

Sabiendo que el operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ satisface nuevamente la ec. de Klein-Gordon, podemos otra vez desarrollarlo en la forma

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

"frecuencias positivas" \nearrow $\neq \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, puesto que $\hat{\varphi}^\dagger \neq \hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

donde las \hat{a} 's y \hat{b} 's satisfacen entonces

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger],$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger]$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}] = [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger].$$

usualer, gracias a que $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}$ son coef. de ondas planas con frecuencias positivas

Es decir, obtenemos no 1 sino 2 pares independientes de operadores de creación/aniquilación. Este campo describe entonces simultáneamente a 2 tipos distintos de partículas,

LU: 19/05/22

que tienen la misma masa m . Por lo que aprendimos en la etapa anterior del curso, esperamos que estos 2 objetos que aparecen empaquetados en el mismo campo sean respectivamente partícula y antipartícula, es decir, $\hat{a}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}n}$, $\hat{b}_{\vec{p}} \equiv \hat{a}_{\vec{p}\bar{n}}$. Y en efecto, sabemos que al agregar términos de interacción hermitianos a \hat{H} , como pej. $(\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi})^2$, tendríamos procesos de creación/aniquilación por pares $n-\bar{n}$ (como vimos antes). Pero, ¿cuál es la carga conservada que distingue a n y \bar{n} ?

Recordando el teorema de Noether, una posibilidad sería que se tratara de la carga asociada a una simetría continua. Y examinando $S(\varphi) = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x (\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi)$, podemos ver que efectivamente es invariante no solo bajo Poincaré, sino también bajo la transformación internas

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) = e^{i\eta\theta} \varphi(x) \\ \varphi^*(x) &\rightarrow \varphi'^*(x) = e^{-i\eta\theta} \varphi^*(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Grupo de simetría} \\ U(1) \end{array}$$

η es número fijo, elegido por convención, y caracteriza a φ : carga (no separar η equivale a $\eta=1$) θ es parámetro de la rotación \downarrow obligatorio si se fuerza real

El efecto de la rotación sobre φ desaparece si $\eta \rightarrow 0$.

↙ el cambio de fase $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\vartheta} \varphi$

Esto equivale a mezclar entre sí las partes real e imaginaria de $\varphi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x))$ a través de una rotación abstracta:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

rotación en espacio de campos

↙ número fijo, elegido por convención
↙ parámetro de la transformación
↙ matriz de $SO(2) \cong U(1)$

Para deducir la correspondiente carga de Noether, notamos que en la versión infinitesimal de esta transformación, $\varphi'(x) = e^{i\vartheta} \varphi(x)$ con $\vartheta = \omega \ll 1$, se tiene $\delta x^\mu \equiv x'^\mu - x^\mu = 0 \leftarrow \equiv \chi^\mu(x)$,

$$\delta\varphi(x) \equiv \varphi'(x) - \varphi(x) = \omega i\vartheta \varphi(x) \quad \text{y} \quad \delta\varphi^*(x) \equiv \varphi'^*(x) - \varphi^*(x) = \omega(-i\vartheta \varphi^*(x))$$

1 solo valor de α \rightarrow $\underbrace{\quad}_{\equiv \Phi(x)}$ \quad $\underbrace{\quad}_{\equiv \Phi^*(x)}$

así que, a partir de nuestra fórmula general (10)

(p. 169), obtenemos 1 corriente conservada

$$J^\mu(x) \equiv -\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \Phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}$$

↙ Notar la suma sobre los 2 campos independientes

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

$$J^\mu(x) = -i\vartheta \varphi \partial^\mu \varphi^* + i\vartheta \varphi^* \partial^\mu \varphi \quad \equiv \quad i\vartheta \varphi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \varphi$$

(que efectivamente satisface

$$\partial_\nu J^\nu = \cancel{-i\vartheta \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi^*} - \cancel{i\vartheta \varphi \partial^2 \varphi^*} + \cancel{i\vartheta \partial_\nu \varphi^* \partial^\nu \varphi} + \cancel{i\vartheta \varphi^* \partial^2 \varphi} = 0 \quad \checkmark$$

