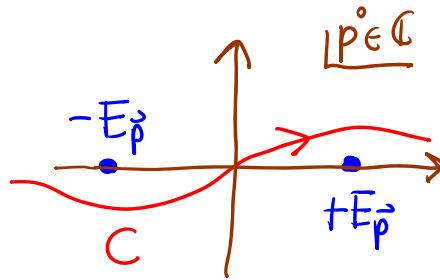


Si en el segundo término cambiamos la variable de integración $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, obtenemos

$$G(x'-x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \left[\theta(x'-x^0) \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x'-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} + \theta(x^0-x') \frac{e^{+iE_{\vec{p}}(x'-x^0)}}{2E_{\vec{p}}} \right]$$

Observemos ahora que el factor entre corchetes se puede reescribir en la forma

$$- \int_C \frac{d\tilde{p}^0}{2\pi i} \frac{e^{-i\tilde{p}^0(x'-x^0)}}{(\tilde{p}^0 - E_{\vec{p}})(\tilde{p}^0 + E_{\vec{p}})},$$

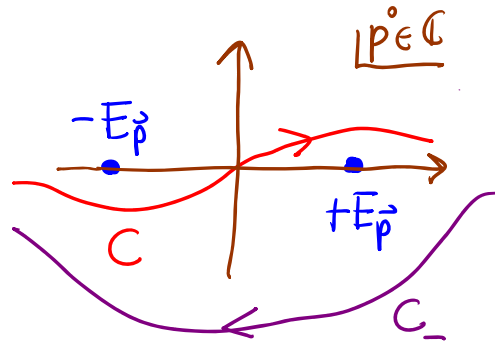


donde C es el contorno que se indica en la figura.

Para verificar que esto es cierto, basta con hacer la integral sobre \tilde{p}^0 usando la fórmula de Cauchy

$$\left(\oint \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \text{ para } f \text{ analítica} \right), \text{ notando que:}$$

i) Si $x^0 > x'$, podemos cerrar el contorno de integración por abajo (ya que $\lim_{\text{Im } \tilde{p}^0 \rightarrow -\infty} e^{-i\tilde{p}^0(x'-x^0)} = 0$), obteniendo así



$$-\oint_{C+C_-} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E_p^0)(p^0+E_p^0)} = + \frac{e^{-iE_p^0(x'^0-x^0)}}{2E_p^0}, \quad \checkmark$$

↑ polos simple

que coincide exactamente con el factor que multiplicaba a $\theta(x'^0-x^0)$ en la expresión entre corchetes.

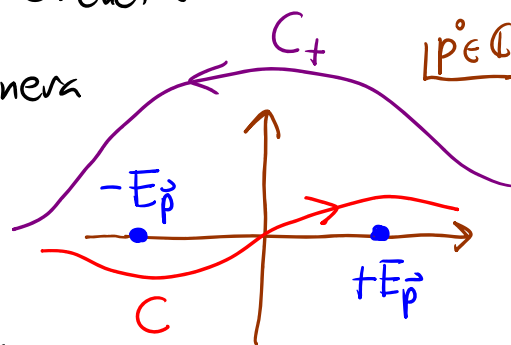
ii) Si $x^0 > x'^0$, podemos de manera

similar cerrar el contorno por

arriba, lo que resulta en

$$-\oint_{C+C_+} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x'^0-x^0)}}{(p^0-E_p^0)(p^0+E_p^0)} = - \frac{e^{-i(-E_p^0)(x'^0-x^0)}}{2(-E_p^0)}, \quad \checkmark$$

↑ polos simple

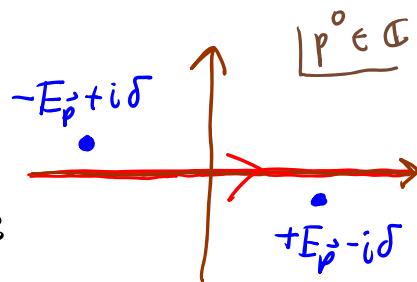


que coincide con el factor que multiplicaba a $\theta(x^0-x'^0)$.

