

Notemos que esta ecuación efectivamente es covariante (de hecho, invariante) bajo Poincaré si \mathcal{L} es escalar:

φ es escalar, $\partial_\mu \varphi$ es vector dual, $\partial \mathcal{L} / \partial \varphi$ es escalar, $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi)$ es vector, $\partial_\mu (\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi))$ es escalar ✓.

Si nuestro sistema incluye más de un campo, con un razonamiento análogo obtendremos por supuesto una ec. de mov. para cada campo: variando $S[\varphi_1, \varphi_2, \dots]$ con respecto a cada $\varphi_l(x)$, encontramos que se extremiza solo si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_l(x)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l(x))} \right) \quad \forall l=1, 2, \dots$$

l aquí denota distintos campos escalares, y/o componentes de campo NO escalares

Para este tipo de cálculos, dada una funcional $F[\varphi]$, conviene definir la derivada funcional

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi(x')} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\varphi(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x-x')] - F[\varphi(x)]}{\epsilon}$$

↖ número de argumentos fijos en F (4 para S, 3 para L)

↖ evalúa en un punto específico

(análoga a la derivada parcial usual $\varphi_i + \epsilon \delta_{i,k}$)

$$\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2, \dots)}{\partial \varphi_k} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k + \epsilon, \dots) - f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots)}{\epsilon}$$

Esta derivada satisface la regla de Leibniz y la regla de la cadena. Ejemplos importantes de su aplicación son:

• $F[\varphi] = \varphi(x)$ (evaluar en x) \Rightarrow

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(x')} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x'-x) - \varphi(x)}{\epsilon} = \delta^{(n)}(x'-x)$$

(resultado exactamente análogo a $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_{k'}} = \delta_{k,k'}$),

• $F[\varphi] = \int \mathcal{D}^n x f(\varphi(x)) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x')} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}^n x \left(\frac{f(\varphi(x) + \epsilon \delta^{(n)}(x'-x)) - f(\varphi(x))}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}^n x \left(\frac{f(\varphi(x)) + \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial \varphi} \epsilon \delta^{(n)}(x'-x) - f(\varphi(x))}{\epsilon} \right) \\ &= \frac{\partial f(\varphi(x'))}{\partial \varphi}, \quad \left(\Rightarrow \delta F = \int \mathcal{D}^n x \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \delta \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

↑ cambio bajo $\delta \varphi$ arbitrario $\frac{\partial f}{\partial \varphi(x)}$

• $F[\varphi] = \int \mathcal{D}^n x f(\partial_\mu \varphi(x)) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(x')} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}^n x \left(\frac{f(\partial_\mu \varphi(x) + \epsilon \partial_\mu \delta^{(n)}(x'-x)) - f(\partial_\mu \varphi(x))}{\epsilon} \right) \\ &= \int \mathcal{D}^n x \frac{\partial f(\partial_\mu \varphi(x))}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta^{(n)}(x'-x) = - \partial_k \frac{\partial f(\partial_\mu \varphi(x'))}{\partial (\partial_k \varphi(x))} \end{aligned}$$

se anula si μ es dirección fija μ direcciones no fijas

Con esta definición, bajo $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x)$ se tiene

$$\delta S[\varphi] \equiv \int \mathcal{L}^4 x \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \delta\varphi(x) = \int \mathcal{L}^4 x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right) \delta\varphi(x)$$

es decir, la ec. de Euler-Lagrange se resume como

$$\delta S / \delta\varphi(x) = 0.$$

Una de las principales virtudes del formalismo Lagrangiano es que permite fácilmente establecer una conexión entre simetrías continuas y cantidades conservadas.