$\underbrace{\quad}_{-m^2 \varphi^*} \leftarrow \text{por E-L} \rightarrow \underbrace{\quad}_{-m^2 \varphi}$

116: 14/05/18

$$J^0(x) = -i \underbrace{\varphi \partial^0 \varphi^*}_{\pi} + i \underbrace{\varphi^* \partial^0 \varphi}_{\pi^*}$$

y la carga conservada asociada

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x) = i \int d^3x \varphi (\varphi^* \pi^* - \varphi \pi) \quad Q^* = Q$$

El operador correspondiente a nivel cuántico es
orden normal: medir carga con respecto a k
carga del $u(4)$

$$\hat{Q} \equiv i \int d^3x \varphi : (\hat{\varphi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \hat{\pi} \hat{\varphi}) :$$

$$\hat{\varphi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t})$$

$$\hat{\pi} = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \sqrt{\frac{E_{p'}}{2}} i (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t})$$

$$= i \int d^3x \varphi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}} \left\{ \right.$$

$$e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{p}'\cdot\vec{x}} : (\hat{a}_{\vec{p}} e^{iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-iE_p t}) (-i) (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{iE_{p'} t}) :$$

$$- e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\vec{p}'\cdot\vec{x}} : i (\hat{a}_{\vec{p}'} e^{iE_{p'} t} - \hat{b}_{-\vec{p}'} e^{-iE_{p'} t}) (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t}) :$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \varphi \frac{1}{2} \left\{ : (\hat{a}_{\vec{p}} e^{iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-iE_p t}) (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} - \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t}) : \right.$$

$$\left. + (\hat{a}_{\vec{p}} e^{iE_p t} - \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-iE_p t}) (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}} e^{iE_p t}) : \right\}$$

Este renglón →
operadores hermitianos del anterior

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \varphi \frac{1}{2} : (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} e^{i2E_p t} + \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i2E_p t} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-i2E_p t} - \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} e^{i2E_p t} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} e^{i2E_p t} - \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i2E_p t} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}} e^{-i2E_p t}) :$$

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \varphi (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{-\vec{p}})$$

← cambiamos $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en segundo término

A partir de este resultado podemos deducir que los estados

$$|p_n\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle \quad \text{y} \quad |p_{\bar{n}}\rangle \equiv \sqrt{2E_p} \hat{b}_p^\dagger |0\rangle$$

tienen respectivamente carga

$$\begin{aligned} \hat{Q}|p_n\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \underbrace{q \left(\underbrace{\hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_{p'}}_{\hat{N}_{p'n}} - \cancel{\hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_{p'}} \right)}_{\hat{q} \hat{N}_n} \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle \\ &= q |p_n\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}|p_{\bar{n}}\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \underbrace{q \left(\hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_{p'} - \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_{p'} \right)}_{-\hat{q} \hat{N}_{\bar{n}}} \sqrt{2E_p} \hat{b}_p^\dagger |0\rangle \\ &= -q |p_{\bar{n}}\rangle, \end{aligned}$$

es decir, $q_n = q$ y $q_{\bar{n}} = -q$, justo como esperábamos.

Esta propiedad está también codificada en los conmutadores

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat{a}_p e^{-ipx} + \hat{b}_p^\dagger e^{ipx} \right)$$

$$\begin{aligned} [\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] &= -\hat{a}_p^\dagger (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{p}') \\ [-\hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^\dagger] &= -\hat{b}_p^\dagger (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{p}') \end{aligned}$$

$$\begin{cases} [\hat{Q}, \hat{\phi}(x)] = -q \hat{\phi}(x) & \leftarrow \hat{\phi}(x) \text{ aniquila } n, \text{ crea } \bar{n}, \\ [\hat{Q}, \hat{\phi}^\dagger(x)] = +q \hat{\phi}^\dagger(x) & \leftarrow \hat{\phi}^\dagger(x) \text{ crea } n, \text{ aniquila } \bar{n}, \end{cases}$$

que como vimos antes expresan el cambio infinitesimal

$$\leftarrow = \delta \hat{\varphi}^{\dagger} \quad (\text{porque } \delta x = 0)$$