Conviene notar que integrar sobre el contorno complejo C , cuando los polos están en $p^0 = \pm E_p^0 \in \mathbb{R}$, equivale

a integrar p^0 sobre el eje real y desplazar

los polos a $p^0 = \pm(E_p^0 - i\delta)$, en el entendido de que



tomaremos $\delta \rightarrow 0_+$ después de hacer la integral.

Dado que

$$\begin{aligned}
 [p^0 - (E_{\vec{p}} - i\delta)] [p^0 + (E_{\vec{p}} - i\delta)] &= (p^0)^2 - (E_{\vec{p}} - i\delta)^2 \\
 &= (p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i2E_{\vec{p}}\delta + \mathcal{O}(\delta^2) \\
 &= \underbrace{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2}_{p^2 - m^2} + \underbrace{i2E_{\vec{p}}\delta}_{\equiv +i\epsilon} + \mathcal{O}(\delta^2)
 \end{aligned}$$

con $\epsilon \rightarrow 0_+$ al final

podemos escribir

$$- \int_C \frac{d^4 p}{2\pi i} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{2\pi i} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

y hemos mostrado entonces que la amplitud combinada para la partícula/antipartícula está dada por

$$G(x' - x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

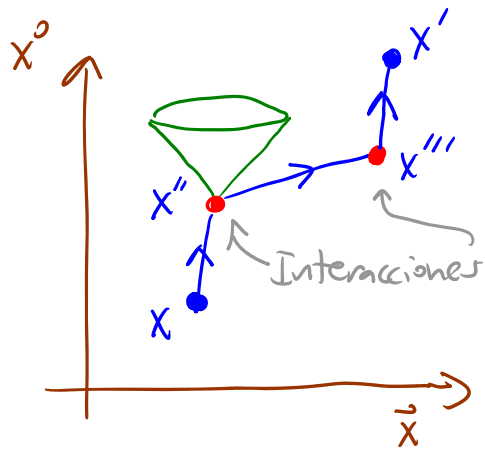
Propagador
de Feynman

Figura aquí partícula con energía $p^0 \neq E_{\vec{p}} \leftrightarrow p^2 \neq m^2$
 ("fuerza de la capa de masa"), lo cual como hemos visto es un truco matemático para incorporar $\Theta(t' - t)$ y $\Theta(t - t')$.

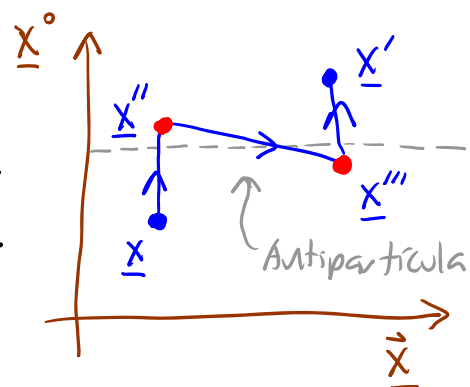
Más adelante veremos que es posible reproducir este propagador a partir de un campo escalar $\varphi(x)$.

Hasta ahora hemos hablado de una partícula libre.
 Por supuesto nos interesará más analizar partículas
 que interactúan entre sí o con un potencial externo.

Si estas interacciones son débiles, tiene sentido
 describirlas en un tratamiento
perturbativo, donde la amplitud de
 propagación de x a x' se obtiene
 considerando intervalos de propagación
 libre hasta puntos intermedios donde



se toma en cuenta el efecto de las interacciones, como
 en el ejemplo mostrado en la figura. Interesantemente,
 si $(x'' - x''')^2 < 0$, entonces existe un
 marco \underline{O} donde \underline{x}''' antecede a \underline{x}'' ,
 y entre \underline{x}'''^0 y \underline{x}''^0 ¡el observador
 ve no 1 sino 3 partículas!



Resulta inevitable entonces considerar procesos donde uno
 o más pares partícula-antipartícula se crean o destruyen.

Dado que el número de partículas puede cambiar, el propagador $\langle x'|x \rangle$ no incluye toda la información relevante: debemos preguntarnos no solo cuál es la amplitud de que

1 partícula en $x \rightarrow 1$ partícula en x' ,

sino más en general, cuál es la amplitud de que

N (anti)partículas en $x_1, \dots, x_N \rightarrow N'$ (anti)partículas en $x'_1, \dots, x'_{N'}$
para cualquier elección de $N, N' \geq 0$.

