

operadores (hermitianos) \hat{Q}_α , que serán los generadores de la transformación de simetría en el sentido de que

$$[i\omega \hat{Q}_\alpha(t), \hat{\phi}_l(\vec{x}, t)] = -\tilde{\delta} \hat{\phi}_l(\vec{x}, t),$$

y satisfarán las relaciones de conmutación del álgebra de simetría g , $[\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma \hat{Q}_\gamma$.

Obtendremos así expresiones explícitas para el cuadrimomento \hat{P}^μ , los generadores de Lorentz $\hat{J}^{\mu\nu}$ y las cargas asociadas a simetrías internas \hat{Q}_α , → p.ej. carga eléctrica definidos todos como operadores cuánticos que actúan sobre el espacio de Hilbert de nuestro(s) campo(s).

14: 10/09/18

Antes habíamos definido generadores \hat{P}^μ , $\hat{J}^{\mu\nu}$, \hat{Q}_α que actuaban sobre un espacio que a primera vista podría parecer MUY distinto: el espacio de Fock asociado a un sistema de partículas. Por supuesto, con base en lo que aprendimos anteriormente en este curso, esperamos que el operador de campo $\hat{\phi}_l(x)$ se pueda relacionar con operadores de

creación y aniquilación $\hat{a}_{p\lambda n}^+$, $\hat{a}_{p\lambda n}$, por lo que sospecharíamos que estos 2 espacios de Hilbert resultarían ser idénticos, y ambos conjuntos de generadores coincidirán.

Verificaremos esto en detalle más adelante; pero por ahora, podemos notar que, según vimos antes, el operador de campo $\hat{\phi}_l(x)$ entendido como un operador que actúa sobre el espacio de Fock transformaba bajo, p.ej., traslaciones de acuerdo con (p.149)

$$e^{i\hat{P}_m a^m} \hat{\phi}_l(x) e^{-i\hat{P}_m a^m} = \hat{\phi}_l(x+a),$$

que en versión infinitesimal corresponde a

$$[i\epsilon^m \hat{P}_m, \hat{\phi}_l(x)] = \hat{\phi}_l(x+\epsilon) - \hat{\phi}_l(x) = \epsilon^m \partial_m \hat{\phi}_l(x),$$

lo cual justamente coincide con la variación $\tilde{\delta} \hat{\phi}_l(x)$ del operador $\hat{\phi}_l(x)$ que se obtiene al cuantizar el campo clásico $\phi_l(x)$ que hemos analizado aquí.

Lo mismo sucede para los otros generadores ($\hat{J}^{\mu\nu}$, \hat{Q} , etc.), con lo cual comenzamos a vislumbrar que en efecto habrá una conexión muy directa entre el sistema de partículas

que estudiamos anteriormente (siguiendo la "ruta I" de la p.151) y el sistema de campos que estamos estudiando ahora (siguiendo la "ruta II").

Para ver esta conexión en completo detalle, habiendo ya entendido bien la manera en que se describe un sistema de campos a nivel clásico, procedamos ahora sí a la descripción cuántica. Sabemos que el procedimiento de cuantización canónica está basado en el formalismo hamiltoniano, y consiste en promover las variables canónicas $\varphi_{\ell}(t, \vec{x}), \pi_{\ell}(t, \vec{x})$ a operadores $\hat{\varphi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell}(t, \vec{x})$ en el cuadro de Heisenberg — ó $\hat{\varphi}_{\ell}(\vec{x}) \equiv \hat{\varphi}_{\ell}(0, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell}(\vec{x}) \equiv \hat{\pi}_{\ell}(0, \vec{x})$ en el cuadro de Schrödinger —, que a tiempos iguales satisfacen las reglas de conmutación básicas

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell'}(t, \vec{x}')] &= i \delta_{\ell\ell'} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\hat{\varphi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}_{\ell'}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}_{\ell}(t, \vec{x}), \hat{\pi}_{\ell'}(t, \vec{x}')] \end{aligned}$$

Este procedimiento NO es manifiestamente covariante bajo

Lorentz; pero para nosotros la covariancia resultará de partir de una \mathcal{L} escalar. (Más adelante aprenderemos un procedimiento alternativo, el método de cuantización por integral de trayectoria, que está directamente basado en el formalismo Lagrangiano y es por tanto manifiestamente covariante.)

Llevaremos ahora a cabo la cuantización canónica del sistema de campos más sencillo posible: un solo campo escalar real y 'libre' $\equiv \mathcal{L}$ cuadrática, $\varphi(x)$, que con base en lo que aprendimos en la parte anterior del curso esperaríamos que describa partículas con espín cero, bosónicas, sin carga y sin interacciones.