Supongamos que la acción $S[\varphi]$ es invariante (\Rightarrow las ecs. de mov. son conservadas) bajo una transformación infinitesimal

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \omega^\alpha X_\alpha^\mu(x) \\ \varphi_l(x) \rightarrow \varphi'_l(x') = \varphi_l(x) + \delta\varphi_l(x) \equiv \varphi_l(x) + \omega^\alpha \Phi_{l\alpha}(x) \end{array} \right.$$

parámetros de variación $|\omega^\alpha| \ll 1$

suma implícita sobre α que afecta distintas simetrías

forma de la variación

Taylor

Notando que, por otra parte, $\varphi'_l(x') = \varphi_l(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x)$,
podemos (y nos conviene) hacer una distinción entre

$$\approx \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x)$$

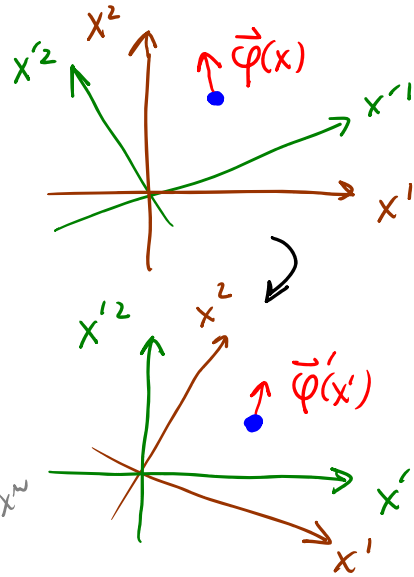
la variación intrínseca (o 'local')

$$\delta\varphi_l(x) \equiv \varphi'_l(x') - \varphi_l(x) \quad \leftarrow \text{comparación física}$$

y la variación funcional (o 'total')

$$\tilde{\delta}\varphi_l(x) \equiv \varphi'_l(x) - \varphi_l(x) \quad \leftarrow \text{comparación matemática}$$

$$\begin{aligned} & \varphi'_l(x') - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x) \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ & = \delta\varphi_l(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_l(x) \end{aligned}$$



P.ej., para un campo $\varphi(x)$ que es escalar bajo la transformación en cuestión se tiene $\delta\varphi(x)=0$ pero $\tilde{\delta}\varphi(x) \neq 0$; en el caso general incluso $\delta\varphi_l(x) \neq 0$ (como se ilustra en la figura de arriba para un campo $\vec{\varphi}(x)$ que transforma como vector bajo rotaciones).

LS: 01/09/22

Una diferencia importante entre $\delta\varphi_l(x)$ y $\tilde{\delta}\varphi_l(x)$ es que

$$\partial_\mu \tilde{\delta}\varphi_l(x) = \partial_\mu \varphi'_l(x) - \partial_\mu \varphi_l(x) = \tilde{\delta} \partial_\mu \varphi_l(x),$$

mientras que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \delta\varphi_l(x) &= \partial_\mu (\varphi'_l(x') - \varphi_l(x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi'_l(x') - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_l(x) \end{aligned}$$

sumamos y restamos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \delta \varphi_l(x) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \varphi'_l(x') - \partial_\mu \varphi_l(x)}_{\delta \partial_\mu \varphi_l(x)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi'_l(x) - \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \varphi'_l(x')}_{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\nu}} \\ &= \delta \partial_\mu \varphi_l(x) + \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial \varphi'_l(x')}{\partial x'^\mu} \end{aligned}$$

$x'^\nu = x^\nu + \delta x^\nu$

es decir,

$$\boxed{\partial_\mu \delta \varphi_l(x) = \delta \partial_\mu \varphi_l(x) + \partial_\mu \delta x^\nu \partial_\nu \varphi_l(x)}$$

Con la intención de aclarar más nuestra notación para las variaciones δx^μ y $\delta \varphi_l(x)$ asociadas a una simetría, conviene mencionar algunos ejemplos:

1) Traslaciones en el espaciotiempo

$$\left. \begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + a^\mu \\ \varphi'_l(x') &= \varphi_l(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Versión infinitesimal} \\ a^\mu = \omega^\mu \quad |\omega^\mu| \ll 1 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta x^\mu = \omega^\alpha \delta_\alpha^\mu \quad \alpha=0,1,2,3 \\ \delta \varphi_l(x) = 0 \end{array} \right.$$

$\equiv X_\alpha^\mu$
 $\equiv \Phi_{\alpha l}$

Para lograr que $S[\varphi_l]$ sea invariante, simplemente debemos usar $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \partial_\mu \varphi_l(x))$ sin dependencias explícitas de x^μ .