(Como veremos más adelante, en el lenguaje de campos esta información estará en esencia codificada en

las "funciones de correlación" $\sim \langle \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x'_1) \hat{\phi}(x'_2) \dots \rangle$.)

Posteriormente, esta noción, en espacio de momentos, dará lugar al concepto de "amplitud de dispersión"

(ó "matriz S "). La principal moraleja de todo esto es que, para hablar de partículas cuánticas relativistas interactuantes, necesitamos un formalismo en el que el número de partículas pueda cambiar! Muy diferente al caso no relativista,

L2: 10/08/22 L2: 08/08/18 L2: 01/02/17

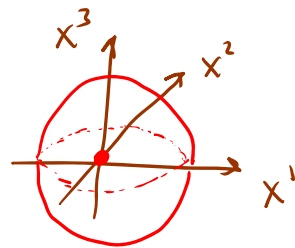
Grupos de Lorentz y Poincaré

En mecánica cuántica no relativista, al hablar de, p.ej., el átomo de hidrógeno, el grupo de rotaciones $SO(3)$ ó $SU(2)$ juega un papel importante, por ser una simetría del sistema.

En nuestro caso deseamos hablar de particular relativistas, y nuevamente, el grupo de simetría asociado jugará un papel importante.

Como punto de partida, supondremos en este curso que el espaciotiempo es plano, lo cual evidentemente no es estrictamente cierto, pero constituye una excelente aproximación para los experimentos usuales de física de partículas.

De acuerdo con la relatividad especial, para cualesquiera 2 sistemas inerciales S y S' (que tomaremos con orígenes coincidentes en $t=t'=0$), $c=1$ para un frente de luz esférico implica que $\vec{x}^2 = t^2$, $\vec{x}'^2 = t'^2$, es decir,



$$(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = 0 = (X'^0)^2 - (X'^1)^2 - (X'^2)^2 - (X'^3)^2.$$

El cambio de coordenadas de S a S' debe ser lineal (por homogeneidad del espacio/tiempo) y se caracteriza entonces precisamente por preservar este intervalo relativista

$$X^2 \equiv X \cdot X \equiv (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \equiv \begin{cases} (\text{tiempo propio})^2 & \text{si } X^2 > 0 \\ -(\text{distancia propia})^2 & \text{si } X^2 < 0 \end{cases}$$

Si no fuera por los signos, esto sería (el cuadrado de) la norma usual de un vector 4-dimensional $X^{\mu} \equiv (X^0, X^1, X^2, X^3)$:

$|X|^2 \equiv \sum_{\mu=0}^3 X^{\mu} X^{\mu}$, y las transformaciones que la preservan serían rotaciones en 4 dimensiones.

En lugar de esto, tenemos una nueva definición de norma,

$$\|X\|^2 \equiv X \cdot X \equiv X^{\mu} \underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\equiv X_{\nu}} X^{\nu} \quad \leftarrow \text{Suma sobre índices repetidos (arriba y abajo) implícita}$$

con

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

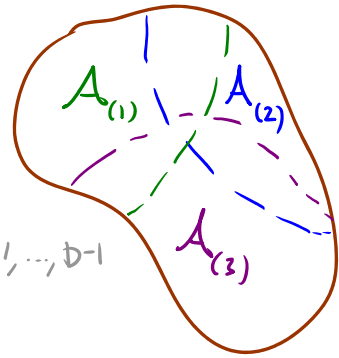
Métrica de Minkowski

(con signatura +--- de partícula)

Ya que necesitamos para nuestra discusión los conceptos de vector, tensor, métrica, etc., vale la pena de una vez enunciar su definición en el contexto más general.

Definimos primero una variedad diferenciable ^{manifold} D -dimensional

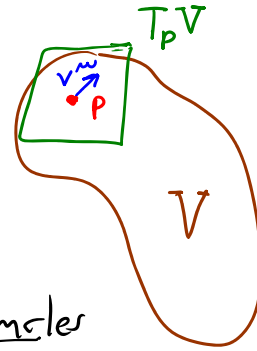
V como un espacio que se parece 'por cachos' a \mathbb{R}^D , de tal manera que podemos asignarles coordenadas $x_{(r)}^m$ a puntos en distintas regiones abiertas



$A_{(r)}$, $r=1,2,\dots$, asegurándonos de que todos los mapas $x_{(r)}^m \mapsto x_{(s)}^m$ definidos en las regiones de traslape $A_{(r)} \cap A_{(s)}$ sean diferenciables.