$\delta \hat{\varphi}(x)$, $\delta \hat{\varphi}^{\dagger}(x)$, y dan lugar (a través de BCH) a la regla de transformación finita

$$\begin{cases} e^{i\hat{Q}\theta} \hat{\varphi}(x) e^{-i\hat{Q}\theta} = e^{-i\theta} \hat{\varphi}(x), \\ e^{i\hat{Q}\theta} \hat{\varphi}^{\dagger}(x) e^{-i\hat{Q}\theta} = e^{i\theta} \hat{\varphi}^{\dagger}(x). \end{cases}$$

Como de costumbre, los signos aquí parecen estar al revés...

Vale la pena notar que los campos hermitianos

$$\hat{\varphi}_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\varphi}(x) + \hat{\varphi}^{\dagger}(x)), \quad \hat{\varphi}_2(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}^{\dagger}(x))$$

No tienen una carga definida. P.ej., $\hat{a}_{(1)\vec{p}}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_{\vec{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger})$

por sí solo crearía la superposición $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\vec{p}\hbar\rangle + |1\vec{p}\bar{\hbar}\rangle)$,

estado cuya existencia queremos prohibir (impugnando una 'regla de superselección') para tener claridad con respecto a

la conservación de la carga. Otra manera de decir lo

mismo es observar que $\hat{\varphi}_1$ y $\hat{\varphi}_2$ No tienen por

separado una regla de transformación análoga a la de $\hat{\varphi}$

bajo las rotaciones $U(1)$. Es por ello que nos conviene en

todo momento considerar a $\hat{\varphi}_1$ y $\hat{\varphi}_2$ como componentes de

un solo paquete $\hat{\varphi}(x)$.

Concluimos con esto el estudio del campo escalar libre.

Hemos visto que al cuantizarlo se obtienen partículas (y antipartículas) relativistas sin espín y no interactuantes.

En la etapa anterior del curso nos habíamos encontrado con el campo y después de cuantizar: entendimos que $\hat{\phi}(x)$ es una herramienta útil para describir la física de un sistema de partículas; pero no nos quedaba claro el significado del límite clásico de este operador.

Habiendo procedido ahora en la dirección opuesta, partiendo de un campo clásico cuyo significado es totalmente transparente antes de cuantizar, nos debe quedar mucho más clara la relación entre las partículas y el campo: las partículas son los 'cuantos' del campo, que corresponden a pequeñas fluctuaciones cuánticas por encima del valor preferido del campo (es decir, pequeñas excitaciones de los modos normales de oscilación de la 'gelatina' cuántica).

Antes de dar por terminado este capítulo, conviene hacer 5 observaciones/clarificaciones adicionales:

i) El vacío $|0\rangle$ tiene norma $\langle 0|0\rangle = 1$; pero los estados multi-partículas $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle$ tienen norma $\propto (\delta^{(3)}(\vec{0}))^N$. El hecho

de que $\hat{\varphi}(x)|0\rangle$ sea NO normalizable implica que $\hat{\varphi}(x)$, en sentido matemático estricto, NO es un operador en fl. Sob

$\hat{\varphi}_f \equiv \int d^3x f(x)\hat{\varphi}(x)$ lo será (con $f(x)$ apropiada). [Ver Duncan 8.1]
 ← "función de prueba"
 ← campo "embarrado" (smeared)

ii) Cuando mencionamos arriba el "valor preferido del campo",

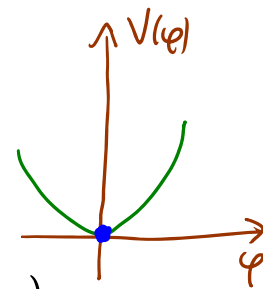
nos referimos por supuesto a su configuración de mínima energía, que es el estado que hemos denominado 'el vacío'.

Para el campo de Klein-Gordon (KG), donde

$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$, ese valor preferido es

$\varphi(x) = 0$, por lo que en el vacío $|0\rangle$

tenemos $\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle = 0$ (NO $\hat{\varphi}(x)|0\rangle = 0$).