2) Transformaciones de Lorentz (restringidas)

$$\left. \begin{aligned}
 x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\
 \varphi'_l(x') &= M_{ll'}(\Lambda) \varphi_l(x)
 \end{aligned} \right\} \text{, que en versión infinitesimal}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \quad \text{c/ } \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

$$= \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\sigma\rho} (\eta^{\mu\sigma} \delta^{\rho}_{\nu} - \eta^{\mu\rho} \delta^{\sigma}_{\nu})$$

$i(\tilde{J}^{\sigma\rho})^{\mu}_{\nu}$ (p.20)
 $\uparrow \equiv \alpha$ (6 valores)

rep de $SO^+(3,1)$
 (suma sobre l implícita)

$$M_{ll'} = \delta_{ll'} + \frac{1}{2} \omega_{\sigma\rho} i(S^{\sigma\rho})_{ll'}$$

generadores: rep de álgebra $so^+(3,1)$
 (p.ej., en rep. vectorial, $S^{\sigma\rho} = \tilde{J}^{\sigma\rho}$)

implica

$$\left\{ \begin{aligned}
 \delta x^{\mu} &= \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \frac{1}{2} \omega^{\sigma\rho} (\delta^{\mu}_{\sigma} \eta_{\rho\nu} x^{\nu} - \delta^{\mu}_{\rho} \eta_{\sigma\nu} x^{\nu}) \\
 \delta \varphi_l(x) &= \frac{1}{2} \omega^{\sigma\rho} (i S_{\sigma\rho})_{ll'} \varphi_{l'}(x)
 \end{aligned} \right.$$

$$\underbrace{\delta^{\mu}_{\sigma} x_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho} x_{\sigma}}_{\equiv X_{\sigma\rho}^{\mu}}$$

$$\underbrace{\delta \varphi_l(x)}_{\equiv \Phi_{ll'}(x)}$$

Para que $S[\varphi_l]$ sea invariante, debemos combinar los φ_l 's de tal manera que $\mathcal{L}(\varphi_l(x), \partial_{\mu} \varphi_l(x))$ sea escalar.

1) y 2) claramente modifican x^{μ} y son por tanto ejemplos de simetrías espaciotemporales.

L13: 07/09/18 (-10 min)

3) Simetría Interna

$x'^{\mu} = X^{\mu}$
 $\varphi'_{\ell I'}(x') = M_{I' I} \varphi_{\ell I}(x)$

Version infinitesimal \rightarrow

$$\begin{cases} \delta X^{\mu} = 0 \\ \delta \varphi_{\ell I}(x) = \omega^{\alpha} (i T_{\alpha})_{II'} \varphi_{\ell I'}(x) \end{cases}$$

$\alpha = 1, \dots, \dim G$
 $\equiv \Phi_{\ell I \alpha}(x)$

$M = \exp(i \theta^{\alpha} T_{\alpha})$
 (sumas sobre I y sobre α implícitas)

generadores: rep de álgebra de Lie \mathfrak{g}
 $[T_{\alpha}, T_{\beta}] = i f_{\alpha\beta}^{\gamma} T_{\gamma}$ ($\gamma \leq \alpha, \beta$)
 ctes. de estructura

Indices internos
 rep de grupo de Lie G

Regresemos ahora al argumento general, para deducir las implicaciones de la existencia de una simetría continua. Si la transformación $\delta X^{\mu} = \omega^{\alpha} X^{\mu}$, $\delta \varphi_{\ell I}(x) = \omega^{\alpha} \Phi_{\ell I \alpha}(x)$ es una simetría, entonces, aún sin usar las ecs. de mov.,

$$\delta S = \int d^4 x' \mathcal{L}(x') - \int d^4 x \mathcal{L}(x) = 0$$

$$\equiv \mathcal{L}(\varphi'_{\ell I}(x'), \frac{\partial \varphi'_{\ell I}(x')}{\partial x'^{\mu}})$$

En el contexto clásico, podríamos tener más en general $\delta S = \int d^4 x \partial_{\mu} \tilde{\zeta}^{\mu}$ y así preservar las ecs. de mov.
 En el contexto cuántico, para tener una verdadera simetría necesitamos $\delta S = 0$.

