{\begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ en base de Weyl}}\psi \,, \quad \psi_D \equiv \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbb{1}+\gamma^5)}_{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{1}\end{pmatrix} \text{ en base de Weyl}}\psi$$

y tendremos entonces la descomposición $\psi = \psi_I + \psi_D$

con $\gamma^5\psi_I = \frac{1}{2}(\gamma^5 - \mathbb{1})\psi = -\psi_I$, ← quiralidad negativa

$(\gamma^5)^2$

$\gamma^5\psi_D = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \mathbb{1})\psi = +\psi_D$. ← quiralidad positiva

Podemos notar que $\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1}\mp\gamma^5)\right)^2 = \frac{1}{2}(\mathbb{1}\mp\gamma^5)$, es decir, $\frac{1}{2}(\mathbb{1}\mp\gamma^5)$ son matrices de proyección $\left(\Rightarrow (\psi_{\substack{I\\D}})_{\substack{I\\D}} = \psi_{\substack{I\\D}}\right)$, con la mitad de sus eigenvalores $=0$ $\left(\Rightarrow \psi_{\substack{I\\D}} \text{ tiene 2 componentes}\right)$.

Para construir la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ para un campo de Dirac $\psi(x)$ (← un espinor en cada x), necesitamos saber cómo formar escalares a partir de los espinores de Dirac ψ y las matrices γ^μ. Dado que

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda} \psi' = M(\Lambda)\psi = \exp\left(\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi$$

(es decir, $\psi'_a = M_{ab}\,\psi_b$, con suma implícita sobre b),

$\psi' = M(\underset{\sim}{\Lambda})\psi = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})\psi$

tenemos

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \to \psi'^\dagger = \psi^\dagger M^\dagger(\underset{\sim}{\Lambda}) = \psi^\dagger \exp(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger})$$

(es decir, $\psi_a'^* = \psi_b^*(M^\dagger)_{ba} = \psi_b^*(M^*)_{ab}$).

$\left(\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right)^\dagger = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger},\gamma^{\nu\dagger}]$ $\quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0,\ (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

Como $S^{\mu\nu\dagger} \neq S^{\mu\nu}$ ($\Rightarrow M^\dagger \neq M^{-1}$) para empujones (p.231), concluimos que $\psi^\dagger\psi$ ($= \psi_a^*\psi_a$) $\underline{\underline{\text{no}}}$ es escalar.

Por otro lado, las matrices $S^{\mu\nu\dagger}$ también satisfacen el álgebra de Lorentz (porque las matrices $\gamma^{\mu\dagger}$ satisfacen el álgebra de Dirac, $\{\gamma^{\mu\dagger},\gamma^{\nu\dagger}\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$), por lo que deben estar relacionadas con las $S^{\mu\nu}$ a través de una transformación de semejanza.

Y efectivamente, notando que (p.230)

$$\left.\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 = \gamma^0(\gamma^0)\gamma^{0\,-1} \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i = \gamma^0(\gamma^i)\underbrace{\gamma^{0\,-1}}_{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^{0\,-1}$$

es decir, $\boxed{\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu}$

γ^0 sirve para 'daguear' o 'desdaguear'

vemos que

$$S^{\mu\nu\dagger} = -\frac{i}{4}[\gamma^{\nu\dagger},\gamma^{\mu\dagger}] = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu\dagger},\gamma^{\nu\dagger}]$$

$$= \frac{i}{4}[\gamma^0\gamma^\mu\gamma^{0\,-1}, \gamma^0\gamma^\nu\gamma^{0\,-1}] = \gamma^0 S^{\mu\nu}\gamma^{0\,-1},$$

o lo que es lo mismo, $S^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu}$. ← aquí de nuevo, γ^0 daguea y desdaguea

Así que si definimos el espinor conjugado de Dirac

$$\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0}$$

Tendremos

$$\psi \xrightarrow{\Lambda} \psi' = \exp\left(\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi = M(\Lambda)\psi,$$

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger \exp\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger}\right)\gamma^0$$

$$= \psi^\dagger\left(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger}\right)\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda\dagger}\right) + \dots\right)\gamma^0$$

$$= \psi^\dagger\gamma^0\left(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\rho\lambda}S^{\rho\lambda}\right) + \dots\right)$$

$$= \psi^\dagger\gamma^0 \exp\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$$

$$= \bar{\psi}\exp\left(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) = \bar{\psi}M(\Lambda)^{-1}.$$

Y dados 2 espinores de Dirac ψ y χ, la combinación $\bar{\psi}\chi$ $\left(\equiv \bar{\psi}_a\chi_a = \psi^*_b\gamma^0_{ba}\chi_a\right)$ es un escalar: $\bar{\psi}'\chi' = \bar{\psi}M^{-1}M\chi = \bar{\psi}\chi$.