Nuestro punto de partida es la densidad Lagrangiana cuadrática más general posible construida con este campo:

↙ elegimos coeficiente por convención, ajustando la normalización del campo

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

$\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2$ 'Término cinético'

'Término de masa': m resultará ser la masa de las partículas asociadas a $\varphi(x)$

(Término lineal en φ no cambiaría sustancialmente la física — ver p. 108.)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Usando la fórmula de Euler-Lagrange, $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$,
deducimos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad \text{Ec. de Klein-Gordon}$$

ec. de mov. lineal,
gracias a que
 \mathcal{L} es cuadrático

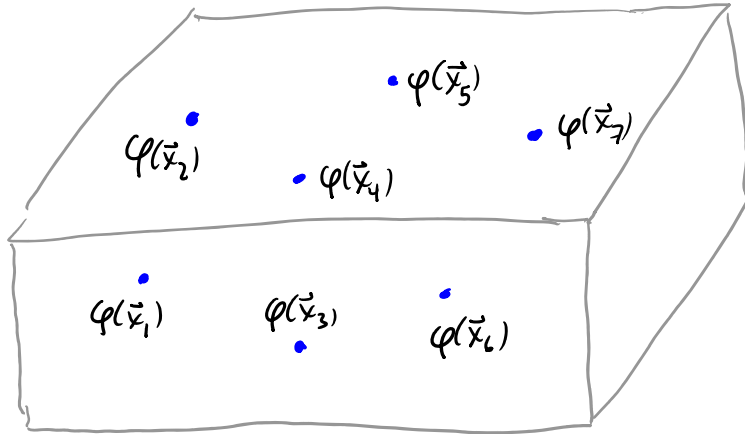
$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\downarrow} \equiv \partial^2 \equiv \square \quad \text{Laplaciano/D'Alembertiano}$$

Para $m^2=0$, esto no es otra cosa que la ec. de ondas, con
velocidad de propagación $= 1$. Cuando $m^2 \neq 0$, la ec.
de Klein-Gordon todavía describe la propagación de ondas
en el campo, en general con velocidad $\neq 1$. Para ver
esto, conviene cambiar nuestras variables básicas $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_x(t)$
a unas nuevas variables $\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \tilde{\varphi}_p(t)$ obtenidas a través
de una transformada de Fourier,

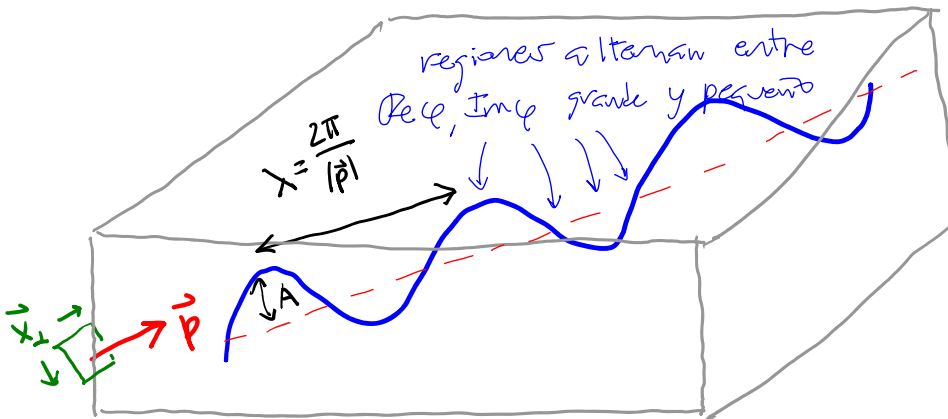
$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \quad \leftrightarrow \quad \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

que satisfacen $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$, como consecuencia de $\varphi^*(x) = \varphi(x)$.

¿Qué significan las nuevas variables? En lugar de describir la configuración del campo (a un tiempo dado) especificando su valor en cada punto espacial \vec{x} ,



damos ahora la amplitud $\tilde{\varphi}(\vec{p})$ de cada uno de sus modos de Fourier - p.ej. $\tilde{\varphi}(\vec{p}') = A (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) + (\vec{p}' \rightarrow -\vec{p})^*$
 corresponde a $\varphi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(\vec{p}') = A e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \text{conjugado complejo}$,
 que es una onda plana (independiente de $\vec{x}_\perp \perp \vec{p}$):



En términos de estas nuevas variables, la ec. de mov. es

$$\underbrace{\partial_t^2}_{\partial_t^2} \underbrace{\partial_{\vec{x}}^2}_{\partial_{\vec{x}}^2} \underbrace{\varphi(t, \vec{x})}_{\varphi(t, \vec{x})} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0,$$

es decir,

$$(\underbrace{\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2}_{\equiv E_{\vec{p}}^2}) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial_t^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