Pero es importante notar que esto no tiene por qué ser

así en todos los casos. P.ej., para KG sin masa, $V(\varphi) = 0$

y por tanto no hay un único valor preferido. Para KG con

término lineal en φ , vimos que el mínimo está desplazado.

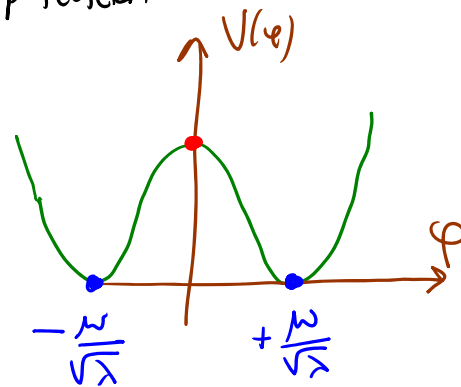
Para $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi)$ con un potencial

más complicado, puede haber un valor

preferido $\varphi \neq 0$. P.ej., con el potencial

del sombrero mexicano' ($c/\mu^2, \lambda > 0$)

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 + \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}$$



(similar al potencial del campo de Higgs en el Modelo Estándar), existen 2 valores igualmente preferidos: los mínimos del potencial, $\varphi(x) = \pm \mu/\sqrt{\lambda}$. En casos así, separamos al campo en 2 partes:

$$\hat{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x) + \hat{\phi}(x)$$

Valor de fondo:

$$\bar{\varphi}(x) \equiv \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle$$

↑ Fluctuación que se describe en \hat{a} 's y \hat{a}^\dagger 's \Rightarrow partículas

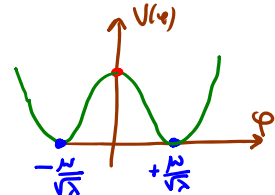
Lib: 10/03/17

En el ejemplo con $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$, tomando $\bar{\varphi} = +\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ y desarrollando en Taylor el potencial,

$$V(\varphi) = V(\bar{\varphi}) + V'(\bar{\varphi})\phi + \frac{1}{2}V''(\bar{\varphi})\phi^2 + \dots,$$

tendremos

$$-\mu^2 + 3\lambda\bar{\varphi}^2 = 2\mu^2 > 0$$

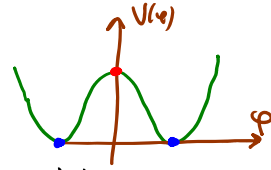


$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(2\mu^2)\phi^2 - \dots,$$

↙ ϕ pequeño

que, en la medida en que los "... " sean despreciables, dará lugar a nivel cuántico a partículas (aproximadamente) libres con masa $M^2 \equiv V''(\bar{\varphi}) = 2\mu^2$.

Notemos por otro lado que si tomamos como valor de fondo

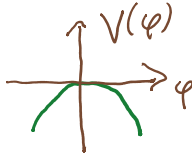


$\bar{\varphi} = 0$, estaríamos en el máximo en lugar del mínimo del potencial, y razonando de manera similar tendríamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\bar{\varphi}) - \frac{1}{2} V''(\bar{\varphi}) \phi^2 - \dots \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (-\mu^2) \phi^2 - \frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} - \dots, \end{aligned}$$

que describiría partículas (aproximadamente) libres con masa $m^2 \equiv V''(\bar{\varphi}) = -\mu^2 < 0$ — es decir, itaguiones!

Claro está que en este caso $\bar{\varphi}$ No representa una configuración estable, por lo que no tiene sentido considerar 'pequeñas fluctuaciones' alrededor de $\varphi = \bar{\varphi}$. Entendemos entonces lo que habíamos prometido en la p. 74: **la existencia**

de itaguiones es un síntoma de que el 'vacío' es inestable. Itaguiones libres serían descritos por  ganamos energía al crecer φ

iii) Para el caso de un (sistema de) campo(s) interactuante(s), \mathcal{L} contiene términos cúbicos o más altos, y el (los) campo(s) satisfacen por tanto ecuación(es) de movimiento no lineal(es), que en general no se pueden resolver de manera