Usando

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \tilde{\delta} \mathcal{L}(x) + \delta X^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L}(x)$$

$$y$$

$$d^4x' = \left| \det \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| d^4x = \left| \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & \dots \\ \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & 1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right| d^4x$$

$$= (1 + \partial_{\nu} \delta x^{\nu}) d^4x, \quad \leftarrow \text{ignorando términos de orden } (\delta x)^2$$

la condición $\delta S = 0$ equivale a

$$0 = \int d^4x \left[\underbrace{(1 + \partial_{\nu} \delta x^{\nu}) \mathcal{L}(x)}_{\partial_{\nu} (\delta x^{\nu} \mathcal{L}(x))} + \underbrace{\delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L}(x) + \tilde{\delta} \mathcal{L}(x)}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\ell}} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \tilde{\delta} \partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x)} - \mathcal{L}(x) \right]$$

p.164

$$\stackrel{\text{p.161}}{=} \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x) \right)$$

↑ apenas ahora usamos ecs. de mov.

$$\partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x) \right) \stackrel{\text{p.164}}{=} \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell}(x))} \tilde{\delta} \varphi_{\ell}(x) - \delta x^{\nu} \partial_{\nu} \mathcal{L}(x) \right)$$

es decir,

$$0 = \int d^4x \partial_{\nu} \left[\delta x^{\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_{\ell})} (\delta \varphi_{\ell} - \delta x^{\nu} \partial_{\nu} \varphi_{\ell}) \right].$$

Recordando que $\delta x^{\mu} = \omega^{\alpha} X_{\alpha}^{\mu}$, $\delta \varphi_{\ell}(x) = \omega^{\alpha} \Phi_{\ell \alpha}(x)$, esto es

$$0 = \int d^4x \omega^\alpha \partial_\mu \left[X_\alpha^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} (\Phi_{l\alpha} - X_\alpha^\nu \partial_\nu \varphi_l) \right].$$

Concluimos entonces que la (densidad de quadri-) corriente

de Noether

suma sobre l

$$J_\alpha^\mu \equiv X_\alpha^\nu \left(-\delta_\nu^\mu \mathcal{L} + \partial_\nu \varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \Phi_{l\alpha} \quad (10)$$

una corriente por cada transformación independiente

se conserva: $\partial_\mu J_\alpha^\mu = 0$

(si $\delta S = \int d^4x \omega^\alpha \partial_\mu \Xi_\alpha^\mu \neq 0$, entonces la corriente conservada es $J_\alpha^\mu - \Xi_\alpha^\mu$)

$$\partial_0 J_\alpha^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

densidad de carga \uparrow densidad de corriente



lo cual implica a su vez que la carga de Noether

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J_\alpha^0$$

ec. de continuidad

condiciones de borde apropiadas

se conserva: $\frac{d}{dt} Q_\alpha = \int d^3x \partial_0 J_\alpha^0 = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = 0$

Es importante resaltar que para deducir esta ley

de conservación fue necesario utilizar las ecs. de mov.

Hemos demostrado entonces (por construcción explícita) el teorema de Noether: cada simetría continua da lugar a una ley de conservación, es decir, a la existencia de una corriente/carga conservada.

Como veremos en breve, la carga de Noether Q_α resulta ser el generador de la transformación en cuestión.