$E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia

$\omega = E_{\vec{p}}$, y cuya solución general (con $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$) es

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = A_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + A_{-\vec{p}}^* e^{i\omega t}.$$

Vemos entonces que los modos de Fourier $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$ son los

modos normales del campo $\varphi(t, \vec{x})$: patrones

colectivos de movimiento que están desacoplados

entre sí, cada uno tiene simplemente la dependencia temporal

de un oscilador armónico, y cualquier configuración

del campo $\varphi(t, \vec{x})$ puede ser expresada como una

superposición de modos normales. Todo esto es exactamente

análogo a lo que sucede para una cuerda de guitarra o la

membrana de un tambor — como dijimos antes, $\varphi(t, \vec{x})$ se

puede visualizar como una gelatina que llena todo el espacio y

$\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$ no interactúan
aunque $\varphi(t, \vec{x})$ sí

es capaz de oscilar. Según hemos visto aquí, un campo libre es una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados.
uno por cada \vec{p}

En el modo normal caracterizado por el vector \vec{p} , el campo $\varphi(t, \vec{x}) \propto e^{+iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ oscila como una onda plana con número de onda $|\vec{p}|$, que se propaga en la dirección especificada por \vec{p} , con una velocidad de fase $v_f \equiv \omega/|\vec{p}| = E_{\vec{p}}/|\vec{p}|$. Por otra parte, un paquete de ondas con número de onda promedio \vec{p} se propaga con una velocidad de grupo $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial E_{\vec{p}}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad \leftrightarrow \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}_g}{\sqrt{1 - \vec{v}_g^2}}$$

L14: 06/03/17 tal como partícula clásica

Para llevar a cabo la cuantización canónica, pasamos primero a la descripción Hamiltoniana, calculando a

partir de $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$ el

momento canónico $\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi(x))} = \partial_0 \varphi(x) \equiv \dot{\varphi}(x)$
y el Hamiltoniano

$$H[\varphi(t), \Pi(t)] \equiv \int d^3x \left\{ \dot{\varphi} \Pi - \mathcal{L} \right\} \\ = \int d^3x \left\{ \dot{\varphi}^2 - \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] \right\},$$

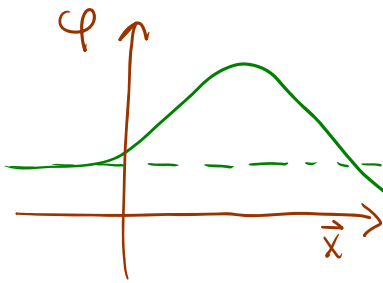
es decir,

φ^2

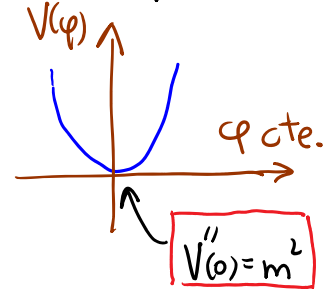
$$\mathcal{H}(\varphi(x), \vec{\nabla}\varphi(x), \pi(x)) = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Energía cinética:
Costo por variación temporal

Energía potencial $V(\varphi)$:
Costo por tener $\varphi \neq 0$



Costo energético por variar el valor del campo de un punto a otro. Se trata en realidad de energía potencial, aunque figura dentro del término $\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ en \mathcal{L} , que convencionalmente se llama 'cinético'.