L21: 26/09/22

De manera similar, notando que nuestro resultado previo

$$[\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}] = i\left(\eta^{\mu\lambda}\delta^\rho_\nu - \eta^{\mu\rho}\delta^\lambda_\nu\right)\gamma^\nu \quad \text{(p.224)}$$

$$= \left(J^{(\lambda\rho)}\right)^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu$$

$S^{\lambda\rho}$ mezcla las 4 γ^μ entre sí como un cuadrivector

↑ generador de Lorentz en rep vectorial (p.40) martes, 16 de octubre de 2007 08:20 p.m.

índice vectorial

podemos ver cómo transforma $\bar\Psi \gamma^\mu \chi \equiv \underbrace{\bar\Psi_a \gamma^\mu_{ab} \chi_b}$:

NO quedan índices espinoriales libres

p. 238

$$\bar\Psi' \gamma^\mu \chi' = \bar\Psi M^{-1} \gamma^\mu M \chi$$

$$= \bar\Psi \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}\right) \gamma^\mu \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\sigma\tau} S^{\sigma\tau}\right) \chi$$

p. 62

$$\overset{BCH}{=} \bar\Psi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left[-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}, \gamma^\mu\right]_n} \chi$$

$$\equiv \left[-\frac{i}{2}\omega_{\lambda_1\rho_1} S^{\lambda_1\rho_1}, \left[\cdots, \underbrace{\left[-\frac{i}{2}\omega_{\lambda_n\rho_n} S^{\lambda_n\rho_n}, \gamma^\mu\right]}_{\left(+\frac{i}{2}\omega_{\lambda_n\rho_n} J^{(\lambda_n\rho_n)}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu} \overbrace{\left]\cdots\right]}^{n}\right.\right.$$

p. 238

no tiene índices a, b

$$= \left(\left(+\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho} J^{(\lambda\rho)}\right)^n\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$= \bar\Psi \underbrace{\left(\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho} J^{(\lambda\rho)}\right)\right)^\mu{}_\nu} \gamma^\nu \chi$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu \bar\Psi \gamma^\nu \chi .$$

Es decir, gracias a que $\boxed{M^{-1}\gamma^\mu M = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu}$,

$\bar\Psi \gamma^\mu \chi$ transforma como un vector bajo Lorentz.

Evidentemente, si definimos $\gamma_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu = (\gamma^0, -\vec\gamma)$,

$\bar\Psi \gamma_\mu \chi$ transforma como un vector dual.

19: 21/09/18

Tomando productos de las γ^μ podremos formar también tensores. Y de hecho, dado que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \underbrace{\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}_{\equiv \gamma^{\mu\nu} (= -2i S^{\mu\nu})} + \underbrace{\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{\eta^{\mu\nu}} \quad ,$$

$\leftarrow$ matriz $\mathbb{1}$ implícita

para cubrir todas las posibilidades basta con considerar productos totalmente antisimétricos:

$$\gamma^{\mu_1 \cdots \mu_n} \equiv \frac{1}{n!}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3} \cdots \gamma^{\mu_n} - \gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_3} \cdots \gamma^{\mu_n} + \ldots\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si 2 o más índices se repiten} \\ \gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3} \cdots \gamma^{\mu_n} & \text{si no se repiten} \end{cases} .$$

Sabiendo que μ solo puede tomar 4 valores distintos, vemos que las únicas posibilidades independientes son

$n=0$: $\mathbb{1}$ $\leftarrow$ 1 matriz

$n=1$: γ^μ $\leftarrow$ 4 matrices

$n=2$: $\gamma^{\mu\nu}$ $\leftarrow$ $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ matrices

$n=3$: $\gamma^{\mu\nu\lambda}$ $\leftarrow$ $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 4$ matrices

$n=4$: $\gamma^{\mu\nu\lambda\rho}$ $\leftarrow$ 1 matriz .

L18: 15/03/17