(Antes habíamos mencionado ya esta conexión en sentido inverso, y a nivel cuántico: en la p.142 vimos que a partir de una carga conservada \hat{Q} se puede definir una simetría continua.) Pero para hacer nuestra discusión más concreta,

13: 01/03/17

conviene primero aplicar el resultado general (10) a ejemplos:

1) Traslaciones $X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$, $\Phi_{l\nu} = 0$ (p.165)

\Rightarrow existen 4 corrientes conservadas T_ν^μ \leftarrow componente
 \leftarrow nombre de la corriente

$$T_\nu^\mu \equiv X_\nu^\rho \left(-\delta_\rho^\mu \mathcal{L} + \partial_\rho \varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_l)} \Phi_{l\nu}$$

$$T_\nu^\mu = \partial_\nu \varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

Tensor de Energía-Momento
 (= Energía-Esfuerzo) canónico

$\left(\begin{array}{c|c} T^0_0 & T^0_i \\ \hline T^j_0 & T^j_i \end{array} \right)$

corriente por translaciones en t corriente por translaciones en x^i

\leftarrow densidad de carga
 \leftarrow densidad de corriente espacial

Por construcción, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, y

Las cargas conservadas correspondientes son

$$P_\nu \equiv \int d^3x T^0_\nu = \int d^3x \left(\partial_\nu \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\ell(x))} - \delta^0_\nu \mathcal{L} \right)$$

(Cuadri-) Momento de nuestros campos

En particular, la carga para $\nu=0$ es el Hamiltoniano

$$H = P_0 = \int d^3x \left(\partial_0 \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_\ell(x))} - \mathcal{L} \right) \quad \text{Energía}$$

Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} \equiv T^0_0$

Notemos que esta relación entre \mathcal{H} y \mathcal{L} es análoga

a la conexión usual entre el Hamiltoniano y el Lagrangiano.

En efecto, para un sistema con N grados de libertad $q_c(t)$,

descrito por $S[q_c] = \int dt L(q_c(t), \dot{q}_c(t))$, $\leftarrow 1, \dots, N$

definimos el momento canónico conjugado a $q_c(t)$, $p_c(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c(t)}$,

y el Hamiltoniano

$$H(q_c, p_c) \equiv \sum_{c=1}^N \dot{q}_c p_c - L(q_c, \dot{q}_c).$$

Para un sistema de campos $\varphi_l(x)$, donde tenemos un número infinito de grados de libertad, etiquetados con el subíndice discreto l y el índice continuo \vec{x} , procedemos de manera similar: recordando que en este caso el Lagrangiano es una funcional

$$L[\varphi_l(t), \dot{\varphi}_l(t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_l(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_l(t, \vec{x}), \dot{\varphi}_l(t, \vec{x})) \equiv L(t),$$

\swarrow independiente de $\varphi_l(t)$ a t fijo \nwarrow independiente de $\varphi_l(t, \vec{x})$ a \vec{x} fijo

definimos la densidad de momento canónico conjugado a $\varphi_l(t, \vec{x})$, $\equiv \partial_t \varphi_l(t, \vec{x})$

$$\pi_l(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_l(x)} \stackrel{p.162}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_l(x)}$$

y el Hamiltoniano

$$H \equiv \int d^3x (\dot{\varphi}_l(x) \pi_l(x) - \mathcal{L}(x))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \mathcal{H}}$

$\swarrow \quad \searrow$ suma sobre l implícita

que en verdad coincide con la carga de Noether asociada a transiciones en el tiempo, $H = P_0$ ($\leftrightarrow \mathcal{H} = T^0$) ✓

El teorema de Noether nos permite además deducir la forma de las cargas asociadas a la invariancia bajo traslaciones espaciales, es decir, el momento espacial del campo,

$$\vec{P} = - \int d^3x \vec{\nabla} \varphi_\ell \Pi_\ell \quad \text{p. 171}$$

↑ signo por índice espacial subido: $P^i \equiv \int d^3x T^{0i}$

Es importante NO confundir a la densidad de momento espacial $T^{0i}(x)$ con la densidad de momento canónico $\Pi_\ell(x)$.