(Notar que es término lineal,

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + n\varphi$$

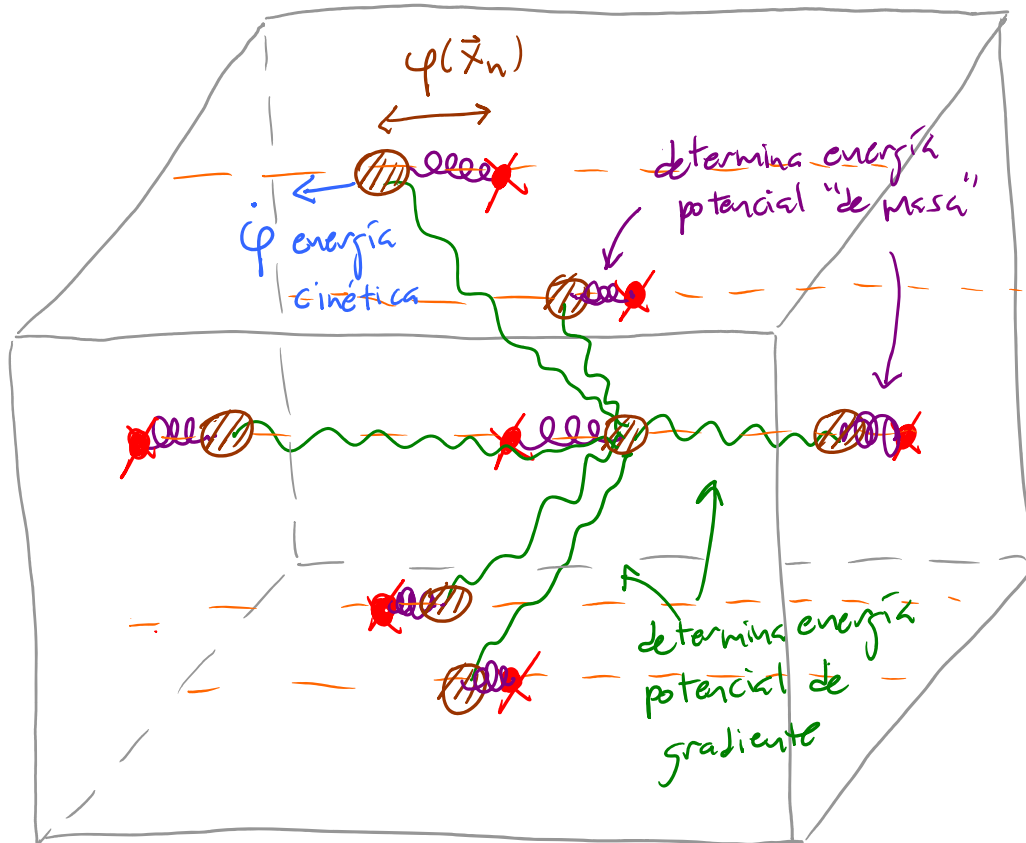
$$\equiv \frac{1}{2} m^2 (\varphi - \varphi_0)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi_0^2$$

$\varphi_0 \equiv -n/m^2$

el mínimo se corre a $\varphi = \varphi_0$.
Y podemos redefinir $\varphi - \varphi_0 \rightarrow \varphi$,
 $V \rightarrow V + \frac{1}{2} m \varphi_0^2$.)

Vemos aquí que el campo de Klein-Gordon real se puede interpretar como la versión continua de una colección de pelotitas esparcidas sobre una red 3-dimensional, que se mueven solo en 1-dim y están acopladas a la red y entre sí con resortes:

- \times = punto de la red
- $\textcircled{\text{///}}$ = pelotita
- --- = resorte a la red
- --- = resorte interpelota



Para cuantizar, imponemos las relaciones de conmutación

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] = 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')]$$

$\underbrace{\quad}_{\partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}')} \quad \swarrow \text{a tiempo iguales} \quad \searrow$

Al igual que en el caso discreto, la ec. de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} \hat{O}(t) = i [\hat{H}, \hat{O}(t)] + \partial_t \hat{O}(t)$$

implica en particular las ecs. de Hamilton

$$\hat{H} = \int d^3x' \left(\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right)$$

$$\partial_t \hat{\phi}(t, \vec{x}) = i \left[\int d^3x' \frac{1}{2} \hat{\pi}(t, \vec{x}')^2, \hat{\phi}(t, \vec{x}) \right] = \hat{\pi}(t, \vec{x}) \quad \left(= \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\pi}(x)} \right) \checkmark,$$

dependencia total de t;
parcial por que \vec{x} fijo

$$\int d^3x' \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}(t, \vec{x}') [\hat{\pi}(t, \vec{x}'), \hat{\phi}(t, \vec{x})] + [\hat{\pi}(t, \vec{x}'), \hat{\phi}(t, \vec{x})] \hat{\pi}(t, \vec{x}') \right)$$

$-i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ $-i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$

$$\partial_t \hat{\pi}(t, \vec{x}) = i \left[\int d^3x' \left\{ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\phi}(t, \vec{x}'))^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}')^2 \right\}, \hat{\pi}(t, \vec{x}) \right]$$

$-\phi(t, \vec{x}') \vec{\nabla}^2 \phi(t, \vec{x}')$

$$= + \vec{\nabla}^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}) - m^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}) \quad \left(= - \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\phi}(x)} \right) \checkmark,$$

que juntas implican a su vez la ec. de Euler-Lagrange

$$\boxed{(\partial^2 + m^2) \hat{\phi}(x) = 0}. \quad \text{Klein-Gordon} \quad \checkmark$$

Sabemos ya (p.186) que esta ecuación dice que la combinación

$$\hat{\tilde{\phi}}(t, \vec{p}) = \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{\phi}(t, \vec{x})$$