Con esto logramos tener la noción usual de derivada en cada punto, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Pero es importante notar que \underline{V} no es un espacio vectorial: no incorpora una definición natural de la suma de 2 puntos. Así que, a diferencia de lo que sucede en \mathbb{R}^D , las propias coordenadas x^m no son vectores.

Por otro lado, en la vecindad inmediata de cualquier punto $p \in V$, el espacio es por definición una copia de \mathbb{R}^D , así que debe existir alguna noción de vectores pensados intuitivamente como desplazamientos infinitesimales



en torno a p . Esto se implementa definiendo a un vector (contravariante) en el punto p , como una colección V de D números v^m que bajo un cambio de coordenadas o difeomorfismo $x^m \rightarrow x'^m(x^y)$, se mezclan de acuerdo con

$$V^m \rightarrow V'^m \equiv \frac{\partial x'^m}{\partial x^y} \Big|_p V^y.$$

← así transforman los desplazamientos infinitesimales dx^m

Recordando que las rotaciones en \mathbb{R}^3 y las transformaciones de Lorentz en $\mathbb{R}^{3,1}$ son cambios de coordenadas lineales, vemos que esta definición coincide con la familiar para vectores \vec{v} o V^m . Claramente, el conjunto de todos los vectores definidos en un punto dado si forman un espacio vectorial (que se denota $T_p V$, y se conoce como el 'espacio tangente a V en p '), pero nuevamente es importante resaltar que no hay de

entonces una manera de sumar vectores definidos en distintos puntos $p, p' \in V$.

De manera similar, llamamos vector dual (o vector covariante, covector, o uno-forma) en $p \in V$ a una colección ω de D números ω_μ que transforman de acuerdo con

$$\omega_\mu \rightarrow \omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \Big|_p \omega_\nu,$$

y más en general, llamamos tensor de rango (m, n) en $p \in V$ a una colección \underline{T} de D^{m+n} números tales que

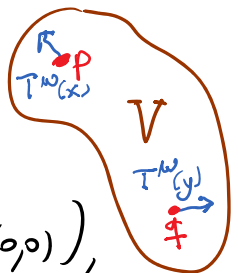
$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\lambda_m}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

Utilizaremos también la noción de campo tensorial, $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x)$, que se refiere a la elección de un tensor en cada punto $p \in V$.

Notemos que los ω_μ en verdad son 'vectores duales', en el sentido de que mapean vectores V^μ a números —

$\omega(v) \equiv \omega_\mu v^\mu$ es un escalar (un tensor de rango $(0,0)$), invariante bajo difeos: $\omega'_\mu v'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \omega_\nu v^\rho = \omega_\nu v^\nu$.

Componentes de matriz identidad: $\delta^\nu_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \rho \\ 0 & \text{si } \nu \neq \rho \end{cases}$



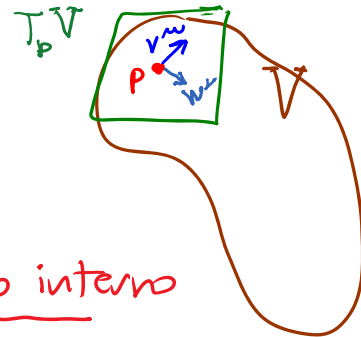
Más en general, la 'contracción'

$T_{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_m}^{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_n}$ es un tensor de rango $(m-1, n-1)$.

Sobre una variedad diferenciable V , una métrica se define como un campo tensorial de rango $(0,2)$, \leftrightarrow ^{matriz} $D \times D$

$g_{\mu\nu}(x)$, que es simétrico ($g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$) y 'no degenerado' (ver abajo). Es decir, bajo un cambio de coordenadas arbitrario $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu}(x')$, la métrica transforma de acuerdo con

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho}(x).$$

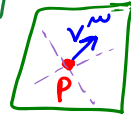


Este objeto define sobre V un producto interno

(invar. bajo difeas) $v \cdot w \equiv v^{\mu} g_{\mu\nu} w^{\nu}$, y por lo tanto

una norma $\|v\|^2 \equiv v^2 \equiv v \cdot v$. Dado que los vectores representan desplazamientos infinitesimales, la métrica, al fijar su tamaño, nos da una noción de distancia sobre V .