2) Transformaciones de Lorentz (p. 166)

$$X_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = \delta_{\sigma}^{\mu} x_{\rho} - \delta_{\rho}^{\mu} x_{\sigma}, \quad \Phi_{\text{Lorentz}} = (i S_{\sigma\rho})_{\ell\ell'} \varphi_{\ell'}(x)$$

$\underbrace{\quad}_{\equiv \alpha}$
 $\underbrace{\quad}_{\equiv \alpha}$
 \uparrow generadores de Lorentz

⇒ 6 corrientes conservadas

$$J_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = \underbrace{(\delta_{\sigma}^{\nu} x_{\rho} - \delta_{\rho}^{\nu} x_{\sigma})}_{X_{\sigma\rho}^{\nu\mu}} \underbrace{(-\delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} + \partial_{\nu} \varphi_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi)})}_{T_{\nu}^{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_\ell)} \underbrace{(i S_{\sigma\rho})_{\ell\ell'} \varphi_{\ell'}}_{\Phi_{\text{Lorentz}}}$$

i.e.,

$$J_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = T_{\sigma}^{\mu} x_{\rho} - T_{\rho}^{\mu} x_{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_\ell)} (i S_{\sigma\rho})_{\ell\ell'} \varphi_{\ell'}$$

$$\pi_l \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_l)}$$

Las cargas asociadas serán los generadores de Lorentz

$$J_{\sigma\rho} \equiv \int d^3x \mathcal{J}_{\sigma\rho}^0 = \int d^3x \left(T^0_{\sigma\rho} - T^{\rho}_{\sigma} x_0 - \pi_l (iS_{\sigma\rho})_{ll'} \varphi_{l'} \right).$$

Las 3 cargas conservadas por la invariancia rotacional son el momento angular (generadores de rotaciones)

$$J_{ij} = \int d^3x \left(T^0_{ij} x_j - T^0_{ji} x_i - \pi_l (iS_{ij})_{ll'} \varphi_{l'} \right).$$

momento angular
orbital ($\sim \vec{x} \times \vec{p}$)

momento angular de espín
(es decir, por cambio de aspecto
interno del campo bajo rotaciones)

Las 3 cargas relacionadas con la invariancia bajo empujones son

$$J_{0i} = \int d^3x \left(T^0_{0i} x_i - T^i_{00} x_0 - \pi_l (iS_{0i})_{ll'} \varphi_{l'} \right).$$

Tendremos q no pensar en estas como cantidades conservadas,

porque tienen dependencias explícitas del tiempo, así que a nivel cuántico

$$0 = \frac{d\hat{J}_{0i}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{J}_{0i}] + \frac{\partial \hat{J}_{0i}}{\partial t} \leftrightarrow [\hat{J}_{0i}, \hat{H}] \neq 0.$$

3) Simetría Interna $X_{\alpha}^M = 0$, $\Phi_{lI\alpha} = (iT_{\alpha})_{II'} \varphi_{I'}$ (p.167)

$\alpha = 1, \dots, \dim G$

$\Rightarrow \dim G$ corrientes conservadas

$$J_\alpha^M = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_{II})} (iT_\alpha)_{II'} \phi_{II'}$$

y cargas conservadas

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J_\alpha^0 = - \int d^3x \Pi_{II} (iT_\alpha)_{II'} \phi_{II'}$$

L16: 12/09/22

p.ej., carga eléctrica solo caso particular

Habiendo visto ejemplos, intentemos ahora entender el sentido en el que la carga de Noether en el caso general, Q_α , es el generador de la transformación de simetría correspondiente. Para ello, necesitamos extender la noción de paréntesis de Poisson al caso de campos.

Recordemos primero que para un sistema discreto con variables canónicas q_c, p_c y hamiltoniano $H(q_c, p_c)$, las eqs. de movimiento son $\leftarrow c=1, \dots, C$

$$\dot{q}_c = \frac{\partial H}{\partial p_c}, \quad \dot{p}_c = - \frac{\partial H}{\partial q_c}$$