← 1 operador por cada \vec{p}
(en lugar de uno por cada \vec{x})

es un oscilador armónico, por lo que conviene descomponerlo,

junto con su variable conjugada $\hat{\tilde{\pi}}(t, \vec{p}) = \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$,

en operadores de ascenso y descenso \hat{a} y \hat{a}^\dagger :

$$\hat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)$$

signo necesario para tener $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi} \leftrightarrow \hat{\tilde{\phi}}_{\vec{p}}^\dagger = \hat{\tilde{\phi}}_{-\vec{p}}$

↑
t=0 para hacer contacto con versión de Schrödinger

$\hat{\tilde{\phi}}(0, \vec{p})$ (análogo a $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$),

$$\hat{\Pi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \underbrace{(-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)}_{\hat{\Pi}(0, \vec{p}) \text{ (análogo a } \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger))}.$$

Usando el hecho de que $\hat{\Pi}(0, \vec{x}) = \partial_t \hat{\varphi}(0, \vec{x})$, podemos reconstruir

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}} t} \right),$$

o, cambiando la variable de integración $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en el 2do. término,

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

L17: 14/09/22 (+30 min)

↑ término de "frecuencia positiva"

También hubiéramos podido obtener este resultado

usando $\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \exp(i\hat{H}t) \hat{\varphi}(0, \vec{x}) \exp(-i\hat{H}t)$, o simplemente

notando que este es la solución más general a la ec. de K-G:

$$\text{es la versión cuántica de } \varphi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{-\vec{p}}^* e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}.$$

Reconocemos aquí justamente al operador de campo que

armamos para partículas en la etapa anterior del curso (p.139),

comenzando con $\hat{a}_{\vec{p}}$ y $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, entendiendo ahora sí la conexión que existe con el oscilador armónico.

L15: 12/09/18

Más aún, a partir de la relación de conmutación básica

$$i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = \left[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}') \right] \hat{\phi}(t, \vec{x}')$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{p'}}{2}} i \left(-\hat{a}_{\vec{p}'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}} \left\{ \begin{aligned} & -[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{-i(E_p+E_{p'})t+i\vec{p}\cdot\vec{x}+i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ & +[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{-i(E_p-E_{p'})t+i\vec{p}\cdot\vec{x}-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ & -[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{i(E_p-E_{p'})t-i\vec{p}\cdot\vec{x}+i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \\ & +[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{i(E_p+E_{p'})t-i\vec{p}\cdot\vec{x}-i\vec{p}'\cdot\vec{x}'} \end{aligned} \right\},$$

podemos deducir las relaciones

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}'), \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] \quad \forall \vec{p}, \vec{p}'$$

no manifiestamente canónica, justo como $[\hat{\phi}, \hat{\Pi}]$

que coinciden exactamente con las de los operadores de creación y aniquilación de partículas que vimos antes.

Concluimos entonces que el espacio de Hilbert de un campo libre relativista coincide con el espacio de Fock que describe a un número arbitrario de partículas relativistas libres!

Es decir, tenemos una correspondencia entre los estados de estos 2 espacios de Hilbert:

- $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$, con $\langle 0|0\rangle = 1$

Estado con el campo sin excitar (tods los osciladores en su estado base: " $|0,0,0,0,\dots\rangle$ ") \longleftrightarrow Vacío (estado sin partículas)

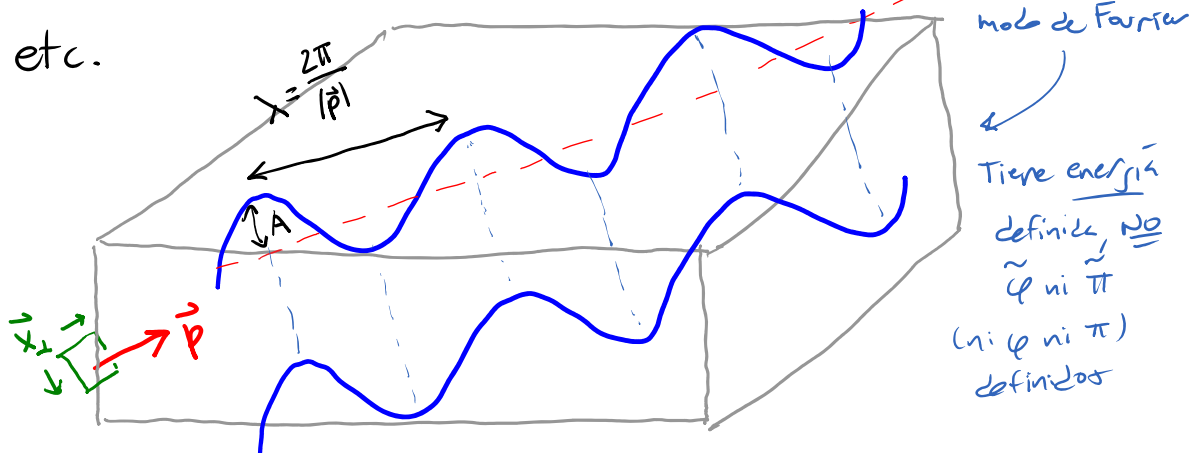
- $|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ (con $\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$)