exacta. Esperamos (pp.104-109) que aún en este caso el (los) campo(s) estar(án) asociados con partículas de finidas como estados asintóticos, ¿pero cómo podemos analizar cuantitativamente el efecto de las interacciones? Si las interacciones son suficientemente débiles, las partículas físicas (\leftrightarrow estados asintóticos) deben ser aproximadamente modos de Fourier, como lo eran en el caso libre. Desde esta perspectiva, la no linealidad de la(s) ec(s). de mov., que hace que los modos de Fourier ya NO estén desacoplados entre sí (puesto que superponer soluciones ya NO da una solución) refleja justamente el hecho de que las partículas interactúan. Como veremos más adelante, es posible incorporar estas interacciones sistemáticamente a través de una expansión perturbativa, es decir, expresando cada cantidad física como una serie de Taylor en potencias de los coeficientes de los términos cúbicos y más altos en \mathcal{L} , conocidos como constantes de acoplamiento (serie descrita por los llamados 'Diagramas de Feynman'). A través de este método

entenderemos también la manera en que las partículas físicas difieren de los modos de Fourier del campo. Un ejemplo donde las interacciones son débiles (es decir, una teoría cuántica de campos 'débilmente acoplada') es QED, que describe a fotones en interacción con electrones. Es mucho más difícil visualizar (¡y no digamos calcular!) lo que sucede cuando las interacciones son fuertes. Pej., los ingredientes básicos del Lagrangiano de QCD, gluones y quarks, ciertamente no existen como estados asintóticos: no podemos separarlos a distancias arbitrariamente grandes unos de otros, sino que están permanentemente 'confinados' en el interior de las partículas que sí observamos en nuestros detectores: los 'hadrones' como el protón, el neutrón, los piones, etc.

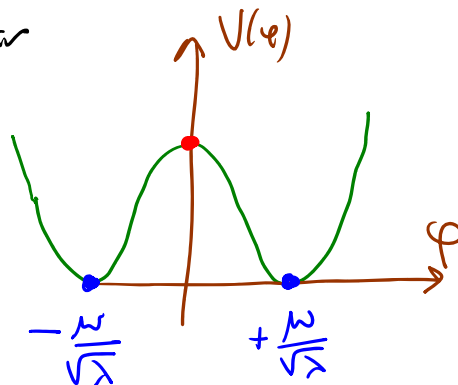
Así que, cuando las interacciones son fuertes, la relación entre el campo y las correspondientes partículas físicas dista mucho de ser obvia, y nuestra principal herramienta de cálculo, la expansión perturbativa, resulta completamente inútil.

iv) Aún cuando las interacciones son débiles, existe en general información física que NO es capturada por la expansión perturbativa (cosa que es visible en el hecho de que genéricamente la serie de Taylor NO converge).

P.ej., en la teoría de un campo escalar en 1+1 dimensiones con el mismo potencial que vimos arriba, la ec. de movimiento

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi - \mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = 0$$

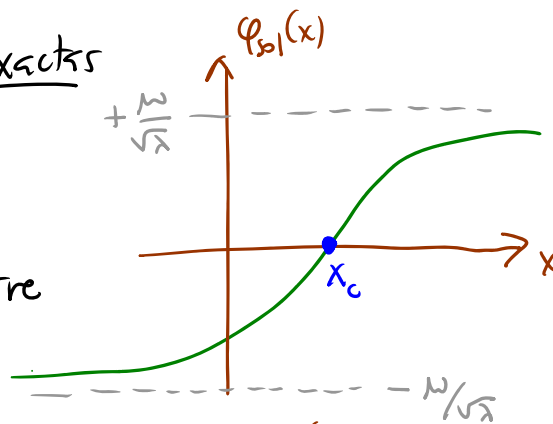
cte. de desplazamiento



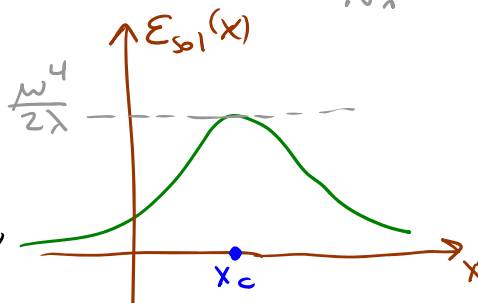
tiene una familia de soluciones exactas

$$\varphi_{sol}(x) \equiv \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left[\frac{M}{\sqrt{2}}(x-x_c)\right]$$

que son estáticas e interpolan entre los 2 mínimos $\varphi = \pm M/\sqrt{\lambda}$.