Ecuaciones de Hamilton

Para cualquier función en el espacio fase, $f(q_c(t), p_c(t), t)$, tenemos entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{c=1}^C \left(\frac{\partial f}{\partial q_c} \dot{q}_c + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c \right) \stackrel{\text{Hamilton}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{c=1}^C \left(\frac{\partial f}{\partial q_c} \frac{\partial H}{\partial p_c} - \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial H}{\partial q_c} \right)$$

es decir,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_{\mathcal{P}},$$

donde definimos, para cualesquiera 2 funciones A, B en el espacio fase,

$$\boxed{\{A, B\}_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{c=1}^C \left(\frac{\partial A}{\partial q_c} \frac{\partial B}{\partial p_c} - \frac{\partial A}{\partial p_c} \frac{\partial B}{\partial q_c} \right)}$$

Paréntesis de Poisson (no confundir con anticomutador)

Notemos que $\boxed{\{q_c, p_d\}_{\mathcal{P}} = \delta_{cd}}$, y las eqs. de Hamilton son $\dot{q}_c = \{q_c, H\}_{\mathcal{P}}$, $\dot{p}_c = \{p_c, H\}_{\mathcal{P}}$.

Los paréntesis de Poisson tienen las mismas propiedades que los conmutadores: son claramente antisimétricos, y se puede mostrar que satisfacen la identidad de Jacobi,

$$\{A, \{B, C\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} + \{B, \{C, A\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} + \{C, \{A, B\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} = 0.$$

De hecho, la receta para la cuantización canónica de un sistema es justamente reemplazar a los paréntesis de Poisson

entre un par de variables clásicas con el conmutador entre los operadores cuánticos correspondientes:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}}_{\text{P}}.$$

Para funciones A, B arbitrarias, puede haber problemas de ordenamiento. Lo que hacemos es postular la relación

básica
$$[\hat{q}_c, \hat{p}_d] = i\hbar \delta_{cd},$$
 ← proveniente de $\{q_c, p_d\}_{\text{P}} = \delta_{cd}$
 donde $\hbar = 1$

y deducir los otros conmutadores a partir de este.

En el caso de campos, tenemos variables canónicas

$$\varphi_{\ell}(x), \pi_{\ell}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\ell}(x)}, \text{ y Hamiltoniano}$$

$$H[\varphi_{\ell}(t), \pi_{\ell}(t)] \equiv \int d^3x \mathcal{H}(\varphi_{\ell}(t, \vec{x}), \vec{\nabla} \varphi_{\ell}(t, \vec{x}), \pi_{\ell}(t, \vec{x})).$$

↑ independiente de φ_{ℓ} a \vec{x} fijo

Las ecs. de Hamilton (equivalentes a E-L) son ahora

$$\dot{\varphi}_{\ell}(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_{\ell}(x)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{\ell}(x)}, \quad \leftarrow \text{No manifiestamente}$$

$$\dot{\pi}_{\ell}(x) = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_{\ell}(x)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{\ell}(x)} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \varphi_{\ell}(x))}.$$

✓ covariantes bajo Poincaré

Para funciones en el espacio fase, $A[\varphi_l(t), \pi_l(t), t]$
 $B[\varphi_l(t), \pi_l(t), t]$ (como H ó L), definimos los
paréntesis de Poisson

$$\{A(t), B(t)\}_P \equiv \sum_l \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi_l(x)} \frac{\delta B}{\delta \pi_l(x)} - \frac{\delta A}{\delta \pi_l(x)} \frac{\delta B}{\delta \varphi_l(x)} \right)$$

y tenemos nuevamente

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}_P,$$

$$\{\varphi_l(t, \vec{x}), \pi_{l'}(t, \vec{x}')\}_P = \delta_{ll'} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