Estado con el oscilador (onda plana) \vec{p} excitado a su primer nivel ("10,0,0,1,0,0,...") \longleftrightarrow Estado con 1 partícula con momento \vec{p}
("10,0,0,1,0,0,...")
 ↖ lugar \vec{p}

- $|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$ (con $\frac{1}{\sqrt{2!}}$ adicional si $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$)

Estado con 2 osciladores excitados \longleftrightarrow Estado con 2 partículas con momentos \vec{p}_1, \vec{p}_2
 al 1er. nivel ("10,0,0,1,0,0,1,0,0...")
 o, si $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$, 1 oscilador en el 2do. nivel ("10,0,0,2,0,0,1,0,0...")

- etc.



Para tener una equivalencia total, solo nos falta verificar que los estados cuánticos del campo tienen las energías apropiadas, es decir, que el hamiltoniano de Klein-Gordon es el correcto para describir a partículas relativistas libres. Tenemos

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(0) = \int d^3x \frac{1}{2} \left\{ \hat{\Pi}(0, \vec{x})^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}))^2 + m^2 \hat{\phi}(0, \vec{x})^2 \right\},$$

con $\hat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)$,
↑ H se conserva
↑ cambiamos $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ por factorizar fase

$$\vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} i\vec{p} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger),$$

$$\hat{\Pi}(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} iE_{\vec{p}} (-\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger).$$

Usando el hecho de que $\int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{p}'\cdot\vec{x}} f(\vec{p}, \vec{p}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, -\vec{p})$,
 podemos deducir que $(2\pi)^3 \delta^0(\vec{p} + \vec{p}')$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left\{ -E_{\vec{p}}^2 (-\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)(-\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) \right. \\ &\quad + \vec{p}^2 (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)(\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) \\ &\quad \left. + m^2 (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger)(\hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_{\vec{p}}} \left\{ \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} (-E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger (-E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger (E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}} (E_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) \right\}, \end{aligned}$$

o, tras un cambio de variable $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en el segundo término,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}}).$$

Este es justo el resultado esperado desde el punto de vista de cuantizar el campo: obtenemos el Hamiltoniano usual $\frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)$ para cada oscilador armónico.

Y casi coincide con el Hamiltoniano que escribimos antes para un sistema de partículas (p. 119). De hecho, usando

$$\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}),$$

veamos que

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E_{\vec{p}} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}}_{\text{operador de número } \hat{N}_{\vec{p}}} + \frac{1}{2} E_{\vec{p}} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0})}_{\text{energía de punto cero de cada oscilador armónico}} \right)$$

es, salvo una constante, el mismo \hat{H} que tenemos definido sobre el espacio de Fock. Con esta definición del Hamiltoniano, la energía del vacío (\equiv estado base del campo) $|0\rangle$ sería

$$E_{vac} \equiv \int \int^3 p \frac{1}{2} E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) = \infty,$$

$$\propto \int |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| |\vec{p}| \int \int^3 x e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{x}} = V$$

infinito por $|\vec{p}_{max}| \rightarrow \infty$ infinito por $V \rightarrow \infty$
 ($\lambda_{min} \rightarrow 0$)

doblemente infinito, porque nuestro sistema incluye distancias arbitrariamente grandes y pequeñas
 Este es el primer lugar donde el hecho de tener infinitos grados de libertad no causa problemas.

la energía de 1 partícula (\equiv 1 único oscilador excitado a su primer nivel) es

$$\hat{H} |\vec{p}\rangle = (E_{\vec{p}} + E_{vac}) |\vec{p}\rangle,$$

y más en general, la energía de un estado de multipartículas (\equiv varios osciladores excitados a niveles arbitrarios) es

$$\hat{H} |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle = (E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_N} + E_{vac}) |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N\rangle.$$

Es decir, las diferencias de energía entre los distintos estados son exactamente las mismas que encontramos en la etapa anterior del curso. En ausencia de la gravedad, lo único que importa físicamente son estas diferencias. Podemos entonces simplemente redefinir $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - E_{vac}$, es decir, adaptar la convención de que

todas las energías se miden con respecto a k del vacío.