Para describir al espaciotiempo, nos interesa el caso de una métrica "lorentziana", donde la matriz $g_{\mu\nu}$ tiene

$T_p V$ 

$v^2 > 0$ tipo tiempo
 $v^2 = 0$ nulo
 $v^2 < 0$ tipo espacio

en cada punto 1 autovector positivo y $D-1$ autovectores negativos. A través de esta información, la métrica codifica la "estructura causal" sobre V , es decir, distingue la direcciones temporales de las espaciales (y define las conas de luz).

El que la métrica sea 'no degenerada' se refiere a que tengamos $v \cdot w = v^\mu g_{\mu\nu} w^\nu = 0 \quad \forall v$ solo si $w = 0$.

Esto implica en particular que, en cada punto dado,

la matriz $g_{\mu\nu}(x)$ es invertible. Denotaremos su

inverso como $g^{\mu\nu}(x)$ ($g^{\mu\nu}(x) g_{\nu\lambda}(x) = \delta^\mu_\lambda = g_{\lambda\nu}(x) g^{\nu\mu}(x)$).

Podemos usar $g_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu}$ para establecer una correspondencia biunívoca entre vectores y vectores duales,

$$V_\mu \equiv g_{\mu\nu}(x) V^\nu$$

$$\longleftrightarrow \underbrace{W^\mu = g^{\mu\nu}(x) W_\nu}_{\leftarrow \text{en genal. } \neq g^{\mu\nu}(x)}$$

Esto funciona porque, como es fácil verificar, $g^{\mu\nu}$ es un tensor de rango (2,0).

o más en general, para subir y bajar índices de cualquier tensor.

≡ variedad diferencial
en métrica lorentziana

Regresemos ahora al caso de un espaciotiempo plano con $D=4$, donde la métrica (en coordenadas cartesianas) es la de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. En este caso $g^{\mu\nu}$ coincide numéricamente con $\eta_{\mu\nu}$, pero de cualquier manera la denotaremos $\eta^{\mu\nu}$ para seguirle la pista a la subida y bajada de índices:

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu = (V_0, -V_1, -V_2, -V_3), \quad \omega^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \omega_\nu = (\omega_0, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_3).$$

Hemos dicho ya que las transformaciones entre sistemas inerciales preservan la norma de Minkowski $\|v\|^2 = v^\mu \eta_{\mu\nu} v^\nu \forall v$, es decir, dejan invariante a la métrica $\eta_{\mu\nu}$:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \eta_{\lambda\rho} = \eta_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \text{ó, en notación matricial, } \bar{x}' = \underbrace{\Lambda}_{\substack{\uparrow \text{matriz} \\ \downarrow \text{cuadrivectores}}} \bar{x} + \bar{a}$$

\uparrow Matriz 4×4 constante $\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow x^\lambda = (\Lambda^{-1})^\lambda_\sigma (x'^\sigma - a^\sigma), \quad \text{es decir } \bar{x} = \tilde{\Lambda}^{-1} (\bar{x}' - \bar{a}),$$

$$\text{con } (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu (\Lambda^{-1})^\rho_\nu \eta_{\lambda\rho} = (\Lambda^{-1T})^\lambda_\mu \eta_{\lambda\rho} (\Lambda^{-1})^\rho_\nu = \eta_{\mu\nu},$$

es decir, $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1 T} \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} = \underset{\sim}{\eta}$, o lo que es lo mismo,

$$\boxed{\underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\eta}} \quad (\text{cf. rotaciones: } \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{\mathbb{1}} \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{\mathbb{1}}) \quad (1)$$

↑ Matrices ortogonales

Tales $\underset{\sim}{\Lambda}$'s especifican lo que conocemos como transformaciones de Lorentz. Los vectores a^μ claramente especifican traslaciones (=traslaciones) en el espaciotiempo. Por ahora estudiaremos solo el caso $a^\mu = 0$.