Esta configuración tiene una densidad de energía (por encima de la del vacío, $V(\varphi = \pm M/\sqrt{\lambda}) = 0$) localizada en $x \approx x_c$,



$$E_{\text{sol}}(x) \equiv \mathcal{H}(\varphi_{\text{sol}}(x), \partial_x \varphi_{\text{sol}}(x), \cancel{\partial_t \varphi_{\text{sol}}(x)})$$

$$= \frac{\mu^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[\frac{\mu}{\sqrt{2}}(x-x_c) \right],$$

distribuida de tal manera que la energía total es finita:

$$E_{\text{sol}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx E_{\text{sol}}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} \gg \mu \quad \leftarrow \sim \text{masa de partículas perturbativas}$$

¡Claramente este no es un resultado que hubiéramos podido obtener comenzando en alguno de los mínimos y trabajando con una serie de Taylor en potencias de λ !

$\varphi_{\text{sol}}(x)$ es un ejemplo de lo que llamamos un solitón: una solución estática con energía finita, excitación macroscópica que se mantiene localizada solo gracias a la no linealidad del sistema, es decir, a la presencia de una interacción del

campo consigo mismo. Físicamente, representa un nuevo tipo de partícula, con masa $M_{\text{sol}} \equiv E_{\text{sol}}$, que forma parte del espectro no perturbativo de la teoría. Para mayores detalles, ver [Rajaraman, Solitons and Instantons].

127: 17/09/18

119: 21/09/22

v) Incluso para un campo libre, el concepto asociado de partícula resulta mucho menos claro si el espaciotiempo es curvado, o si, aún en un fondo plano, consideramos la perspectiva de un observador no inercial ($\Rightarrow g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$).

En el espaciotiempo de Minkowski, hemos visto que, en las coordenadas cartesianas x^μ asociadas a un sistema inercial, el operador de campo libre se puede desarrollar como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}}_{\substack{\text{modo} \\ \text{positivo}}} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

donde las funciones $\equiv u_{\vec{p}}(x)$ y $\equiv u_{\vec{p}}^*(x)$ constituyen un conjunto completo de soluciones a la ec. de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)u(x) = 0, \text{ con } \square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \text{ Es fácil verificar}$$

que estas soluciones son ortogonales con respecto al producto interno de Klein-Gordon (independiente de t)

$$\begin{aligned} (u, v)_{KG} &\equiv i \int d^3x u^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t v(x) \\ &= i \int d^3x [u^*(x) \partial_t v(x) - \partial_t u^*(x) v(x)] \end{aligned}$$

es decir, que $(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'})_{KG} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = -(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*)$.

← Nota: misma estructura que en carga de Noether pp. 203-4

¿Cómo se generaliza esta descomposición al caso con coordenadas arbitrarias $x'^{\mu}(x)$? [ver libro de Birrell & Davies]

La métrica será entonces $g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho}(x)$, $\eta_{\mu\nu}$ si el espaciotiempo es plano

y usándola podemos escribir la acción de Klein-Gordon

$$S_{KG} = \int d^4x' \mathcal{L}'_{KG}(x') = \int d^4x' \sqrt{-\det g'_{\lambda\rho}} \frac{1}{2} (g'^{\mu\nu} \partial'_{\mu} \phi' \partial'_{\nu} \phi' - m^2 \phi'^2)$$

que implica la ecuación de movimiento $\square' \phi' = 0$

$(\square' + m^2)\phi' = 0$, donde ahora el D'Alembertiano se define como

$$\square' \phi' \equiv g'^{\mu\nu} \nabla'_{\mu} \nabla'_{\nu} \phi' = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \partial'_{\mu} (\sqrt{-g'} g'^{\mu\nu} \partial'_{\nu} \phi')$$

derivadas covariantes (usan $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$)