Otra manera de decir esto mismo es que en lugar de \hat{H} elegimos usar

$$:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}},$$

donde el símbolo $: \quad :$ denota el orden normal,

que por definición requiere colocar todos los operadores de creación a la izquierda de los de aniquilación. P.ej.,

$$:\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger: = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \quad :\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_3}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_4}^\dagger: = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_4}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_3}^\dagger, \text{ etc.}$$

(Vale la pena tener presente que E_{vac} podría tener una interpretación física directa si comparamos 2 'vacíos' distintos —p.ej., con el campo sujeto a 2 diferentes condiciones de frontera—, o en presencia de la gravedad, donde presumiblemente figura en la ec. de Einstein

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}$. El primer caso involucra la llamada 'energía de Casimir' —ver Tarea 3—; el segundo tiene relación con la llamada 'constante cosmológica'.)

Hemos logrado verificar entonces que los estados cuánticos del campo de Klein-Gordon real $\phi(x)$ no solo coinciden con los de un sistema de un número arbitrario de partículas relativistas, sino que además tienen la misma energía / evolución temporal (ver nota en p. 197a).

De manera similar, podemos mostrar que los generadores de traslaciones espaciales que obtuvimos aplicando el teorema de Noether (p. 173),

podemos evaluar en cualquier t ,
porque $\hat{\vec{P}}$ se conserva

$$\hat{\vec{P}} \equiv - \int d^3x \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}(0, \vec{x}) \vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}) + \vec{\nabla} \hat{\phi}(0, \vec{x}) \hat{\pi}(0, \vec{x}) \right),$$

simetrizamos para estar seguros de que $\hat{\vec{P}}^\dagger = \hat{\vec{P}}$

se puede reescribir en términos de operadores de creación y aniquilación en la forma

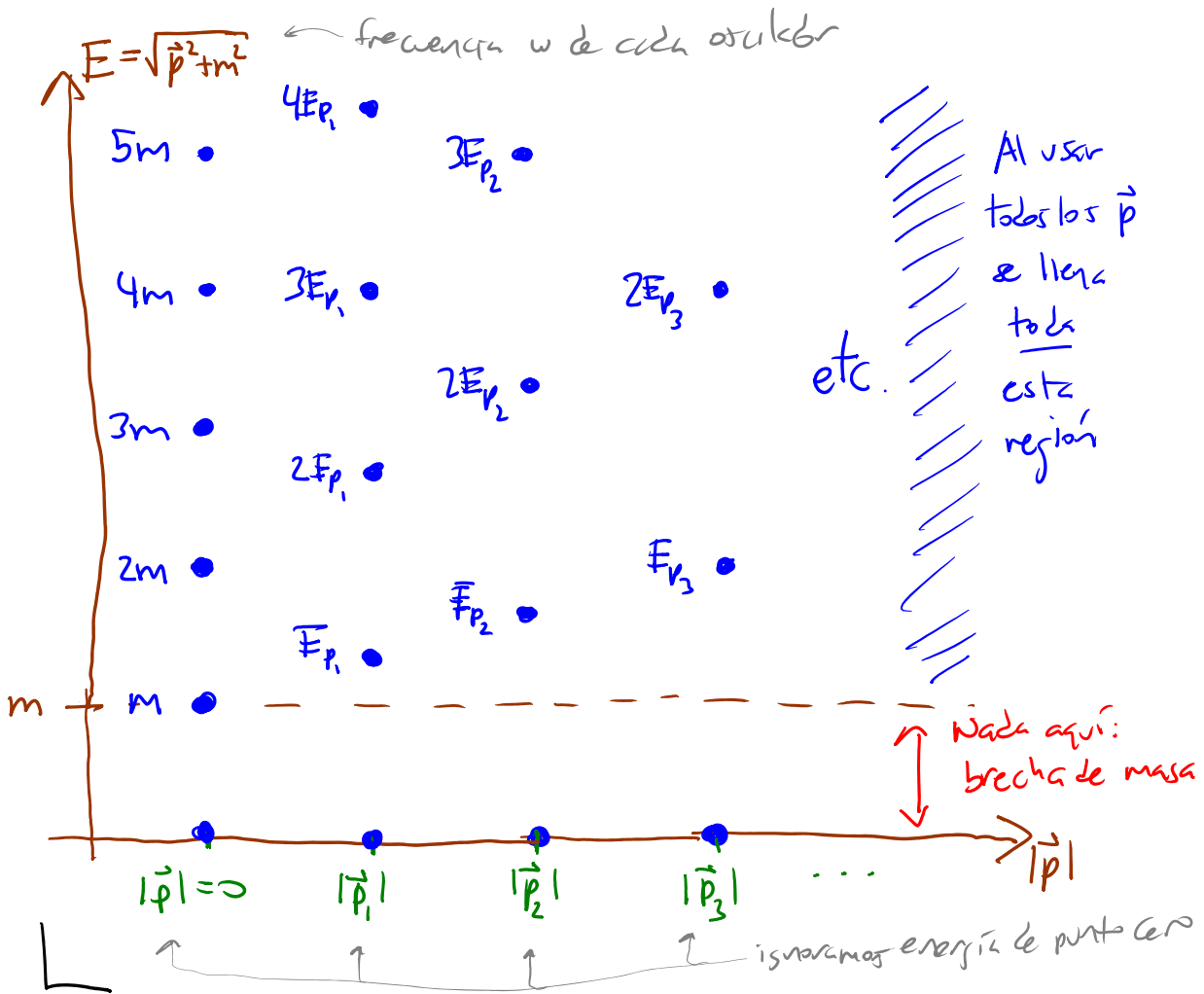
$$\begin{aligned} \hat{\vec{P}} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \frac{1}{2} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \vec{p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{0}) \right) = : \hat{\vec{P}} :, \end{aligned}$$