Es fácil comprobar que las transformaciones de Lorentz forman un grupo:

- Si $\bar{x}' = \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)} \bar{x}$ y $\bar{x}'' = \underset{\sim}{\Lambda}^{(2)} \bar{x}' = \underset{\sim}{\Lambda}^{(2)} \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)} \bar{x}$, donde $\underset{\sim}{\Lambda}^{(1)}$ y $\underset{\sim}{\Lambda}^{(2)}$ satisfacen (1), entonces $\underset{\sim}{\Lambda}^{(3)} \equiv \underset{\sim}{\Lambda}^{(2)} \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)}$ satisface (1).
- Si $\underset{\sim}{\Lambda}$ satisface (1), entonces $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1}$ también (y $\therefore \underset{\sim}{\mathbb{1}}$)

Notar por cierto que la ec. (1), $\underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta} \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\eta}$, implica que $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1} = \underset{\sim}{\eta}^{-1} \underset{\sim}{\Lambda}^T \underset{\sim}{\eta}$, es decir, $\boxed{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\lambda} \underset{\sim}{\Lambda}^\rho{}_\lambda \eta_{\rho\nu} = \underset{\sim}{\Lambda}^\rho{}_\nu}$.

(↑ $(\Lambda^T)^\rho{}_\lambda$)

Por analogía con el grupo de rotaciones $O(4)$ (matrices ortogonales 4×4), llamamos a este grupo $O(3,1)$ (o $O(1,3)$), el grupo de Lorentz.

Notar que $\tilde{\Lambda}^T \tilde{\eta} \tilde{\Lambda} = \tilde{\eta} \Rightarrow \underbrace{\det \tilde{\Lambda}^T}_{\det \tilde{\Lambda}} \det \tilde{\eta} \det \tilde{\Lambda} = \det \tilde{\eta}$, ec. (1)

de modo que $\boxed{\det \tilde{\Lambda} = \pm 1}$: transformaciones $\begin{cases} \text{"propias"} \\ \text{"impropias"} \end{cases}$

Las transformaciones con $\det \tilde{\Lambda} = +1$ forman un subgrupo de $O(3,1)$, que denotamos $SO(3,1)$ (análogo a $SO(4)$). \uparrow matrices "especiales"

Además, la componente 00 de la ec. (1) dice que

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2 = 1,$$

así que toda $\tilde{\Lambda}$ debe tener $\boxed{\Lambda^0_0 \geq 1 \text{ ó } \Lambda^0_0 \leq -1}$.

Las que satisfacen la primera condición se conocen como transformaciones ortócronas (porque preservan la dirección del tiempo), y forman otro subgrupo de $O(3,1)$, que denotamos $O^+(3,1)$.

Las $\tilde{\Lambda}$'s que son a la vez propias y ortócronas forman el llamado grupo de Lorentz restringido, $SO^+(3,1)$ (muchas veces denotado simplemente $SO(3,1)$).

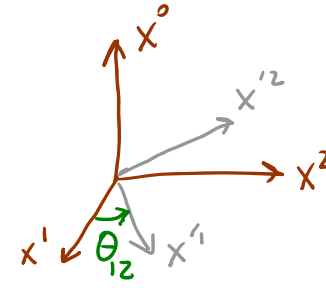
$\llcorner 3:12/08/22$

Entre las transformaciones $\Lambda \in SO^+(3,1)$, tenemos:

- Rotaciones en el plano 1-2 (ó 1-3, ó 2-3):

$${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ 0 & -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$0 \leq \theta_{12} < 2\pi$



Estas 3 rotaciones y sus productos forman el subgrupo más familiar $SO(3) \subset SO^+(3,1) \subset SO(3,1) \subset O(3,1)$.