Eligiendo un conjunto completo de soluciones $u'_s(x')$, $u'^*_s(x')$ a esta ecuación, podemos volver a descomponer

$$\hat{\phi}'(x') = \sum_s (\hat{a}'_s u'_s(x') + \hat{a}'^{\dagger}_s u'^*_s(x'))$$

será integral si el índice s es continuo

Si las u'_s, u'^*_s son ortonormales con respecto al producto

métrica inducida sobre C (antes δ_{ij})

$$(u', v')_{KG} \equiv i \int d^3x' \sqrt{g'_C} u'^* \overleftrightarrow{\partial}'_{\mu} v' n^{\mu}_C$$

vector unitario ortogonal a C

C ← superficie tipo espacio (antes usamos $t = cte.$)

(antes usamos $\eta^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}_0$)



se puede mostrar que la cuantización canónica del campo $\phi(x')$ equivale a imponer las relaciones de conmutación esperadas:

$$[\hat{a}'_s, \hat{a}'_r{}^\dagger] = \delta_{sr}, \quad [\hat{a}'_s, \hat{a}'_r] = 0 = [\hat{a}'_s{}^\dagger, \hat{a}'_r{}^\dagger].$$

↳ delta de Dirac si el índice s es continuo

El espacio de Hilbert completo para nuestro campo puede ser obtenido entonces con la construcción de Fock usual, comenzando con un vacío $|0'\rangle$ tal que $\hat{a}'_s|0'\rangle = 0 \forall s$, y actuando sobre él con los $\hat{a}'_s{}^\dagger$ para obtener estados multipartículas $|s_1, s_2, \dots\rangle \propto \hat{a}'_{s_1}{}^\dagger \hat{a}'_{s_2}{}^\dagger \dots |0'\rangle$.

(El ejemplo más sencillo sería usar coordenadas esféricas $x'^\mu \equiv (t, r, \theta, \varphi)$, donde uno tiene soluciones a Klein-Gordon

$$u'_{pLM}(x') = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-iE_p t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} p J_L(pr) Y_{LM}(\theta, \varphi)$$

$\swarrow \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$ Bessel Armónico esférico

[ver p.ej. Greiner, ejercicio 4.3, pp. 86-90], y los estados correspondientes de 1 partícula, $|pLM\rangle \propto \hat{a}'_{pLM}{}^\dagger |0'\rangle$, son eigenestados de $\hat{P}^0, \hat{P}^2, \hat{J}^2, \hat{J}^3$, con respectivos eigenvalores

← en lugar de autovalores p^w en $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$ lo?

$$E_{\vec{p}}, p^2, L(L+1), M.)$$

Ahora, dado que $u_{\vec{p}}(x)$ y $u_{\vec{p}}^*(x)$ representaban un conjunto completo de soluciones a la ec. de Klein-Gordon en las coords. originales x^w , debemos tener

$$u'_s(x'(x)) = \sum_{\vec{p}} \left(\alpha_{s\vec{p}} u_{\vec{p}}(x) + \beta_{s\vec{p}} u_{\vec{p}}^*(x) \right),$$

$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \rightarrow \vec{p}$

con ciertos valores específicos de los coeficientes $\alpha_{s\vec{p}}, \beta_{s\vec{p}}$

$$(\text{de hecho, } \alpha_{s\vec{p}} = (u_{\vec{p}}, u'_s)_{KG}, \beta_{s\vec{p}} = -(u_{\vec{p}}^*, u'_s)_{KG}).$$