○ (impar)

que coincide con el $\hat{\vec{P}}$ que teníamos en el espacio de Fock.

Podemos ver aquí que \vec{p} , originalmente solo una etiqueta para los modos de Fourier en el campo, en verdad es momento espacial.

NOTA: Vale la pena enfatizar que, si bien el espectro de energías para cada oscilador armónico es, como siempre, discreto, al incluir todos los osciladores (uno por cada $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$) se obtiene para el campo cuántico un espectro continuo — aunque con una 'brecha de masa' ("mass gap"):



Algo parecido puede decirse para los generadores de Lorentz $\hat{J}^{\mu\nu}$ (ver Tarea 3).

Hemos visto entonces que la cuantización canónica del campo de Klein-Gordon real $\phi(x)$ reproduce correctamente toda la física asociada a partículas relativistas libres, neutras, bosónicas y sin espín. En particular, sabemos LIS: 08/03/17 que en este sistema no habrá ningún problema de causalidad, puesto que se satisface la condición (p. 140)

$$\boxed{[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = 0 \quad \forall (x-x')^2 < 0} \quad \text{Microcausalidad}$$

Conocemos también (pp. 146, 23) el propagador de Feynman (= amplitud de propagación de partículas/antipartículas libres):

$$G(x-x') = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-x')}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

\uparrow Orden temporal

$\equiv K_F(x-x')$
 frecuentemente denotado D_F

Por supuesto, aquí las antipartículas = partículas ($\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$).

Es fácil e interesante generalizar toda esta historia a un campo escalar libre pero complejo, que esperaríamos describa a partículas no interactuantes sin espín pero con carga.

Un campo escalar complejo $\varphi(x)$ representa por supuesto el doble de grados de libertad que un campo real, puesto que sus partes real e imaginaria son variables independientes. En la práctica, es más conveniente tratar directamente a φ y φ^* como variables independientes.

Para el caso libre, partimos entonces de la densidad Lagrangiana (escalar y real)

por convención omitimos $\frac{1}{2}$ que usamos en el caso real

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \varphi^*, \partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

(que puede ser fácilmente reescrita en términos de

los 2 campos reales $\varphi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \varphi^*)$, $\varphi_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}i}(\varphi - \varphi^*)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi_2^2).$$

Las ecs. de movimiento son

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^*} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad \text{Klein-Gordon}$$

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* = 0,$$

como era de esperarse.

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi - m^2 \varphi^2$$

Los momentos canónicos conjugados a $\varphi(x)$ y $\varphi(x)^*$ son respectivamente

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}^*(x) \quad \text{y} \quad \pi^*(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*(x)} = \dot{\varphi}(x),$$

y la densidad Hamiltoniana es por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &\equiv \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} \\ &= \pi \pi^* + \pi^* \pi - (\pi \pi^* - \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi - m^2 \varphi^* \varphi) \\ &= \pi^* \pi + \vec{\nabla} \varphi^* \cdot \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \\ &= \frac{1}{2} (\pi_1^2 + (\vec{\nabla} \varphi_1)^2 + m^2 \varphi_1^2) + \frac{1}{2} (\pi_2^2 + (\vec{\nabla} \varphi_2)^2 + m^2 \varphi_2^2). \end{aligned}$$

Al cuantizar, promovemos $\varphi, \varphi^*, \pi, \pi^* \rightarrow \hat{\varphi}, \hat{\varphi}^\dagger, \hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger$, e imponemos las relaciones de conmutación básicas

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = [\hat{\varphi}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')], \\ [\hat{\varphi}, \hat{\pi}^\dagger] &= 0 = [\hat{\varphi}^\dagger, \hat{\pi}], \\ [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] &= [\hat{\pi}, \hat{\pi}] = 0 = [\hat{\varphi}^\dagger, \hat{\varphi}^\dagger] = [\hat{\pi}^\dagger, \hat{\pi}^\dagger]. \end{aligned}$$