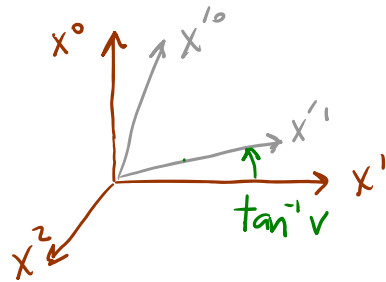
- Empujones ("boosts") en la dirección 1 (ó 2 ó 3):

$${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & -\sinh\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha_1 & \cosh\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"rapidez"
 rapidity

$$\begin{cases} \cosh\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma \\ \sinh\alpha_1 = \gamma v \end{cases} \quad (-1 < v < 1)$$

$-\infty < \alpha_1 < \infty$



← Estas son las transformaciones DE Lorentz originarias

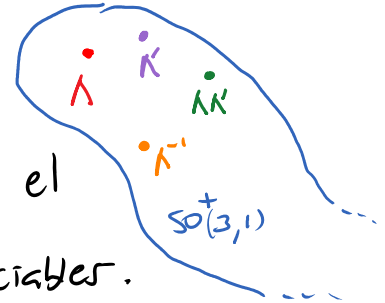
Los 3 empujones y sus productos no forman un subgrupo.

Como veremos en breve, cualquier $\Lambda \in SO^+(3,1)$ se puede escribir como un producto de estas 6 transformaciones prototípicas.

Este es entonces un grupo continuo: sus elementos se

pueden especificar con una elección de 6 parámetros reales (p.ej., $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$). De hecho $SO^+(3,1)$ es un ejemplo de lo que se conoce como un

grupo de Lie: es una variedad diferenciable (6-dimensionsal) con estructura de grupo, donde el producto y el inverso definen mapas diferenciables.



Más aún, es un grupo no Abelian (hay elementos que no conmutan entre sí), no compacto (el rango de los parámetros continuos NO es acotado y cerrado), y conexo (partiendo de cualquier punto se puede llegar a cualquier otro), aunque no simplemente conexo (hay trayectorias que a pesar de que empiezan y terminan en el mismo punto, no se pueden encoger hasta desaparecer). ← ver más adelante

Comparando el grupo de Lorentz con su subgrupo restringido, se encuentra que cualquier elemento de $O(3,1)$ se puede escribir como el producto de una $\Lambda \in SO^+(3,1)$ y un elemento del grupo discreto $\{\tilde{1}, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{PT}\}$, donde

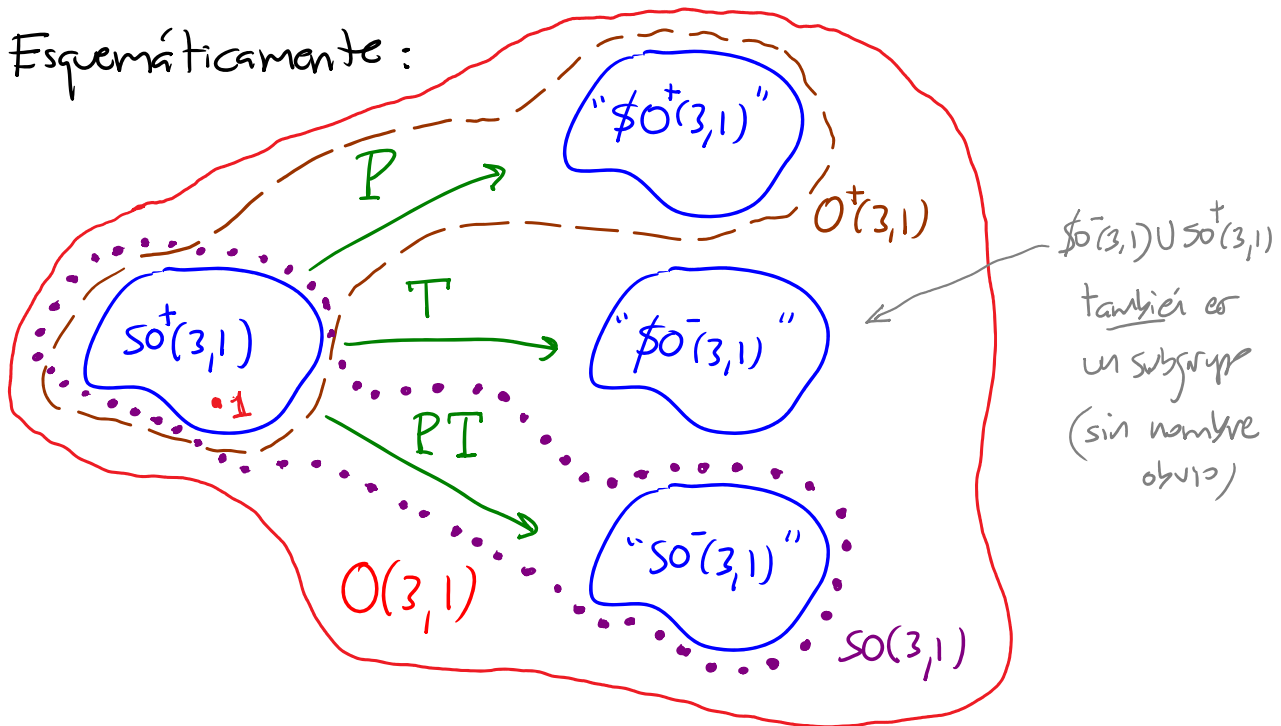
$$\tilde{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Paridad (inversión espacial),}$$