Podemos ahora finalmente retomar nuestra discusión del
 papel de las cargas de Noether. Recordando que en el
 caso general la densidad de carga de Noether es (p. 169, 170, 172)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\alpha^0 &= X_\alpha^\nu T_{\nu}^0 - \pi_{l'} \Phi_{l'\alpha} \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \text{implícita} \\ &= X_\alpha^0 \mathcal{H} + X_\alpha^i \underbrace{\pi_{l'} \partial_i \varphi_{l'}}_{\text{densidad de } P_i} - \pi_{l'} \Phi_{l'\alpha}, \end{aligned}$$

y suponiendo que, como en todos los ejemplos que vimos, $\Phi_{l'\alpha}$
 es función solo de φ_l y no de $\dot{\varphi}_l \leftrightarrow \pi_l$, podemos calcular

el paréntesis de Poisson a tiempos iguales \circ

$$\left\{ \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}'), \varphi_\ell(t, \vec{x}) \right\}_P = \sum_{\ell''} \int d^3x'' \left(\frac{\delta \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')}{\delta \varphi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} \frac{\delta \varphi_\ell(t, \vec{x})}{\delta \pi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} - \frac{\delta \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')}{\delta \pi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} \frac{\delta \varphi_\ell(t, \vec{x})}{\delta \varphi_{\ell''}(t, \vec{x}'')} \right) \int d^3x'' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'')$$

p. 162

$$= - \frac{\delta \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})} = X_\alpha^0 \mathcal{H} + X_\alpha^i \pi_{\ell'}^i \partial_i \varphi_{\ell'} - \pi_{\ell'}^i \Phi_{\ell' \alpha}$$

$$= -X_\alpha^0(t, \vec{x}') \underbrace{\frac{\delta \mathcal{H}(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})}}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\ell} \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} - X_\alpha^i(t, \vec{x}') \underbrace{\frac{\delta \pi_{\ell'}^i(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})}}_{\delta_{\ell' \ell}^i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} \partial_i \varphi_{\ell'} + \underbrace{\frac{\delta \pi_{\ell'}^i(t, \vec{x}')}{\delta \pi_\ell(t, \vec{x})}}_{\delta_{\ell' \ell}^i \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} \bar{\Phi}_{\ell' \alpha}$$

$$= \partial_0 \varphi_\ell \text{ por ec. de Hamilton}$$

es decir,

$$\left\{ \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}'), \varphi_\ell(t, \vec{x}) \right\}_P = \left(-X_\alpha^0(t, \vec{x}') \partial_\omega \varphi_\ell(t, \vec{x}) + \bar{\Phi}_{\ell' \alpha}(t, \vec{x}) \right) \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Integrando sobre \vec{x}' para obtener la carga $Q_\alpha(t) \equiv \int d^3x' \mathcal{J}_\alpha^0(t, \vec{x}')$,
concluimos entonces que

$$\left\{ Q_\alpha(t), \varphi_\ell(t, \vec{x}) \right\}_P = \underbrace{-X_\alpha^0(t, \vec{x})}_{\frac{1}{\omega_\alpha} \delta X^\omega} \partial_\omega \varphi_\ell(t, \vec{x}) + \underbrace{\bar{\Phi}_{\ell' \alpha}(t, \vec{x})}_{\frac{1}{\omega_\alpha} \delta \varphi_\ell},$$

o en otras palabras,

$$\left\{ \omega^\alpha Q_\alpha(t), \varphi_\ell(\vec{x}, t) \right\}_{\mathbb{P}} = \delta \varphi_\ell(\vec{x}, t) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_\ell(\vec{x}, t) = \tilde{\delta} \varphi_\ell(\vec{x}, t)$$

↑
↑
sin (o con) suma sobre α

Este es el resultado que habíamos prometido: es en este sentido que la carga de Noether Q_α genera la transformación de simetría en cuestión.

Es posible también mostrar que las cargas "Poissonizan" entre sí de la manera esperada con base en el grupo de simetrías involucrado — p.ej. para los generadores de Lorentz se obtienen las reglas de conmutación (2) del álgebra de Lie $so^+(3,1)$,

$$\left\{ J^{\mu\nu}, J^{\lambda\rho} \right\}_{\mathbb{P}} = \eta^{\mu\rho} J^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\lambda} J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\lambda} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} J^{\mu\lambda}.$$

Al cuantizar nuestra teoría de campo(s), las variables canónicas φ_ℓ, Π_ℓ se convertirán en operadores $\hat{\varphi}_\ell, \hat{\Pi}_\ell$, con lo cual las cargas de Noether Q_α se volverán también