A partir de

$$\begin{aligned} \varphi(x'(x)) &= \sum_s \left[\underbrace{a'_s u'_s(x'(x))}_{\sum_{\vec{p}} (\alpha_{s\vec{p}} u_{\vec{p}} + \beta_{s\vec{p}} u_{\vec{p}}^*)} + \underbrace{a_s^* u_s^*(x'(x))}_{\sum_{\vec{p}} (\alpha_{s\vec{p}}^* u_{\vec{p}}^* + \beta_{s\vec{p}}^* u_{\vec{p}})} \right] \\ &= \sum_{\vec{p}} \left[\sum_s (\alpha_{s\vec{p}} a'_s + \beta_{s\vec{p}}^* a_s^*) u_{\vec{p}} + \sum_s (\alpha_{s\vec{p}}^* a_s^* + \beta_{s\vec{p}} a'_s) u_{\vec{p}}^* \right] \\ &= \varphi(x) \leftarrow \text{porque el campo es } \underline{\text{escalar}} \end{aligned}$$

podemos deducir que

$$\hat{a}_{\vec{p}} = \sum_s (\alpha_{s\vec{p}} \hat{a}'_s + \beta_{s\vec{p}}^* \hat{a}'_s{}^\dagger), \quad \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger = \sum_s (\alpha_{s\vec{p}}^* \hat{a}'_s{}^\dagger + \beta_{s\vec{p}} \hat{a}'_s).$$

↑ "coeficientes de Bogoliubov"

Y el punto al que queremos llegar es que, si resulta ser el caso que $\beta_{s\vec{p}} \neq 0$ para algún valor de s, \vec{p} , entonces $|0'\rangle \neq |0\rangle$. Es decir, el estado que \mathcal{O}' considera 'vacío', ¡consiste de cierta colección de partículas desde la perspectiva del observador \mathcal{O} !

Esto se evita solo si $\hat{a}_{\vec{p}}$ es una combinación lineal únicamente de operadores de aniquilación \hat{a}'_s , y no de creación, $\hat{a}'_s{}^\dagger$. Pero, ¿cómo distinguimos en primer lugar entre \hat{a}'_s y $\hat{a}'_s{}^\dagger$? Hemos visto una y otra vez que lo que distingue a $\hat{a}_{\vec{p}}$ de $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ es que el primero multiplica a $u_{\vec{p}}(x) = e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} = e^{-ip\cdot x}$, que tiene 'frecuencia positiva' con respecto al tiempo t , es decir, $\partial_t u_{\vec{p}}(x) = -i\omega u_{\vec{p}}(x)$ con $\omega = E_{\vec{p}} > 0$ (mientras que $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ multiplica a $u_{\vec{p}}^*(x) = e^{+iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}$, que tiene 'frecuencia negativa'). (Cualquier otro observador inercial nota igualmente que $u_{\vec{p}}(x) = e^{-ip\cdot x} = e^{-ip'\cdot x'} = u_{\vec{p}'}(x')$ tiene también frecuencia positiva con respecto a su tiempo

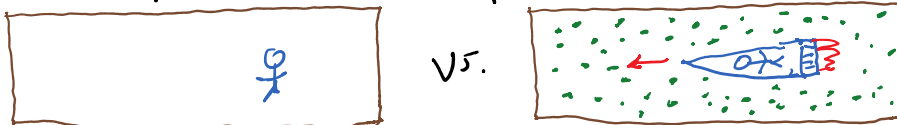
Lo mismo en el ejemplo de la cámara de partículas a cósmico

t' , y por tanto está de acuerdo en que su coeficiente es un operador de aniquilación y no de creación. Pero esto No resulta ser cierto para un observador O' no inercial.

En particular, se puede mostrar que un observador uniformemente acelerado con aceleración propia A detecta en el vacío $|0\rangle$ un baño térmico de partículas con temperatura $T = A/2\pi$ (en unidades donde $k_B = 1$)!! Es decir,

$$\langle 0 | \hat{a}_s^\dagger \hat{a}'_s | 0 \rangle = \frac{1}{e^{\omega_s/T} - 1} \neq 0 \quad [\text{ver Birrell \& Davies}]$$

\hat{N}'_s operador de número para O'



Este es el llamado "efecto Unruh" (y está relacionado con el "efecto Hawking", que implica que los agujeros negros radian).

La moraleja es entonces que el número de partículas depende del observador!

Por esta razón, y por los puntos anteriores (incluyendo el valor de fondo del campo, y la posible existencia de solitones), consideramos al concepto de campo más fundamental que el de partícula. Sorprendentemente, ¡nuestro universo está en verdad hecho de 'gelatinas' cuánticas!!