$$\tilde{P}^2 = \tilde{1}$$

$$\tilde{T} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Inversión temporal}$$

$$\tilde{T}^2 = \tilde{1}, \quad \tilde{PT} = \tilde{TP}$$

Esquemáticamente:



$O(3,1)$ es entonces un grupo de Lie no compacto y no conexo (tiene 4 componentes conexas).

23: 10/08/18

Es posible entender a $SO^+(3,1)$ con base en transformaciones que difieren infinitesimalmente de la identidad:

$$SO^+(3,1)$$

$\omega \uparrow \downarrow 1$

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{1} + \tilde{\omega} \iff \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \text{ con } |\omega^\mu{}_\nu| \ll 1.$$

El punto es que haciendo muchas transformaciones infinitesimales sucesivas obtendríamos una transformación

finita. En el caso infinitesimal, la condición $\tilde{\Lambda}^T \tilde{\eta} \tilde{\Lambda} = \tilde{\eta}$,

es decir, $(\Lambda^T)^\mu{}_\lambda \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\lambda\rho}$, implica que

$$(\delta^\mu{}_\lambda + \omega^\mu{}_\lambda) \eta_{\mu\nu} (\delta^\nu{}_\rho + \omega^\nu{}_\rho) = \eta_{\lambda\rho}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\eta_{\lambda\rho} + \omega_{\rho\lambda} + \omega_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\omega^2)} = \eta_{\lambda\rho}$$

es decir, $\boxed{\omega_{\rho\lambda} = -\omega_{\lambda\rho}}$.

Una matriz 4×4 real y antisimétrica

tiene 6 componentes independientes,

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

justo el número de parámetros continuos

independientes que antes dijimos que especifican una

transformación de Lorentz general: 3 ángulos de rotación

θ_{ij} + 3 parámetros de rapidez α_i . ✓

De hecho, podemos ver la propiedad de antisimetría directamente en las matrices de rotaciones ${}^{(ij)}\Lambda(\theta_{ij})$ y empujones ${}^{(0i)}\Lambda(\alpha_i)$ si tomamos $\theta_{ij}, \alpha_i \ll 1$.

Encontramos, p.ej., ${}^{(12)}\Lambda(\theta_{12}) = \mathbb{1} + {}^{(12)}\omega(\theta_{12})$, con

$${}^{(12)}\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} & 0 & 0 \\ -\theta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \theta_{12} \ll 1$$

por convención útil para cuántica

$$= \theta_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \theta_{12} i J^{(12)} \equiv -\theta_{12} i J^{(21)}$$

índices μ, ν

Especifica magnitud de transformación

Especifica tipo de transformación

Generador de rotación en el plano 1-2 (índices μ, ν)

y de manera similar, ${}^{(01)}\Lambda(\alpha_1) = \mathbb{1} + {}^{(01)}\omega(\alpha_1)$, con

$${}^{(01)}\omega = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \alpha_1 i J^{(01)} \equiv -\alpha_1 i J^{(10)}$$

índices μ, ν

antisimétrica tras bajar índice

Generador de empujón en la dirección 1

El resultado general es

$$i J_{\mu\nu}^{(p\lambda)} = -\delta_{\mu}^p \delta_{\nu}^{\lambda} + \delta_{\nu}^p \delta_{\mu}^{\lambda}$$

L3: 03/02/17

antisimétrico bajo $\mu \leftrightarrow \nu$

← generador de Lorentz en el plano $p\lambda$